**1- تعريف تحليل الحساسية**

**2- أهمية تحليل الحساسية**

**3- حساسية تغير معاملات دالة الهدف**

**تمهيد:**

يبين لنا أن إطار البرمجة الخطية أن الحل الأمثل الذي تم التوصل إليه من خلال طريقة السمبلاكس ففي كافة نماذج البرمجة الخطية يعتمد على قيم معاملات المتغيرات المختلفة التي يتكون منها نموذج البرمجة الخطية، وذلك أن معاملات دالة الهدف، ومعاملات القيود والثوابت التي تمثل الحدود المتاحة، تعتبر بمثابة مدخلات البيانات ومعلمات نموذج البرمجة الخطية، فالحل العملي لمشكلة البرمجة الخطية لا يعتبر حلاً كاملاً بمجرد التوصل إلى الحل الأمثل، وذلك أن حدوث أي تغيير في قيم المعاملات أو في مدخلات البيانات من شأنه أن يعمل على تغيير مشكلة البرمجة الخطية، ومن ثم فإنه بدون شك سيؤثر على الحل الأمثل للمشكلة.

 **1- تعريف تحليل الحساسية: يقصد بتحليل القيام بعملية تحليل كمي، بهدف البحث عن إجابة سؤال يدور مضمونه حول: " ماذا يحدث لو حدث تغير في قيمة كل أو بعض معاملات المتغيرات الداخلة في تركيب النموذج الخطي، وهل بذلك يعتبر وسيلة هامة للتأكد من مدى مثالية هذا الحل؟ وهل مازال يعتبر حلاً أمثلاً بعد حدوث التغيرات في قيم المعاملات، أم لا؟ وهل لا يزال يحقق كافة القيود الموضوعة؟ وهل سيظل يمثل الحل الأمثل للفترة المستقبلية؟** (عبد المنعم فليح و آخرون، 2018، صفحة 139)

الواقع أن تحليل الحساسية نموذج البرمجة الخطية، يوفر إجابات محددة ودقيقة عن كل هذه التساؤلات، وذلك من خلال إستخدام قواعد محددة يتم تطبيقها بدون الحاجة إلى إعادة حل النموذج كله، وذلك لكي يمكن الاستفادة من هذا النموذج في مجالات عديدة لاتخاذ القرارات الإدارية.

 **2- أهمية تحليل الحساسية: تتجلي فيما يلي:** (عبد المنعم فليح و آخرون، 2018، الصفحات 139-140)

\* تحديد مدى استجابة الحل الأمثل الذي يتم التوصل إليه للتغيرات التي قد يتم إدخالها على قيم المعاملات المتعلقة بهذا الحل؛

\* تحليل ودراسة مدى تأثيرات التغييرات في معاملات النموذج على الحل الأمثل؛ والاستفادة من هذه التغييرات في اتخاذ القرارات؛

\* إمكانية التوصل إلى تقديرات دقيقة لمعاملات (معلمات) نموذج البرمجة الخطية، حيث أن تحديد المعاملات التي تؤثر أكثر من غيرها على قيمة دالة الهدف من شأنها اتاحة إمكانية التوصل إلى أفضل التقديرات لهذه المعلمات، وذلك بشكل يساهم في زيادة درجة الثقة في نموذج البرمجة الخطية، وفي الحل المستخرج منه.

فتحليل حساسية نموذج البرمجة الخطية، يركز على التغييرات التالية في المدخلات الآتية:

* التغييرات في معاملات دالة الهدف "$c\_{i}$"
* التغييرات في الثوابت التي تمثل الطاقة المتاحة "$b\_{i}$"'
* التغييرات في مصفوفة القيود أو المعاملات "$a\_{ij}$" والتي قد ترجع إلى:

- إضافة متغير جديد؛

- إحداث تغير في الأعمدة الموجودة؛

- إضافة قيود جديدة للموارد المتاحة.

ولفهم أساسيات وكيفية تطبيق تحليل الحساسية وكيفية معالجة التغييرات السابقة من خلال المثال التطبيقي التالي:

تنتج إحدى المؤسسات الصناعية ثلاث منتجات ($,x\_{1},x\_{2},x\_{3}$) ويبلغ هامش مساهمة الوحدة من كل منتوج 2 دج، 3 دج، 1 دج على التوالي، كما تحتاج هذه المنتجات إلى نوعين من الموارد هما: العمل المباشر، والمواد الخام، وقد ظهر نموذج البرمجة الخطية بالشكل التالي:

|  |
| --- |
| $$MaxZ=2x\_{1}+3x\_{2}+x\_{3}$$ |
|  |
| $\frac{1}{3}x\_{1}+\frac{1}{3}x\_{2}+\frac{1}{3}x\_{3}\leq 1$قيد العمل المباشر  |
| $$\frac{1}{3}x\_{1}+\frac{4}{3}x\_{2}+\frac{7}{3}x\_{3}\leq 3قيد مواد الخام $$ |
| $$x\_{1},x\_{2},x\_{3}\geq 0$$ |

ويظهر الجدول المبدئي على النحو التالي:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$b\_{i}$$ | 0 | 0 | 1 | 3 | 2 | $$c\_{j}$$ |
| $$s\_{2}$$ | $$s\_{1}$$ | $$x\_{3}$$ | $$x\_{2}$$ | $$x\_{1}$$ | $$v\_{b}$$ | $$c\_{j}$$ |
| 1 | 0 | 1 | $$\frac{1}{3}$$ | $$\frac{1}{3}$$ | $$\frac{1}{3}$$ | $$s\_{1}$$ | 0 |
| 3 | 1 | 0 | $$\frac{7}{3}$$ | $$\frac{4}{3}$$ | $$\frac{1}{3}$$ | $$s\_{2}$$ | 0 |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $$z\_{i}$$ |
|  | 0 | 0 | 1+ | 3+ | 2+ | $$c\_{j}-z\_{i}$$ |

ومن خلال تطبيق القواعد التي بيانها بطريقة السمبلاكس (تعظيم الربحية) فقد ظهر جدول الحل الأمثل على النحو التالي:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$b\_{i}$$ | 0 | 0 | 1 | 3 | 2 | $$c\_{j}$$ |
| $$s\_{2}$$ | $$s\_{1}$$ | $$x\_{3}$$ | $$x\_{2}$$ | $$x\_{1}$$ | $$v\_{b}$$ | $$c\_{j}$$ |
| 1 | -1 | 4 | -1 | 0 | 1 | $$x\_{1}$$ | 2 |
| 2 | 1 | -1 | 2 | 1 | 0 | $$x\_{2}$$ | 3 |
|  | 1 | 5 | 4 | 3 | 2 | $z\_{i}$=8 |
|  | -1 | -5 | -3 | 0 | 0 | $$c\_{j}-z\_{i}$$ |

بالنظر إلى جدول حل الأمثل السابق يتبين الآتي:

\* الحل يعتبر حلاً أمثلاً لأن كافة متغيرات سطر التقييم $\left(c\_{j}-z\_{i}\right)$ سالبة ومعدومة؛

\* يتحدد مزيج الانتاج الأمثل على أساس $\left(x\_{1}=1\right)$ وحدة، $\left(x\_{2}=2\right)$ وحدة، $\left(x\_{3}=0\right)$ ؛

\* أقصى ربح ممكن محقق هو 8 دج؛

\* أسعار ظل الموارد تحدد كالآتي:

$s\_{1}=5دج$: هو مورد العمل المباشر وطاقته مستعملة بالكامل.

$s\_{2}=1دج$: مورد مواد الخام وطاقته مستعملة بالكامل.

" وتجدر الإشارة هنا، إلا أننا إذا قمنا بإجراء تحليل الحساسية، فإننا يمكننا الحصول على معلومات هامة وذات قيمة جوهرية، تتعلق بجداول الانتاج البديلة وثيقة الصلة بالحل الأمثل، حيث تعتبر هذه المعلومات ذات الأهمية ونفع كبيرين للإدارة، بما قد يفوق أهميته تحديد الحل الأمثل نفسه، ويمكن القول كحقيقة هامة أن أحد أسباب إنتشار البرمجة الخطية في الحياة العملية، تمثل في قدرتها على إجراء تحليل الحساسية جنبًا، مع التوصل إلى الحل الأمثل" (عبد المنعم فليح و آخرون، 2018، صفحة 143)

 **أولا: التغيرات في معاملات دالة الهدف**

قد تحدث تغيرات في معاملات دالة الهدف، وذلك لما يؤدي إلى حدوث تغيير في ربح أو تكلفة أحد أو بعض متغيرات النموذج، والذي قد يكون متغيرًا أساسيًا في الحل الأمثل، وقد يكون متغيرًا أساسيًا في الحل الأمثل، وقد يكون متغير غير أساسي في هذا الحل، ويتبين ذلك فيما يلي:

 **1- تغير معاملات دالة الهدف لمتغير غير أساسي: يتبين من جدول مزيج الإنتاج الأمثل، أن المنتج** $x\_{3}$ **لم يتم إنتاجه بسبب انخفاض ربح الوحدة** $c\_{3}$ **حيث بلغت 1 دج، وقد يكون من الضروري والمهم هنا أن نحاول إيجاد مجال من القيم للربح** $c\_{3}$ **بحيث يظل الحل الأمثل الحالي على ما هو عليه، وهنا نتبين من دراسة جدول الحل الأمثل فأي انخفاض في المعامل** $c\_{3}$ **إلىأقل من 1 دج لن يكون له تأثير على الحل الأمثل الحالي، لأن المنتج** $x\_{3}$ **سوف يظل غير مربح ، ولكن إذا زاد ربحه فوق فيمة معينة فإن المنتج "**$x\_{3}$**" قد يصبح إنتاجه أمرًا مهمًا.**

وعندما تتغير قيمة $c\_{3}$ **والتي تتعلق بالمنتج** $x\_{3}$ **فإن قيمة معامل هذا المتغير في سطر التقييم النهائي** $\left(c\_{j}-z\_{i}\right)$ **سوف تتغير في الجدول الأمثل، مع ملاحظة أن الجدول الأمثل السابق سيظل أمثلاً طالما يكون معامل** $x\_{3}$ **سالبًا.**

ويتبين من جدول السمبلكس الأمثل الحالي، أن ربح الوحدة من المتغيرين $\left(x\_{2},x\_{1}\right)$ هو $\left(3,2\right)$ على الترتيب وعلى ذلك فإن معامل المتغير $x\_{3}$ **في سطر التقييم النهائي** $\left(c\_{j}-z\_{i}\right)$ **يحدد كالآتي:**

$$4-c\_{3}=4-=6+2-=\left(2\right) 3+\left(-1\right)×2-c\_{3}=\left[\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right]\left(2×3\right)-c\_{3}=\overline{c\_{3}}$$

وهنا يجب أن نلاحظ أنه لكي يكون الجدول السابق جدولاً فإن معامل المتغير $x\_{3}$ **في سطر التقييم** $\left(c\_{j}-z\_{i}\right)$$0\leq 4-c\_{3}=\overline{c\_{3}}$، $4\leq c\_{3}$ فإن إنتاج المنتج $x\_{3}$ **لن يكون إقتصاديًا، وسيظل مزيج الانتاج الحالي بمثابة المزيج الأمثل، ولكن إ‘ذا فرضنا أن ربح الوحدة من المنتج** $x\_{3}$ **قد زاد إلى 6 دج، حينئذ** $+2=4-6=\overline{c\_{3}}$ فمزيج الإنتاج الحالي لن يكون أمثلاً، لأنه يمكن زيادة الأرباح القصوى بإنتاج $x\_{3}$**، ويترتب على ذلك أن جدول السمبلكس السابق يكون الجدول الأمثل، حيث أنه يمكن إدخال** $x\_{3}$ **في الأساس لزيادة قيمة دالة الهدف، وبتطبيق قاعدة أكبر قيمة موجبة فإن المتغير** $x\_{2}$ **يترك الأساس في سطر التقييم النهائي** $\left(c\_{j}-z\_{i}\right)$**، ليحل** $x\_{3}$ **محله.**

**ويمكن القول وكقاعدة عامة: " أن حساسية الحل الأمثل الحالي يمكن التوصل إليها بأفضل طريقة ممكنة من خلال دراسة كيف سيتغير الجدول الأمثل الحالي إذ ما تغيرت مدخلات البيانات"** (عبد المنعم فليح و آخرون، 2018، صفحة 144)،

 **، ويظهر الحل الأمثل الجديد كالآتي:**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$b\_{i}$$ | 0 | 0 | 1 | 3 | 2 | $$c\_{j}$$ |
| $$s\_{2}$$ | $$s\_{1}$$ | $$x\_{3}$$ | $$x\_{2}$$ | $$x\_{1}$$ | $$v\_{b}$$ | $$c\_{j}$$ |
| 1 | -1 | 4 | -1 | 0 | 1 | $$x\_{1}$$ | 2 |
| 2 | 1 | -1 | 2 | 1 | 0 | $$x\_{2}$$ | 3 |
|  | 1 | 5 | 4 | 3 | 2 | $z\_{i}$=8 |
|  | -1 | -5 | -3 | 0 | 0 | $$c\_{j}-z\_{i}$$ |
| $$b\_{i}$$ | 0 | 0 | **6** | 3 | 2 | $$c\_{j}$$ |
| $$s\_{2}$$ | $$s\_{1}$$ | $$x\_{3}$$ | $$x\_{2}$$ | $$x\_{1}$$ | $$v\_{b}$$ | $$c\_{j}$$ |
| **2** | $$-\frac{1}{2}$$ | $$\frac{7}{2}$$ | **0** | $$\frac{1}{2}$$ | 1 | $$x\_{1}$$ | 2 |
| **1** | $$\frac{1}{2}$$ | $$-\frac{1}{2}$$ | **1** | $$\frac{1}{2}$$ | 0 | $$x\_{3}$$ | 3 |
|  | 2 | 4 | **6** | 4 | 2 | $z\_{i}$=8 |
|  | 2- | 4- | **0** | 1- | 0 | $$c\_{j}-z\_{i}$$ |

وعلى ذلك فإن مزيج الإنتاج الأمثل (الجديد) يتحدد على أساس إنتاج 2 وحدة من $x\_{1}$، ووحدة واحدة من $x\_{3}$ وذلك بأرباح قصوى 10 دج، ويمكن القول بضوء ما سبق أن ربح الوحدة من المنتج $x\_{3}$ وذلك بأرباح قصوى 10 دج، ويمكن القول في ضوء ما سبق أن ربح الوحدة من المنتج $x\_{3}$ يجب أن لا تزيد من 1 دج إلى أكثر من 4 دج، وذلك لكي يكون مربحًا، ويكون بالإمكان تغيير مزيج الانتاج الأمثل الحالي، لما كان ربحه $دج1=x\_{3} $ واعتبر $x\_{3}$ في ضوء ذلك متغيرًا غير أساسي وغير مربح، ولم يدخل أساسي في الحل الأمثل، لذلك فإنه يجب أن يكون واضحًا أن أي معدل ربح لهذا المتغير تقل عن 1 دج سوف يؤدي أيضًا إلى استبعاده من المزيج الامثل، وعلى ذلك فإن معامل المتغير $x\_{3}$ (غير أساسي) في دالة الهدف، يمكن أن يقع بين $\left(0,4\right)$ ويظل الحل حلاً أمثلاً، ويجب تعديله والتوصل إلى الحل الأمثل الجديد على النحو السابق، وعلى ذلك:

**معاملات المتغيرات غير الأساسية في صف التقييم النهائي** $\left(C\_{j}-Z\_{i}\right)$ **تمثل أقصى إضافة موجبة لمعاملات دالة الهدف الأصلية، والتي تسمح للحل أن يظل أمثلاً.**

 **2- تغير معاملات دالة الهدف لمتغير أساسي: لتحديد تأثير التغيير في معدل الربح** $x\_{1}$ من المنتج الأول فإننا نجد أنه من الواضح أنه عندما تنخفض $c\_{1}$ وتصل إلى أقل من مستوى معين، فإنه من غير المربح إدخال المنتج $x\_{1}$ في مزيج الإنتاج الأمثل، وعندما تزيد $c\_{1}$ فإنه من الممكن أن يغير ذلك من مزيج الإنتاج الأمثل عند مستوى معين،ويحدث ذلك عندما يصبح المنتج $x\_{1}$ مربحًا جدًّا، بحيث أن مزيج الإنتاج الأمثل قد يتضمن سواه، وعلى ذلك فإننا نجد هناك حدًّا أعلى، وحدًّا أدنى لتغيير $c\_{1}$ ولا يتأثر الحل الأمثل الحالي السابق بازدياده إذا ما حدث التغيير بين هذه الحدود.

ولمعرفة مقدار التغير في الربح الوحدوي لـ: $x\_{1}$، و$x\_{2}$ لأنهما موجودتان في الحل نتبع ما يلي:

- من جدول السمبلاكس للحل النهائي الأمثل نقوم باستبدال معامل التغيير الذي نبحث له عن مدى الأمثلية بمعامل مجهول القيمة، ونرمز بالرمز "$c\_{i}$" حيث : $\left(i=1,2,3,\cdots \cdots \cdots n\right)$؛

- تغيير حساب السطر $\left(z\_{i}\right)$لسطر $\left(C\_{j}-Z\_{i}\right)$؛

- من السطر $\left(C\_{j}-Z\_{i}\right)$ نقوم باختبار أمثلية الحل حيث يجب أن تكون جميع قيم $\left(C\_{j}-Z\_{i}\right)$ أقل من أو تساوي الصفر في حالة دالة الهدف من الشكل "Max" وأن تكون جميع قيم $\left(C\_{j}-Z\_{i}\right) $ أكبر أو تساوي الصفر في حالة دالة الهدف من الشكل "Min"؛

- يتم حل المتراجحات التي تكوًّنت في الخطوة السابقة ومنه نتيجة هذا الحل تحدد حدود معامل $C\_{j}$ .

**- مجال تغير معامل** $x\_{1}$ **:** باتباع الخطوات السابقة نستبدل معامل المتغير $x\_{1}$ بالرمز $C\_{1}$ ونعيد حساب جدول السمبلاكس من جديد فنحصل على الجدول التالي:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$b\_{i}$$ | 0 | 0 | 1 | **3** | $$c\_{1}$$ | $$c\_{j}$$ |
| $$s\_{2}$$ | $$s\_{1}$$ | $$x\_{3}$$ | $$x\_{2}$$ | $$x\_{1}$$ | $$v\_{b}$$ | $$c\_{j}$$ |
| 1 | -1 | 4 | -1 | 0 | **1** | $$x\_{1}$$ | $$c\_{1}$$ |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | **0** | $$x\_{2}$$ | 3 |
|  | $$-c\_{1}+3$$ | $$4c\_{1}+3$$ | $$-c\_{1}+6$$ | 3 | $$c\_{1}$$ | $$z\_{i}$$ |
|  | $$-c\_{1}-3$$ | $$-4c\_{1}-3$$ | $$c\_{1}-5$$ | 0 | **0** | $$c\_{j}-z\_{i}$$ |

لكي يكون الحل أمثلاً يجب أن تكون جميع قيم السطر $\left(c\_{j}-z\_{i}\right)$ سالبة ومعدومة ومنه تكون لدينا المتراجحات التالية:

|  |
| --- |
| $c\_{1}-5\leq 0\rightarrow c\_{1}\leq 5$ |
| $$-4c\_{1}-3\leq 0\rightarrow c\_{1}\geq -\frac{3}{4}$$ |
| $$-c\_{1}-3\leq 0\rightarrow c\_{1}\geq -3$$ |

**ومنه المعامل** $c\_{1}$ **يتغير في المجال** $\left[\frac{-3}{4},5\right]$

**- مجال تغير معامل** $x\_{2}$ **:** باتباع الخطوات السابقة نستبدل معامل المتغير $x\_{2}$ بالرمز $C\_{2}$ ونعيد حساب جدول السمبلاكس من جديد فنحصل على الجدول التالي:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$b\_{i}$$ | 0 | 0 | 1 | $$c\_{2}$$ | 2 | $$c\_{j}$$ |
| $$s\_{2}$$ | $$s\_{1}$$ | $$x\_{3}$$ | $$x\_{2}$$ | $$x\_{1}$$ | $$v\_{b}$$ | $$c\_{j}$$ |
| 1 | -1 | 4 | -1 | **0** | 1 | $$x\_{1}$$ | 2 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | **1** | 0 | $$x\_{2}$$ | $$c\_{2}$$ |
|  | $$-2+c\_{2}$$ | $$8+c\_{2}$$ | $$-2+2c\_{2}$$ | $$c\_{2}$$ | **2** | $$z\_{i}$$ |
|  | $$-2-c\_{2}$$ | $$-8-c\_{2}$$ | $$3-2c\_{2}$$ | **0** | 0 | $$c\_{j}-z\_{i}$$ |

لكي يكون الحل أمثلاً يجب أن تكون جميع قيم السطر $\left(c\_{j}-z\_{i}\right)$ سالبة ومعدومة ومنه تكون لدينا المتراجحات التالية:

|  |
| --- |
| $3-2c\_{2}\leq 0\rightarrow c\_{2}\geq \frac{3}{2}$ |
| $$-8-c\_{2}\leq 0\rightarrow c\_{2}\geq -8$$ |
| $$-2-c\_{2}\leq 0\rightarrow c\_{2}\geq -2$$ |

**ومنه المعامل** $c\_{1}$ **يتغير في المجال** $\left[\frac{3}{2},-2\right]$