المحـــــاضـــرة

6

طريقة السمبلكس (simplex) في حل مسائل البرمجة الخطية في حالة تعظيم "Max"

1- التعريف بطريقة السمبلكس "Simplex"

2- خطوات حل مسائل البرمجة الخطية بطريقة "Simplex " في حالة تعظيم

3- حل مثال تطبيقي للطريقة (حالة تعظيم)

تمهيد:

مما سبق يتضح لنا أن الحل البياني لنموذج البرمجة الخطية بالرغم من أنه يتميز بسهولة تطبيقه، كما أنه يفيد في فهم خصائص تركيب وحل نموذج البرمجة الخطية، إلا أنه لا يصلح إلا في حالة وجود متغيرين، ويصعب استخدام هذا الأسلوب البياني في حالة وجود ثلاث متغيرات قرارية x_3, x_2, x_1)، إذ تتطلب ذلك ثلاثة أبعاد على الرسم البياني، ويستحيل استخدامه إذا زاد عدد المتغيرات القرارية عن ثلاثة.

وبذلك ظهرت إلى وجود طريقة "" لتسهيل إيجاد حل للنماذج الخطية التي يصعب حلها بالطريقة البيانية، حيث رأينا في هذه الطريقة الحل الأمثل في أحد أركان منطقة الحلول الممكنة، وتقوم طريقة السمبلكس بفحص هذه الأركان بطريق منظمة للوصول ذلك الحل الأمثل.

1- التعريف بطريقة السمبلكس (simplex) في حل مسائل البرمجة الخطية: يرجع الأصل معظم الطرق المستخدمة في حل مسائل البرمجة الخطية إلى "جورج دانتزج" واستنباطاته في الأربعينات من القرن العشرين، وقد أطلق على الطريقة التي اقترحها طريقة السمبلكس "Simplex Method" ، حيث أنه حدثت تغيرات عديدة في أصل هذه الطريقة ففي مجال تحليلنا سنركز على طريقة السمبلكس المبدئية "Primal Simplex Mthod" (السيد عبد المقصود و ناصر نور الدين، 2008، صفحة 303),

ويتم الحصول على الحل الأمثل وفق هذه الطريقة من خلال اتباع الخطوات التالية: (ابراهيم، 2006، الصفحات 34-35)

- تحويل جميع القيود إلى معادلات بإضافة متغير الفوارق موجب الإشارة لكل قيد؛
- اختيار الحل المبدئي أساسي مسموح به، وفي معظم الأحوال يتم اختيار نقطة الأصل كحل مبدئي، حيث تكون المتغيرات المتممة مضافة هي المتغيرات الأساسية؛ أي اللاصفرية بينما تكون المتغيرات القرارية غير أساسية؛أي صفرية وتكون قيمة دالة الهدف مساوية للصفر في هذه الحالة؛
- في كل مرحلة من مراحل الحل تكتب دالة الهدف، وكذلك القيود بدلالة المتغيرات الأساسية ثم تختبر أمثلية الحل الذي لدينا، فإذا كان هو الحل الأمثل تنتهي العملية وإذا لم يكن كذلك ننتقل إلى حل آخر أفضل منه,

ويتم تكرار هذه الخطوة حتى نصل إلى نهاية الحل الأمثل,

2- خطوات حل مسائل البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس (simplex) في حالة تعظيم "Max":

$$MaxZ = \sum_{j=1}^{n} C_i X_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leq b_i$$

$$0 x_j \geq 0, b_i \geq$$

$$i = 1, \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots, m$$

ومن أجل أي نموذج خطي الذي تكون كل قيوده الفنية من الشكل أصغر أو تساوي (≤) يجب اتباع الخطوات التالية: (علي، 2015، الصفحات 51-56)

-**الخطوة الأولى:** تحويل قيود النموذج الخطي من شكل متراجحات (متباينات) إلى شكل معادلات (مساواة)، ولتحويل أي نموذج خطي من شكل لا مساواة إلى مساواة نفترض متغيرات جديدة، نسميها متغيرات **الفوارق** "les variable d'ecart" ويرمز لها بالرمز "S_i".

فإذا كان الطرف الأيسر من القيد الفني أصغر أو يساوي ($\leq$) الطرف الأيمن، وهو $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leq b_i$ فإنه لكي يصبح الطرفان متساويان يلزم أن نضيف إلى الطرف الأيسر متغير الفوارق "S_i"، أي $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i$ وبالتالي فإن النموذج الخطي من الشكل:

$$MaxZ = \sum_{j=1}^{n} C_i X_i$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leq b_i$$
$$x_j \geq 0, b_i \geq$$
$$i = 1, \dots \dots \dots \dots \dots \dots, m$$

يتحـــول إلـــى

$$MaxZ = \sum_{j=1}^{n} C_i X_i$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i$$
$$;x_j \geq 0, b_i \geq 0, S_i \geq 0$$
$$i = 1, \dots \dots \dots \dots \dots \dots, m$$

متغيرات الفوارق "S_i" تمثل موارد عاطلة، أي الموارد التي لم ولازالت لم تستعمل بعد.

وحتى تصبح كل المتغيرات ممثلة في جميع معادلات النموذج الرياضي الخطي فإننا نضيف الفرق بمعامل صفر إلى دالة الهدف، فهذه المتغيرات لا تضيف أي شيء إلى دالة الهدف، وبالتالي فمعاملاتها فيها تساوي الصفر، لأن هذه المتغيرات غير ممثلة أصلاً في دالة الهدف.

وتصبح دالة الهدف كالتالي:

$$MaxZ = \sum_{j=1}^{n} C_i X_i + 0S_1 + 0S_2 + \cdots \cdots \cdots 0S_n$$

إن التعامل مع المعادلات أفضل بكثير من التعامل مع علاقات المتباينات ويطلق على مجموعة المعادلات السابقة بـ: "الصيغة القياسية لمسألة البرمجة الخطية" التي تتكون من "m" من القيود و "n" من متغيرات القرار (السيد و اللطيف، 2008، صفحة 315).

-**الخطوة الثانية: وهي تمثيل كل المعلومات الخاصة بالنموذج الخطي في الجدول التالي:**

الحل b_i	متغيرات الفوارق	المتغيرات الأساسية (متغيرات القرار)	دالة الهدف	
	$S_1, S_2, \cdots\cdots S_m$	$x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$	متغيرات دالة الهدف	
	$0,0, \cdots\cdots 0$	$c_1, c_2, \cdots\cdots c_m$	معاملات متغيرات دالة الهدف	
				متغيرات قاعدة الحل
b_1	$1,0,0, \cdots\cdots 0$	$a_{11}, c_{12}, \cdots\cdots c_{1n}$	معاملات متغيرات القيود الفنية	S_1
b_2	$1,0,0, \cdots\cdots 0$	$a_{21}, c_{22}, \cdots\cdots c_{2n}$		S_2
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$	$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$	$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$		$\cdots$
b_m	$0,0,0, \cdots\cdots 1$	$a_{m1}, c_{m2}, \cdots\cdots c_{mn}$		S_n

ويمكن تبسيط الجدول بالرموز كما يلي:

c_j		c_1	c_{2j}	$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots c_n$	b_i	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
c_j	v_b	x_1	x_2	$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots x_n$		
.	s_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a_{1n}$	b_1	.
.	s_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a_{2n}$	b_2	.
.	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a_{3n}$	$\cdots$	.
.	s_n	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a_{mn}$	b_n	.
z_i		z_1	z_2	$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots z_n$		
$c_j - z_i$		$-z_1 c_1$	$-z_2 c_2$	$-z_n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots c_n$		

حيث:

c_j : معاملات متغيرات في دالة الهدف؛

a_{ij}: معاملات المتغيرات في القيود

b_i : الطرف الأيمن للقيود (الموارد)

v_b : متغيرات الفوارق (تكتب في جدول السمبلاكس حسب ترتيبها في القيود)

-الخطوة الثالثة : تتمثل في مرحلة الحل الإبتدائي أو البحث عن القاعدة التي ننطلق منها في البحث عن الحل الأمثل، وهي تعني بالنسبة للنشاط الاقتصادي تلك المرحلة التي تكون فيها المؤسسة الاقتصادية قد أعدت كل وسائل الإنتاج المطلوبة لممارسة نشاطها لكنها لازالت لم تبدأ بعد ممارسة هذا النشاط، فإذا كانت المؤسسة لازالت لم تبدأ بعد في ممارسة نشاطها، فهذا يعني أن مؤشرات هذا النشاط (مؤشرات القرار) هي عند المستوى صفر $x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots x_n = 0$؛ أي أننا نجعل عداد النشاط عند المستوى صفر، فإذا كانت مؤشرات القرار في دالة الهدف تساوي الصفر ومتغيرات الفرق معاملاتها هي صفر، فإن دالة الهدف في هذه الحالة تساوي صفر وهي تتناسب مع مرحلة ما قبل بداية النشاط.

بالنسبة للقيود الفنية، إذا كانت متغيرات القرار تساوي صفر، فعند ضربها في معاملاتها تكون المحصلة كلها صفر وتبقى متغيرات الفرق وهي $(s_1, s_2, \cdots\cdots s_n)$ تساوي كمية الموارد المتوفرة وهي $(b_1, b_2, \cdots\cdots b_n)$، فإذا كان النموذج الخطي معبر عليه كما يلي:

$$Max z = c_1 \cancel{x_1 + c_2 x_2 \cdots\cdots c_n x_n} \qquad 0s_1 + 0s_2 + \cdots + 0s_n$$

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n \quad & +s_1 \quad = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2n}x_n \quad & +s_2 \quad = b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad & \cdots \quad \cdots\cdots \\
a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + a_{mn}x_n \quad & +s_m \quad = b_2
\end{aligned}$$

واعتبرنا أن متغيرات النشاط "$X_j = 0$" تساوي الصفر ومتغيرات الفوارق معاملاتهم في دالة الهدف تساوي 0، فإن النموذج السابق يصبح كالتالي:

$$\begin{aligned}
s_1 \quad & = b_1 \\
s_2 \quad & = b_2 \\
s_m \quad & = s_m
\end{aligned}$$

هذا هو **الحل الابتدائي** لهذا النموذج والذي يتناسب مع مرحلة ما قبل النشاط قبل المرور إلى مرحلة البحث عن **الحل الأمثل,**

عند ملأ جداول السمبلكس يجب الأخذ بعين الاعتبار الملاحظات التالي:

- في السطر الثاني تكتب جميع المتغيرات الموجودة في الصيغة القياسية ابتداء من متغيرات القرار $(X_1, X_2 \ldots X_n)$ ثم متغيرات الفوارق $(S_1, S_2 \cdots S_n)$، ويكتب فوق كل متغير معامله في دالة الهدف.

- في عمود متغيرات الفوارق $(S_1, S_2 \cdots S_n)$ تكتب جميعها حسب ترتيبها في القيود؛

- بالنسبة لقيمة $(Z_1, Z_2 \cdots ZS_n)$ تحسب من خلال مجموع ضرب "c_j" في العمود الأول بقيم "a_{ij}" المقابلة لها في كل عمود؛

- من أجل قبول الحل الإبتدائي يجب أن تكون دالة الهدف عند المستوى صفر (وهي قيمة تتناسب مع مرحلة ما قبل أن تبدأ المؤسسة نشاطها)؛

- من أجل قبول الحل الإبتدائي يجب أن تكون هذه المعاملات في بينها مصفوفة واحدة:

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \cdots 0 \\ \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \\ 000 \cdots 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

-الخطوة الرابعة : تتمثل في البحث عن الحل الأمثل (تحسين الحل) حيث نبدأ في تجريب متغيرات القرار وذلك بإدخالها واحدًا بعد الآخر إلى قاعدة الحل في مكان متغيرات الحل الإبتدائي ونرى مدى تأثيرها على دالة الهدف "Max" وتتم بالمراحل التالية:

المرحلة الأولى: تحديد المتغيرة الداخلة: **وهي المتغيرة التي لها أكبر قيمة موجبة في السطر $((c_j - z_i))$ أو أقل قيمة سالبة، وفي حالة تساوي القيمتين يتم إختيار المتغيرة الداخلة بطريقة عشوائية، ويسمى عمودها بـ: "عمود الدوران"،**

المرحلة الثانية: تحديد المتغيرة الخارجة: **إن إدخال متغيرة إلى قاعدة الحل يتطلب علينا إخراج آخر من متغيرات الحل الإبتدائي (متغيرات الفوارق $S_1, S_2, \cdots \cdots S_n$) من أجل الحفاظ على بعد المصفوفة الأحادية، ويسمى سطها بـ: "سطر الدوران" ويتم تحديد المتغيرة الخارجة كما يلي:**

*** تقسيم عناصر عمود "b_i" على العناصر المقابلة لها في عمود المتغيرة الداخلة (عمود الدوران) مع استثناء القيم السالبة والصفرية بمعنى: $\frac{b_1}{a_{1j}}, \frac{b_2}{a_{2j}}, \cdots \cdots \cdots \cdots \frac{b_m}{a_{mj}}$، وتقارن النتائج وتكون المتغيرة الخارجة التي لها أقل حاصل أي قسمة $Min\left(\frac{b_i}{a_{ij}}\right)$، بمعنى نخرج متغير الحل الإبتدائي $(s_1, s_2 \cdots \cdots s_n)$ الذي يقابله أقل قيمة غير سالبة من بين القيم السابقة ويسمى سطر المتغيرة الخارجة بـ: "سطر الدوران".**

المرحلة الثالثة: تحديد نقطة المحور (نقطة الإرتكاز "Pivot"): وهي القيمة أو العنصر الذي يتقاطع عنده عمود المتغيرة الداخلة وسطر المتغيرة الخارجة؛ أي تقاطع عمود الدوران مع سطر الدوران.

المرحلة الرابعة: تحديد نقطة المحور (نقطة الإرتكاز "Pivot"): وهي القيمة أو العنصر الذي يتقاطع عنده عمود المتغيرة الداخلة وسطر المتغيرة الخارجة؛ أي تقاطع عمود الدوران مع سطر الدوران.

-الخطوة الخامسة : الإنتقال إلى جدول جديد، ويتم ذلك من خلال المراحل التالية:

* استبدال المتغيرة الخارجة بالمتغيرة الداخلة؛

* تقسيم جميع قيم سطر الدوران على نقطة الإرتكاز "Pivot"؛

* تستبدل عناصر محور الدوران بالصفر "0" ما عدا نقطة الإرتكاز فتستبدل "1"؛

* باقي العناصر والقيم تعد قيم جديدة وتحسب بالقانون التالي:

القيمة الجديدة = القيمة القديمة - (القيمة المقابلة في سطر الدوران × القيمة المقابلة في عمود الدوران) / نقطة الإرتكاز "Pivot"

* حساب قيم السطر (z_i)، $(C_j - Z_i)$؛

-**الخطوة السادسة : الحصول على الحل الأمثل:** نتوصل إلى الحل الأمثل في حالة دالة الهدف من نوع "MaxZ" عندما تكون جميع قيم السطر $(C_j - Z_i)$ سالبة أو معدومة.

في حالة قيمة واحدة على الأقل في السطر $(C_j - Z_i)$ موجبة نعيد خطوة تحسين الحل من جديد أي أنَّ هناك إمكانية لزيادة دالة الهدف.

3- حل مسائل البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس (simplex) في حالة تعظيم "Max" (مثال تطبيقي):

مؤسسة إنتاجية تنتج أربع منتجات $((A_1, A_2, A_3, A_4))$ باستعمالها لثلاث مواد أولية $((b_1, b_2, b_3))$، الكميات من المواد الثلاثة اللازمة لإنتاج وحدة واحدة من كل منتج من المنتجات السابقة معطاة في الجدول التالي، كذلك في الجدول الربح الذي تحصل عليه المؤسسة من بيع كل وحدة واحدة من المنتجات الأربعة المذكورة

الكمية القصوى المتاحة من المواد الأولية	المنتجات A_4	A_3	A_2	A_1	المواد الأولية المستعملة
1000	7	4	1	2	m_1
200	7	2	5	0	m_2
2000	13	6	3	4	m_3
	1	10	2	5	الربح الوحدوي

المطلوب:

- قم بصياغة النموذج الرياضي لمسألة البرمجة الخطية ثم أوجد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من المنتجات الثلاثة إذا أرادت المؤسسة تعظيم أرباحها؟

الحل:

من خلال المسألة نلاحظ أن المؤسسة ترغب في إنتاج أربع منتجات وتكون بذلك متغيرات القرار كما يلي:

x_1: عدد وحدات المنتج الأول؛

x_2: عدد وحدات المنتج الثاني.

x_3: عدد وحدات المنتج الثالث.

x_4: عدد وحدات المنتج الثالث.

* دالة الهدف من نوع تعظيم : استعاب المبنى أكبر عدد من السكان إذن دالة الهدف هي تعظيم وتظهر بالشكل التالي:

$$MaxZ = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + C_4x_4 = 5x_1 + 2x_2 + 10x_3 + x_4$$

***القيود: تظهر لنا في المسألة ثلاثة قيود:**

قيد المادة الأولية m_1: $2x_1 + x_2 + 4x_3 + 7x_4 \leq 1000$

قيد المادة الأولية m_2: $0x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 7x_4 \leq 200$

قيد المادة الأولية m_3: $4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 13x_4 \leq 2000$

شرط عدم السلبية: $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

ومنه يظهر النموذج بالشكل التالي:

$$MaxZ = 5x_1 + 2x_2 + 10x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 7x_4 \leq 1000 \\ 0x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 7x_4 \leq 200 \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 13x_4 \leq 2000 \\ \qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

حل النموذج بطريقة السمبلكس:

1- تحويل المتراجحات إلى معادلات: لحل هذا النموذج بطريقة السمبلكس نحول شكل القيود الفنية من متراجحات إلى معادلات وذلك بإضافة متغيرات الفوارق $(S_1, S_2 S_3)$ بعدد القيود إلى طرفها الأيسر وإضافتها بما أن (جميع القيود $(\leq)$ أقل أو تساوي وأيضًا بمعاملات صفر إلى دالة الهدف ، ويظهر النموذج بشكله القياسي كما يلي:

$$MaxZ = 5x_1 + 2x_2 + 10x_3 + x_4 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 0s_2 + S_1 + 0S_3 = 1000 \\ 0x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 0s_1 + s_2 + 0S_3 = 200 \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 13x_4 + 0s_1 + 0S_2 + 0S_3 = 2000 \\ \qquad x_1, x_2, x_3, x_{4,} s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

2- تكوين جدول الحل الإبتدائي (الجدول الأول): يظهر كما يلي:

c_j		5	2	10	1	0	0	0	b_i	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
c_j	v_b	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3		
0	s_1	**2**	**1**	4	7	1	0	**0**	**1000**	$\frac{1000}{4} = 250$
0	s_2	0	5	2	7	0	1	0	200	$100\frac{200}{2} =$
0	s_3	4	3	6	13	0	0	**1**	**2000**	$\frac{2000}{6} = 333,4$
z_i		0	0	0	0	0	0	**0**		
$c_j - z_i$		**-5**	**-2**	-10	-1	0	0	**0**		

يتناسب الحل الإبتدائي مع مرحلة ما قبل النشاط، أي المرحلة التي تبدأ المؤسسة فيها النشاط بعد، وبالتالي تكون متغيرات القرار المعبرة عن كميات الإنتاج ن المنتجات الأربعة تساوي الصفر ($x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$)وعندما تكون الكميات المنتجة تساوي الصفر فإن دالة الهدف وهي دالة أرباح المؤسسة تساوي 0 أيضًا ومن هنا يصبح الحل الابتدائي يتكون من متغيرات الفوارق (s_1,s_2,s_3) وقيمتها على التوالي $(s_1 = 1000, s_2 = 200, s_3 = 2000)$.

3- البحث عن الحل الأمثل (تحسين الحل): إن الحل الأولي ما هو إلا حل يتم الانطلاق منه للحصول على الحل الأمثل ولتحسين الحل يتم تحسين العناصر التالية:

* **المتغيرة الداخلة:** تختار من السطر $(C_j - Z_i)$ المتغيرة التي تقابلها أكبر قيمة موجبة أو أقل قيمة سالبة وهي "10" وهي تقابل "x_3"، إذن: x_3: متغيرة خارجة.

* **المتغيرة الخارجة:** هي المتغيرة التي تقابلها أقل قيمة لحاصل قسمة $\left(\frac{b_i}{a_{ij}}\right)$ أي **قسمة العمود "b_i" على قيم المتغيرة الداخلة "a_{ij}"** أي: $\frac{b_1}{a_{13}}, \frac{b_2}{a_{23}}, \frac{b_3}{a_{33}} \rightarrow \frac{1000}{4} = 250, \frac{200}{2} = 100, \frac{2000}{6} = 333,4$، وأصغر قيمة غير سالبة هي القيمة **"100"** وهي موجود في السطر الثاني وتقابل "S_2" فهي إذن متغيرة خارجة لتخرج وتترك مكانها لـ: "x_3".

* نقطة الإرتكاز "**Pivot**": وهي النقطة التي تتقاطع فيها سطر الدوران (المتغيرة ة الخارجة) مع عمود الدوران (المتغيرة الداخلة) وهي القيمة **"2"**.

c_j		5	2	**10**	1	0	0	**0**	b_i	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
c_j	V_b	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3		
0	s_1	**2**	**1**	**4**	7	1	0	**0**	**1000**	$\frac{1000}{4} = 250$
0	s_2	**0**	**5**	2	**7**	**0**	**1**	**0**	**200**	$\frac{200}{2} = 100$
0	s_3	4	3	**6**	13	0	0	**1**	**2000**	$\frac{2000}{6} = 333,4$
z_i		0	0	**0**	0	0	0	**0**		
$c_j - z_i$		-5	-2	**-10**	-1	0	0	**0**		

سطر المحور

المتغيرة خارجة تقابل أقل قيمة $\left(\frac{b_i}{a_{ij}}\right)$

عمود الدوران

المتغيرة الداخلة: أكبر قيمة موجبة و أقل قيمة سالبة

نقطة الارتكاز: تقاطع سطر الدوران مع عمود الدوران

في مرحلة ثانية يتم تقسيم جميع قيم سطر الدوران ابتداء من القيمة "b_i" إلى غاية آخر متغير في الجدول على نقطة الإرتكاز "2" حيث يضم السطر القيم التالية (7،2،5،0،0،1،0)، بالإضافة إلى استبدال قيم سطر عمود الدوران بصفر "0" ما عدا نقطة الإرتكاز تستبدل بـ: "1" ونتحصل على الجدول التالي:

c_j		**5**	**2**	**10**	1	0	0	**0**	b_i	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
c_j	V_b	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3		

0	S_1	?	?	**0**	?	?	?	?	?	
10	X_3	$\frac{0}{2}=0$	$\frac{5}{2}$	**1**	$\frac{7}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{200}{2}$	
0	S_3	?	?	**0**	?	?	?	?	?	
Z_i		?	?	**0**	?	?	?	?		
$c_j - z_i$		?	?	**0**	?	?	?	?		

في مرحلة ثانية يتم حساب باقي عناصر الجدول، وذلك بتطبيق القاعدة التالية:

القيمة الجديدة = القيمة القديمة - $\dfrac{\text{القيمة المقابلة في سطر الدوران} \times \text{القيمة المقابلة في عمود الدوران}}{\text{نقطة الإرتكاز "Pivot"}}$

والنتائج تكون في الجدول الموالي:

حساب عناصر السطر الأول	رقم العنصر	حساب عناصر الصف الثاني
$2-\dfrac{4\times 0}{2}=2$	العنصر الاول	$4-\dfrac{4\times 0}{2}=4$
$4-\dfrac{4\times 5}{2}=-9$	العنصر الثاني	$3-\dfrac{6\times 5}{2}=-12$
$7-\dfrac{7\times 4}{2}=-7$	العنصر الثالث	$13-\dfrac{7\times 6}{2}=-8$
$1-\dfrac{0\times 4}{2}=1$	العنصر الرابع	$0-\dfrac{6\times 0}{2}=0$
$0-\dfrac{4\times 1}{2}=-2$	العنصر الخامس	$0-\dfrac{6\times 1}{2}=-3$
$0-\dfrac{4\times 0}{2}=0$	العنصر السادس	$1-\dfrac{0\times 6}{2}=1$
$1000-\dfrac{200\times 4}{2}=600$	العنصر السابع	$2000-\dfrac{200\times 6}{2}=1400$

ويكون الجدول الثاني للسمبلاكس بالشكل الثاني:

c_j		5	2	**10**	1	0	0	**0**	b_i	$\dfrac{b_i}{a_{ij}}$
c_j	V_b	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	**2**	-9	**0**	-7	1	-2	**0**	**600**	
10	X_3	**0**	$\frac{5}{2}$	**1**	$\frac{7}{2}$	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{200}{2}$	
0	S_3	**4**	-12	**0**	-8	0	-3	1	1400	
$=1000Z_i$		?	?	**0**	?	?	?	?		
$c_j - z_i$		?	?	**0**	?	?	?	?		

وفي مرحلة رابعة نقوم بحساب "Z_i" من خلال جمع حاصل ضرب قيم العمود "C_j" في العمود المقابل لها كما يلي:

$$z_i = 0\times 600 + 10\times 100 + 0\times 1400 = 1000$$

$$z_1 = 0\times 2 + 10\times 0 + 0\times 0 = 0$$

$$z_2 = 0 \times -9 + 10 \times \frac{5}{2} + 0 \times -12 = 25$$

$$z_3 = 0 \times 0 + 10 \times 1 + 0 \times 0 = 0$$

$$z_4 = 0 \times 2 + 10 \times 0 + 0 \times 0 = 0$$

$$z_5 = 0 \times 1 + 10 \times 0 + 0 \times 0 = 0$$

$$z_6 = 0 \times -2 + 10 \times \frac{1}{2} + 0 \times -3 = 5$$

$$z_7 = 0 \times 0 + 10 \times \frac{0}{2} + 0 \times 1 = 0$$

ثم يتم حساب $\left(C_j - Z_i\right)$ من خلال طرح قيم السطر الأول من الجدول من السطر المقابل فنحصل على الجدول التالي:

c_j		5	2	10	1	0	0	0	b_i	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
c_j	v_b	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3		
0	s_1	2	-9	0	-7	1	-2	0	600	
10	x_3	0	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	100	
0	s_3	4	-12	0	-8	0	-3	1	1400	
$=1000 Z_i$		0	25	10	35	0	5	O		
$c_j - z_i$		5	-23	0	-34	0	-5	0		

وبهذا نكون قد أكملنا الانتقال إلى جدول السمبلاكس الجديد.

- الحصول على الأمثل: من خلال الجدول أعلاه (الجدول02) نلاحظ أن الحل المتوصل إليه يتمثل في $(x_3 = 100)$ وهذا يعني إنتاج المنتج الثالث وعدم إنتاج المنتجات الأخرى "$x_1 = x_2 = x_3 = 0$" وتحقيق ربح قدره "$z_i = 1000$" مع استغلال مادة أولية قيمتها "$S_2 = 1400$"، "$S_1 = 600$" لكن السؤال الذي يطرح نفسه **هل الحل هو حل أمثل أم لا؟**. فقد ذكرنا سابقا لنتح**صل على الحل الأمثل في طريقة السمبلاكس في حالة دالة هدف من "Max" إذا كانت جميع قيم السطر $(c_j - z_i)$ سالبة أو معدومة**، فمن خلال الجدول أعلاه نلاحظ أن قيم السطر "$c_j - z_i$" سالبة ومعدومة ما عدا قيمة واحدة وهي "5" المقابلة للمتغيرة "x_1" ومنه الحل المتوصل إليه ليس أمثلاً ، ولا بد من إعادة تحسين الحل.

ولتحسين الحل للمرة الثانية نقوم بتكرار نفس الخطوات **(متغيرة داخلة، متغيرة خارجة، نقطة إرتكاز)** وبنفس الترتيب,

c_j		5	2	10	1	0	0	0	b_i	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
c_j	v_b	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3		
0	s_1	2	-9	0	-7	1	-2	0	600	$\frac{600}{2} = 300$
15	x_3	0	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	100	$\frac{100}{0} =$ ت ع ح
0	s_3	4	-12	0	-8	0	-3	1	1400	$\frac{1400}{4} = 350$
z_i		0	25	10	35	0	5	O		
$c_j - z_i$		5	-23	0	-34	0	-5	0		

سطر المحور

المتغيرة خارجة تقابل أقل قيمة $\left(\frac{b_i}{a_{ij}}\right)$

نقطة الارتكاز: تقاطع سطر الدوران مع عمود الدوران

المتغيرة الداخلة: أكبر قيمة موجبة و أقل قيمة سالبة

عمود الدوران

ويتم الإنتقال إلى جدول ثالث جديد ويكون كما يلي:

c_j		5	2	10	1	0	0	0	b_i
c_j	V_b	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
5	x_1	**1**	$-\frac{9}{2}$	**0**	$-\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	**-1**	**0**	**300**
10	x_3	**0**	$\frac{5}{2}$	**1**	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	**0**	**100**
0	s_3	**0**	6	**0**	6	-2	$\frac{9}{2}$	1	200
=2500Z_i		**0**	$\frac{5}{2}$	**10**	$\frac{35}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	
$c_j - z_i$		**0**	$-\frac{1}{2}$	**0**	$\frac{-33}{2}$	$\frac{-5}{2}$	0	0	

من خلال ملاحظة السطر "$c_j - z_i$" نلاحظ أن جميع القيم سالبة ومعدومة، وبذلك قد نكون وصلنا إلى الحل الأمثل الذي عناصره $(x_1 = 300, x_2 = 0, x_3 = 100, x_4 = 0)$، و $(s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 200)$ ، (=2500Z_i)

ويعني إقتصاديا أن المؤسسة تنتج 300 وحدة من المنتج الأول، و100 وحدة من المنتج الثالث وعدم إنتاج المنتج الرابع والثاني وبذلك يمكن تحقيق أكبر ربح ممكن المقدر بـ: 2500 دج