

## Chapitre 3

### Transferts de chaleur par convection.

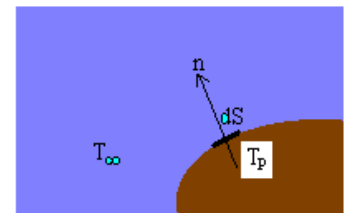
#### 3.1 Introduction

Ce cours a pour objet l'étude des transferts d'énergie thermique au sein des substances physiques solides, liquides ou gazeuses. Il est évident a priori que les interactions d'un flux d'énergie avec cette matière vont dépendre de l'état sous lequel elle se trouve.

#### 3.2 Coefficient d'échange de chaleur par convection

Considérons sur la surface d'un corps solide un élément d'aire  $dS$  à la température  $T_p$ . Si le corps est au contact d'un milieu fluide en mouvement caractérisé par une température  $T_\infty$ , la quantité de chaleur  $dQ$  qui traverse  $dS$  pendant le temps  $dt$  peut s'écrire:

$$d^2Q = h(T_p - T_\infty)dS dt \quad (3.1)$$



Le coefficient  $h$  est la conductance thermique de convection, ou coefficient d'échange thermique par convection. Il s'exprime en  $W/(m^2.K)$ .

Dans la relation (3.1), ci-dessus,  $dQ$  s'exprime en Joules, et  $\frac{d}{dt}(dQ)$  en Watts.

Tout calcul d'échange thermique par convection nécessite la détermination du coefficient  $h$ , ce qui est toujours une affaire compliquée, car le transfert de chaleur par convection est complexe. Il résulte de la superposition de deux phénomènes différents:

- conduction entre les particules de fluide qui se rencontrent;
- mélange de ces particules par suite du mouvement d'ensemble du fluide.

De plus, l'échange de chaleur peut être accompagné d'un changement de phase (condensation ou évaporation).

On est donc amené à distinguer au moins trois types de problèmes que nous étudierons successivement:

- L'échange thermique monophasique en convection forcée.
- L'échange thermique monophasique en convection naturelle.
- L'échange thermique accompagné d'ébullition ou de condensation.

Selon les cas, on peut faire appel à une ou plusieurs des méthodes d'étude suivantes:

- L'analyse dimensionnelle combinée avec des résultats expérimentaux;
- La recherche de solutions analytiques (dans le cas relativement simple du régime laminaire) ou numériques (dans le cas général) des équations générales de conservation;
- La formulation d'analogies entre le transfert de quantité de chaleur et le transfert de quantité de mouvement (essentiellement dans le cas du régime turbulent).

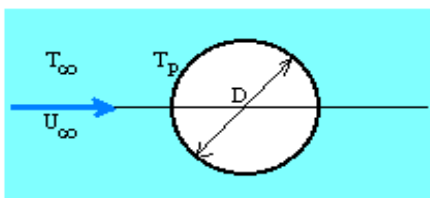
Dans le cadre de ce cours d'initiation aux transferts thermiques, nous nous limiterons à la première de ces trois approches, qui permet de traiter la plupart des problèmes pratiques qui peuvent se poser à un non spécialiste en matière d'échanges convectifs.

### 3.3 Transfert de chaleur par convection forcée sans changement d'état

Ce cas se rencontre très fréquemment en pratique industrielle dans les échangeurs thermiques de tous genres.

#### 3.3.1 Analyse dimensionnelle

Nous introduirons les notions essentielles concernant la convection forcée en analysant le cas particulier de l'échange de chaleur entre une conduite cylindrique à section circulaire de diamètre  $D$  supposée infiniment longue (un tuyau), et un fluide extérieur à tempé-



rature constante  $T_{\infty}$  arrivant à vitesse constante  $U_{\infty}$  perpendiculairement à l'axe du tuyau.

Le problème consiste à préciser l'expression du flux thermique  $\Phi$  échangé entre le fluide extérieur à la température  $T_{\infty}$  et une longueur unité de la surface du tuyau à la température  $T_p$ .

De fait, on recherche une formulation pour le coefficient d'échange thermique par convection  $h$ , auquel le flux thermique échangé  $\Phi$  est lié par la relation introduite en (3.1) et qu'on peut écrire dans le cas présent:

$$\Phi = h (T_p - T_\infty) \pi D \tag{3.2}$$

L'analyse dimensionnelle de ce problème a comme point de départ l'inventaire exhaustif des grandeurs physiques mises en jeu, qui sont récapitulées dans le tableau ci-dessous:

<i>Grandeurs</i>	<i>Symbole</i>	<i>Unité S.I.</i>	<i>Équation aux dimensions</i>
<i>Diamètre du tuyau</i>	<b>D</b>	<b>m</b>	<b>L</b>
<i>Vitesse du fluide</i>	<b>U<sub>∞</sub></b>	<b>m/s</b>	<b>LT<sup>-1</sup></b>
<i>Masse volumique du fluide</i>	<b>ρ</b>	<b>kg/m<sup>3</sup></b>	<b>ML<sup>-3</sup></b>
<i>Viscosité dynamique du fluide</i>	<b>μ</b>	<b>kg/(m.s)</b>	<b>ML<sup>-1</sup>T<sup>-1</sup></b>
<i>Conductivité thermique du fluide</i>	<b>λ</b>	<b>W/(m.K)</b>	<b>MLT<sup>-3</sup>θ<sup>-1</sup></b>
<i>Capacité thermique massique du fluide</i>	<b>C</b>	<b>J/(kg.K)</b>	<b>L<sup>2</sup>T<sup>-2</sup>θ<sup>-1</sup></b>
<i>Coefficient d'échange convectif</i>	<b>h</b>	<b>W/(m<sup>2</sup>.K)</b>	<b>MT<sup>-3</sup>θ<sup>-1</sup></b>
<i>Écart de température</i>	<b>T<sub>p</sub> - T<sub>∞</sub></b>	<b>K</b>	<b>θ</b>

Ce problème met en jeu huit grandeurs physiques et quatre dimensions. Le théorème de VASCHY-BUCKINGHAM permet donc de prévoir que la forme la plus générale de la loi physique décrivant le phénomène étudié s'écrira:

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = 0 \tag{3.3}$$

relation dans laquelle  $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$  désignent 4 produits sans dimension pouvant être constitués au moyen des 8 grandeurs physiques considérées.

Recherchons ces groupements en posant:

$$\pi = D^a \lambda^b U_\infty^c \rho^d \mu^e C^f h^g (T_p - T_\infty)^i \tag{3.4}$$

relation dans laquelle a, b, c, d, e, f, g, i sont 8 coefficients arbitraires.

L'équation aux dimensions d'un groupement  $\pi$  s'écrit:

$$[\pi] = [M]^{b+d+e+g} [L]^{a+b+c-3d-e+2f} [T]^{-3b-c-e-2f-3g} [\theta]^{-b-f-g+i}$$

Le groupement  $\pi$  devant être sans dimension, on doit donc respecter les 4 conditions exprimées par le système des 4 équations linéaires à 8 inconnues suivantes:

$$\begin{aligned} b + d + e + g &= 0 \\ a + b + c - 3d - e + 2f &= 0 \\ -3b - c - e - 2f - 3g &= 0 \\ -b - f - g + i &= 0 \end{aligned}$$

Toute solution de ces équations est une série d'exposants donnant un produit sans dimension  $\pi$ .

Le système linéaire ci-dessus possède 4 solutions linéairement indépendantes (à condition que la matrice des coefficients soit bien de rang 4), qui correspondent aux 4 produits sans dimension prévus par le théorème de VASCHY-BUCKINGHAM.

En choisissant arbitrairement 4 des 8 coefficients, les 4 autres seront alors fournis par la résolution du système ci-dessus, ce qui conduira à *un groupement  $\pi$  sans dimension*. En fixant par exemple de manière parfaitement arbitraire:

$$c = 0 \quad d = 0 \quad g = 1 \quad i = 0$$

le système précédent se réduit à:

$$\begin{aligned} b + e &= -1 \\ a + b - e + 2f &= 0 \\ -3b - e - 2f &= 3 \\ -b - f &= 1 \end{aligned}$$

qui admet la solution:  $a = 1 \quad b = -1 \quad e = 0 \quad f = 0$

Cette solution met en évidence le groupement sans dimension:

$$\pi_1 = \frac{h D}{\lambda} \quad (3.5)$$

Ce nombre sans dimension est appelé *le Nombre de Nusselt*. On le note  $N_u$

Trois autres combinaisons arbitraires de coefficients sont encore possibles, conduisant de même à introduire les groupements sans dimensions:

$$\pi_2 = \frac{\rho U_\infty D}{\mu} \quad (3.6)$$

On reconnaît le **Nombre de Reynolds**  $R_e$  introduit dans le Cours de Mécanique des Fluides.

Le suivant se présente sous la forme:

$$\pi_3 = \frac{\mu C}{\lambda} \quad (3.7)$$

Ce nombre sans dimension est appelé **le Nombre de Prandtl**. On le note  $P_r$ .

Enfin, le dernier groupement possible s'écrit:

$$\pi_4 = \frac{U_\infty^2}{C \Delta T} \quad (3.8)$$

Ce dernier nombre sans dimension est appelé **le Nombre d'Eckert**. On le note  $E_c$ .

La forme la plus générale de la loi physique décrivant le problème de convection forcée étudié s'écrira donc en définitive:

$$N_u = f(R_e, P_r, E_c) \quad (3.9)$$

avec:

$$N_u = \frac{h D}{\lambda} \quad R_e = \frac{\rho U_\infty D}{\mu} \quad P_r = \frac{\mu C}{\lambda} \quad E_c = \frac{U_\infty^2}{C \Delta T} \quad (3.10)$$

Le Nombre de Nusselt  $N_u$  n'est autre que le coefficient d'échange thermique par convection  $h$  mis sous forme adimensionnelle. C'est le rapport du flux thermique  $\Phi$  transmis par convection:

$$\Phi = h (T_p - T_\infty) S$$

à un flux thermique de référence  $\Phi_r$ , qui est pris égal au flux de chaleur qui serait transmis par conduction à travers le fluide, avec un gradient de température  $(T_p - T_\infty)/D$ . Un tel flux de chaleur conduit serait donné par la loi de Fourier:

$$\Phi_r = \varphi S = - \lambda S \text{grad} \bar{T} = \lambda S \frac{(T_p - T_\infty)}{D}$$

Le rapport de ces deux flux de chaleur conduit alors à:

$$N_u = \frac{h(T_p - T_\infty)S}{\lambda S \frac{(T_p - T_\infty)}{D}} = \frac{hD}{\lambda} \quad (3.10.a)$$

L'interprétation du Nombre de Reynolds  $R_e$  est développée dans le Cours de Mécanique des Fluides.  $R_e$  est le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité, dans l'écoulement considéré. En effet, on peut toujours représenter la vitesse du fluide en un point de l'écoulement sous la forme  $U_\infty u(y)$ ,  $u(y)$  étant une fonction sans dimensions. L'accélération du fluide est alors proportionnelle à  $U_\infty^2 \frac{\partial u}{\partial y}$  et les forces d'inertie au produit  $\rho D^3 U_\infty^2 \frac{\partial u}{\partial y}$ .

De même, les forces de viscosité sont proportionnelles à  $D^2 \mu U_\infty \frac{\partial u}{\partial y}$ , de sorte que le Nombre de Reynolds  $R_e$  est le rapport suivant:

$$R_e = \frac{\rho D^3 U_\infty^2 \frac{\partial u}{\partial y}}{D^2 \mu U_\infty \frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{\rho U_\infty D}{\mu} \quad (3.10.b)$$

Le Nombre de Prandtl est le rapport de la viscosité cinématique  $\mu/\rho$  à la diffusivité thermique  $a = \lambda / \rho C$ :

$$P_r = \frac{\mu/\rho}{\lambda/\rho C} = \frac{\mu C}{\lambda} \quad (3.10.c)$$

Ce nombre de Prandtl caractérise les propriétés thermiques du fluide, en mettant en rapport la distribution de vitesses (gouvernée par la viscosité cinématique) et la distribution de températures (gouvernée par la diffusivité thermique).

Le dernier groupement sans dimension révélé par l'analyse dimensionnelle ci-dessus est le Nombre d'Eckert. On peut montrer que ce Nombre caractérise la dégradation d'énergie mécanique en chaleur, et que tant que les vitesses du fluide demeurent faibles devant la vitesse du son, son importance demeure négligeable.

### 3.3.2 Corrélations expérimentales

Nous venons de voir que la forme la plus générale de la loi physique décrivant un problème de convection forcée s'écrivait:

$$N_u = f (R_e , P_r , E_c ) \quad (3.9)$$

En fait, compte tenu de la remarque concernant le Nombre d'Eckert, on adoptera le plus généralement une relation de la forme:

$$N_u = f (R_e , P_r ) \quad (3.11)$$

Cependant, connaître l'existence d'une telle relation fonctionnelle ne nous permet guère encore de résoudre un problème concret.

Revenons donc sur ce qui doit préoccuper l'ingénieur thermicien en pratique.

D'une façon générale, un problème d'échange de chaleur par convection entre une paroi solide et un fluide adjacent se trouve complètement défini par la connaissance de données de 5 types différents:

1. Une configuration géométrique déterminant les formes, mais pas les dimensions.
2. Une dimension caractéristique, notée  $L$ , servant d'échelle de longueur.
3. L'écart  $T_p - T_\infty$  entre une température de paroi solide  $T_p$  et une température du fluide  $T_\infty$ .
4. La vitesse  $U_\infty$  du fluide loin des parois solides.
5. Les propriétés physiques du fluide:  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $C$ ,  $\lambda$

Il s'agit alors de calculer la quantité de chaleur  $Q$  traversant une aire  $S$  de la paroi solide pendant un intervalle de temps  $\Delta t$ .

On a introduit une représentation adimensionnelle de cette quantité physique  $Q$ . C'est le Nombre de Nusselt  $N_u$ . On sait en outre que ce Nombre de Nusselt  $N_u$  est fonction du Nombre de Reynolds  $R_e$  de l'écoulement considéré, et du Nombre de Prandtl  $P_r$  caractérisant les propriétés thermiques du fluide.

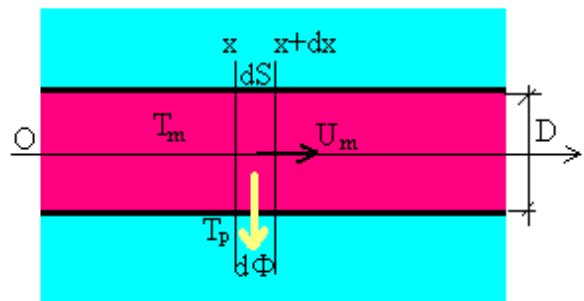
Une telle relation fonctionnelle  $N_u = f (R_e , P_r )$  ne peut pas être établie théoriquement, mais doit être déterminée expérimentalement. De nombreux résultats ont été compilés dans la littérature spécialisée. Ils sont généralement désignés sous l'appellation de « corrélations expérimentales ».

Chaque corrélation expérimentale n'est applicable que pour une configuration géométrique bien déterminée (données de type 1.), pour un fluide donné (données de type 5.), et dans un domaine de variation de température (données de type 3.), et de vitesses du fluide également précisé (données de type 4.).

On trouvera dans les pages qui suivent, une présentation des corrélations expérimentales les plus usuelles en convection forcée.

### 3.3.2.1 Écoulement dans un tube

Un fluide s'écoule en régime permanent dans une conduite cylindrique circulaire de diamètre intérieur  $D$ . Dans une section droite, à l'abscisse  $x$  par rapport à l'entrée de la conduite, la vitesse moyenne du fluide est  $U_m$ , sa température moyenne  $T_m$ , et la température de la paroi  $T_p$ . La corrélation expérimentale indiquée



permet de calculer le flux de chaleur  $d\Phi$  échangé à travers l'aire latérale de paroi  $dS$  comprise entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ :

$$d\Phi = h (T_m - T_p) \pi D dx \tag{3.12}$$

a) Régime turbulent:

Dans le domaine de Nombres de Reynolds défini par:  $10^4 < Re < 1,2 \cdot 10^5$   
on applique la formule de Colburn:

$$N_u = 0,023 P_r^{1/3} R_e^{0,8} \tag{3.13}$$

Il existe deux restrictions au domaine de validité de cette corrélation:

- Le régime d'écoulement dans le tube doit être parfaitement établi, ce qui n'est garanti que si:  $x/D > 60$
- Le fluide doit être tel que son Nombre de Prandtl soit compris entre 0,7 et 100.



## b) Régime d'entrée des tubes

Dans le cas où:  $x/D < 60$ , la corrélation de Colburn doit être corrigée de la manière suivante pour tenir compte de ce que le profil de vitesses du fluide dans le tube ne peut pas encore être complètement établi:

$$N_u = 0,023 P_r^{1/3} R_e^{0,8} \left[ 1 + \left( \frac{D}{x} \right)^{0,7} \right] \quad (3.14)$$

## c) Régime laminaire

Dans le domaine  $R_e < 2000$ , on peut appliquer les corrélations expérimentales de Lévêque, exprimées en fonction du paramètre:

$$A = \frac{1}{R_e} \frac{x}{D}$$

ces corrélations ont pour expressions:

$$N_u = 3,66 \quad \text{pour } A > 0,05 \quad (3.15)$$

$$N_u = 1,06 A^{-0,4} \quad \text{pour } A < 0,05$$

*Exemple pratique:*

Un tuyau de diamètre  $D = 20$  mm transporte un débit  $Q = 0,5$  l/s d'eau à  $50^\circ\text{C}$ .

Déterminer le flux thermique transmis par convection du fluide vers la paroi, par mètre linéaire de conduite, dans le cadre des hypothèses suivantes:

- l'alimentation en eau chaude est telle que la température de celle-ci demeure constante;
- la paroi du tube est suffisamment mince pour qu'on puisse y négliger tout phénomène de conduction;
- la température extérieure du milieu environnant le tube est de  $15^\circ\text{C}$ ;
- l'écoulement est parfaitement établi ( cas du régime permanent dans un tube de grande longueur).

On adoptera les valeurs suivantes pour les propriétés physiques de l'eau:

Masse volumique à $50^\circ\text{C}$ :	$\rho = 988 \text{ kg/m}^3$
Viscosité dynamique à $50^\circ\text{C}$ :	$\mu = 0,55 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$
Conductivité thermique à $50^\circ\text{C}$ :	$\lambda = 0,639 \text{ W/(m.}^\circ\text{C)}$

Capacité thermique massique à 50°C:  $C = 4.184 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$

La vitesse moyenne de cet écoulement est:  $U_m = \frac{Q}{\pi D^2/4} = \frac{0,0005}{0,000314} = 1,59 \text{ m/s}$

Le Nombre de Reynolds a donc pour valeur:  $R_e = \frac{\rho U_m D}{\mu} = \frac{988 \cdot 1,59 \cdot 0,02}{0,55 \cdot 10^{-3}} = 57.124$

Calculons le Nombre de Prandtl du fluide:  $P_r = \frac{\mu C}{\lambda} = \frac{0,55 \cdot 10^{-3} \cdot 4184}{0,639} = 3,60$

L'écoulement est turbulent, et les conditions telles qu'on peut appliquer la formule de Colburn:

$$N_u = 0,023 P_r^{1/3} R_e^{0,8} \quad (3.13)$$

Le résultat obtenu est:

$$N_u = 224 = \frac{h D}{\lambda}$$

ce qui permet de calculer le coefficient d'échange thermique par convection h:

$$h = \frac{\lambda N_u}{D} = \frac{0,639 \cdot 224}{0,02} = 7.156 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$$

La relation de définition du coefficient h:

$$d\Phi = h (T_m - T_p) \pi D dx \quad (3.12)$$

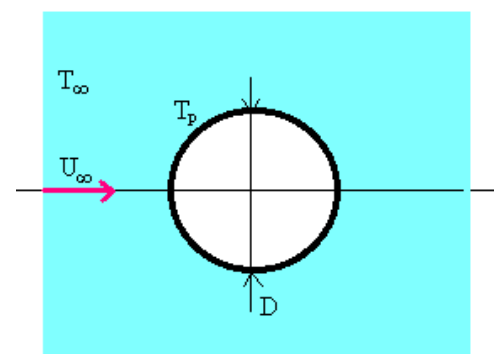
permet alors de déduire la puissance thermique transférée du fluide vers le milieu extérieur, à travers chaque mètre linéaire de tuyau, grandeur exprimée en W/m:

$$W = \frac{d\Phi}{dx} = h (T_m - T_p) \pi D = 15,7 \text{ kW}$$

### 3.3.2.2 Ecoulement autour d'un tube

On considère un tube de diamètre *extérieur* D. Il est baigné dans l'écoulement extérieur d'un fluide circulant perpendiculairement à l'axe du tube. Cet écoulement extérieur est caractérisé à l'infini amont par une vitesse  $U_\infty$  et une température  $T_\infty$ .

Comme il se forme un sillage en aval de l'écoulement, le coefficient de convection h ne sera pas constant sur toute la périphérie du tube.



On déterminera donc un *coefficient de convection moyen* pour l'ensemble du tube, dont la paroi prend une température d'équilibre  $T_p$ .

a) *Cas d'un gaz*

Une corrélation expérimentale a été proposée pour ce type de problème par Hilpert. Elle s'écrit:

$$Nu = A (Re)^m \quad (3.16)$$

Les valeurs du coefficient A et l'exposant m varient avec le Nombre de Reynolds et sont données dans le tableau ci-contre.

$Re$	A	m
$1 < Re < 4$	0,891	0,330
$4 < Re < 40$	0,821	0,385
$40 < Re < 4 \cdot 10^3$	0,615	0,466
$4 \cdot 10^3 < Re < 4 \cdot 10^4$	0,174	0,618
$4 \cdot 10^4 < Re < 4 \cdot 10^5$	0,024	0,805

Si le Nombre de Prandtl ne figure pas dans cette corrélation uniquement applicable au cas des gaz, c'est que pour tous les gaz usuels, le Nombre de Prandtl a une valeur sensiblement constante et voisine de 0,75.

b) *Cas d'un liquide*

La corrélation à appliquer s'écrit alors:

$$Nu = 1,11 A (Re)^m (Pr)^{0,31} \quad (3.17)$$

A et m étant également les valeurs données dans le tableau précédent.

*Application:*

Dans une expérience de physique nucléaire, on irradie un barreau de cuivre de 1 cm de diamètre et de 10 cm de long, en le plaçant dans une pile.

On refroidit ce barreau en le balayant par un courant d'hélium, refroidi préalablement à 77 K, et qui le frappe perpendiculairement avec une vitesse moyenne d'écoulement de 54 m/s. La température de paroi du barreau de cuivre s'établit alors à 80 K.

Déduire de cette mesure de température le dégagement de chaleur (en W/g) qui se produit dans le barreau de cuivre irradié.

On donne les caractéristiques suivantes de l'hélium, à la température considérée:

$$\begin{aligned} \rho &= 0,65 \text{ kg/m}^3 \\ \mu &= 8,5 \cdot 10^{-6} \text{ kg/(m.s)} \\ \lambda &= 0,06 \text{ W/(m.K)} \end{aligned}$$

$$C = 5300 \text{ J/(kg.K)}$$

Le cuivre a une masse volumique de  $8940 \text{ kg/m}^3$

Nous allons utiliser la corrélation (3.16) :  $N_u = A (R_e)^m$ , pour calculer le coefficient de transfert convectif  $h$ .

Commençons par calculer le Nombre de Reynolds de l'écoulement d'hélium:

$$R_e = \frac{\rho U D}{\mu} = \frac{0,65 \cdot 54 \cdot 0,01}{8,5 \cdot 10^{-6}} = 41.294$$

Dans le tableau indiqué précédemment, on lit les valeurs de  $A$  et  $m$  indiquées pour  $R_e < 40000$  et pour  $R_e > 40000$ . Comme on est pratiquement à cette valeur frontière de  $40000$ , on calculera les 2 Nombres de Nusselt possibles, et on prendra la moyenne.

$R_e$	$A$	$m$	$N_u = A (R_e)^m$
$4 \cdot 10^3 < R_e < 4 \cdot 10^4$	0,174	0,618	123,9
$4 \cdot 10^4 < R_e < 4 \cdot 10^5$	0,024	0,805	124,7

Nous aurons donc  $Nu = 124,3 = hD/\lambda$ , d'où on tire la valeur du coefficient  $h$  caractérisant le transfert de chaleur convectif du barreau de cuivre vers l'hélium:

$$h = \frac{\lambda N_u}{D} = \frac{0,06 \cdot 124,3}{0,01} = 746 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K)}$$

Le flux de chaleur transféré par convection à l'hélium est donc:

$$\Phi = h S (T_p - T_\infty) = h \pi D L (T_p - T_\infty) = 746 \cdot 3,14 \cdot 0,01 \cdot 0,10 \cdot (80 - 77) = 7,02 \text{ W}$$

Le barreau de cuivre ayant atteint son équilibre thermique, cette puissance thermique  $\Phi$  extraite correspond exactement à la puissance thermique dégagée dans la masse  $M$  de cuivre, masse qui a pour valeur:

$$M = \rho_{cu} \frac{\pi D^2}{4} L = 8940 \frac{3,14 \cdot 0,0001}{4} 0,10 = 0,070 \text{ kg} = 70 \text{ g}$$

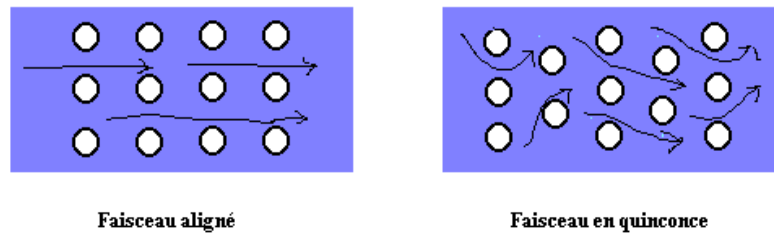
L'irradiation du cuivre dans la pile dégage donc une puissance thermique massique égale à:

$$\frac{7,02 \text{ W}}{70 \text{ g}} = 0,1 \text{ W/g}$$

### 3.3.2.3 Écoulement autour d'un faisceau de tubes

De nombreux appareils industriels tels que les réchauffeurs d'air, les échangeurs thermiques, sont constitués de rangées de tubes parallèles, plongés dans un écoulement de fluide dirigé perpendiculairement à leur axe.

Les tubes peuvent être disposés en ligne ou en quinconce, comme l'indique la figure suivante:



L'expérience montre que la disposition en quinconce est le siège d'une plus grande turbulence, et conduit alors à un coefficient de convection plus élevé que la disposition alignée.

On utilisera la corrélation suivante:

$$N_u = B (R_e)^{0,6} (P_r)^{0,33} \quad (3.18)$$

avec:  $B = 0,26$  pour un faisceau aligné;  $B = 0,33$  pour un faisceau en quinconce.

#### 3.3.2.4 Écoulement le long d'une plaque plane

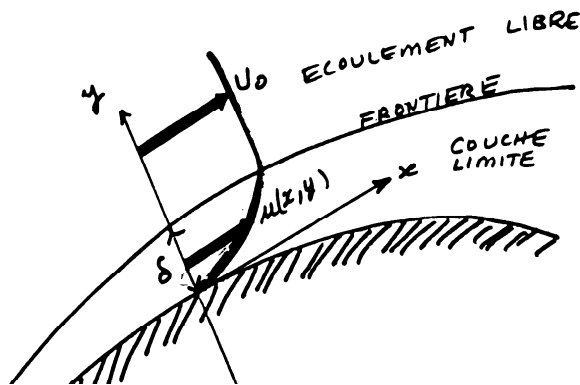
Les corrélations expérimentales présentées jusqu'à maintenant ont une fonction pleinement opérationnelle (un ingénieur de bureau d'études peut, à l'aide de ces outils, élaborer des projets parfaitement valides), mais cette approche est cependant quelque peu frustrante, car elle n'offre pas le moindre accès à la compréhension des phénomènes physiques dont il est question.

Au moment d'aborder par cette méthode le calcul du transfert thermique entre une plaque plane et un fluide, deux remarques importantes doivent être faites:

(1) Il est impossible de dissocier l'analyse du transfert thermique entre un corps solide et un fluide en mouvement dans lequel cet obstacle est plongé, de l'analyse de la perturbation de l'écoulement du fluide provoquée par la présence de l'obstacle.

(2) L'analyse de l'écoulement d'un fluide au voisinage d'une plaque plane permet de développer des concepts plus généraux qui conduisent à distinguer plusieurs régions très différentes dans ces types d'écoulements perturbés par la présence d'un obstacle:

- la sous-couche laminaire, dans laquelle l'écoulement ne dépend que de la viscosité  $\mu$  du fluide, et est caractérisé par un profil de vitesse variant linéairement avec la distance à la paroi;
- la couche limite turbulente, régie par des conditions de paroi, et dans laquelle le profil de vitesse est exponentiel;
- la zone turbulente externe, complètement mélangée, avec un profil de vitesse logarithmique pratiquement plat.



Entre la paroi et la sous-couche laminaire, l'échange thermique dans la direction normale à la paroi ne pourra s'effectuer que par conduction. La conductivité  $\lambda$  des fluides étant faible par rapport à celle des solides, la sous-couche laminaire oppose une résistance importante au passage de la chaleur. Il en résulte dans cette région une variation ra-

pide de la température, qui devra passer d'une valeur  $T_{op}$  à la paroi, à une valeur  $T_\infty$  dans la zone mélangée. Un tel transfert par conduction est régi par la loi de Fourier (2.3):

$$\frac{d\Phi}{dS} = \frac{d^2Q}{dS dt} = - \lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{n=0} \tag{3.19}$$

expression de la densité de flux thermique à la paroi.

Cette quantité élémentaire de chaleur  $d^2Q$  cédée par la paroi sera ensuite transportée par convection dans le fluide, selon la loi générale:

$$d^2Q = h (T_p - T_\infty) dS dt \tag{3.20}$$

ce qui met en évidence la relation qui existe entre le coefficient d'échange thermique par convection  $h$ , et le gradient de température à la paroi:

$$h = - \frac{\lambda}{T_p - T_\infty} \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{n=0} \tag{3.21}$$

Si on considère une surface pariétale finie  $S$ , le flux de chaleur à travers cette surface sera de la forme:

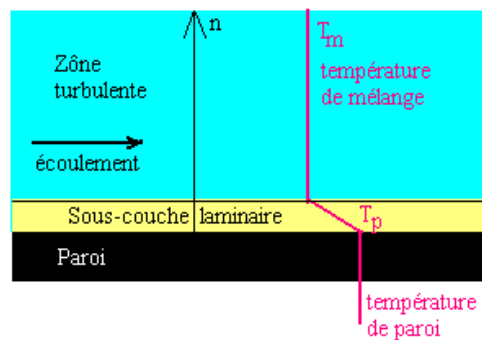
$$\Phi = \frac{dQ}{dt} = h (T_p - T_\infty) S$$

que l'on peut encore écrire sous la forme:

$$\Phi = \frac{T_p - T_\infty}{R_{T_p - T_\infty}} \quad (3.22)$$

$$R_{T_p - T_\infty} = \frac{1}{hS} \quad (3.23)$$

A l'extérieur de la sous-couche laminaire, les particules fluides des zones turbulentes vont venir (de manière aléatoire) au voisinage de cette sous-couche visqueuse, s'y échaufferont (dans l'hypothèse où  $T_p > T_\infty$ , par exemple) puis, se déplaçant vers l'extérieur, se mélangeront avec le fluide plus froid. Il en résulte un transfert thermique important et une égalisation rapide des températures, le fluide hors de la zone pariétale prenant une température  $T_m$  appelée température de mélange.



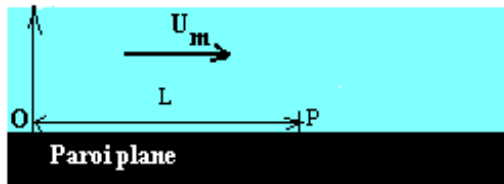
Le phénomène que nous venons de décrire qualitativement est une couche limite thermique. Les propriétés de cette couche limite thermique sont de même nature que celles de la couche limite cinématique introduite en mécanique des fluides.

Dans le cadre de ce cours d'initiation aux transferts thermiques, nous n'irons pas plus avant dans les développements théoriques qui permettent de modéliser mathématiquement les couches limites thermiques, d'une manière tout-à-fait analogue à ce que nous n'avons fait qu'esquisser rapidement dans le Cours de mécanique des Fluides.

Nous nous contenterons donc, et cela sera suffisant pour la résolution des problèmes pratiques, de recourir à la méthode des corrélations expérimentales.

a) Régime laminaire sur une plaque plane

La plaque peut être indifféremment verticale, horizontale ou oblique. La vitesse moyenne de l'écoulement est désignée par  $U_m$ .



Si on considère une distance  $L = OP$  parcourue par le fluide le long de la plaque, on peut l'utiliser pour calculer un Nombre de Reynolds:

$$R_{eL} = \frac{\rho U_m L}{\mu}$$

On va caractériser le transfert convectif *moyen* entre l'origine O et l'abscisse  $L = OP$  par un coefficient de convection moyen  $\bar{h}$  défini comme la moyenne du coefficient  $h$  entre  $x = 0$  et  $x = L$ .

Le Nombre de Nusselt moyen  $\bar{N}_{uL} = \frac{\bar{h} L}{\lambda}$  sera alors calculé par la corrélation suivante:

$$\bar{N}_{uL} = \frac{2}{3} (R_{eL})^{0,5} (Pr)^{0,33} \tag{3.24}$$

Cette corrélation est valable tant que:  $R_{eL} < 2000$

b) Régime turbulent sur une plaque plane

Si  $R_{eL} > 2000$ , l'écoulement devient turbulent. La corrélation qu'il convient d'appliquer pour calculer le transfert convectif s'écrit alors:

$$\bar{N}_{uL} = 0,036 (R_{eL})^{0,8} (Pr)^{0,33} \tag{3.25}$$

**3.4 Transfert de chaleur par convection naturelle sans changement d'état**

La convection naturelle est la forme d'échange convectif la plus couramment observée. Au contact d'un corps chaud, la température de l'air augmente, donc sa masse volumique décroît. L'air ambiant, de masse volumique plus élevée, exerce une poussée d'Archimède vers le haut, et la masse d'air chaude s'élève en enlevant de la chaleur au corps. Elle est remplacée par une masse d'air froid qui, au contact du corps s'échauffe, et ainsi de suite.

Ces échanges jouent un grand rôle en pratique. On citera en particulier:



- le chauffage domestique
- le calcul des pertes par les parois dans les installations industrielles

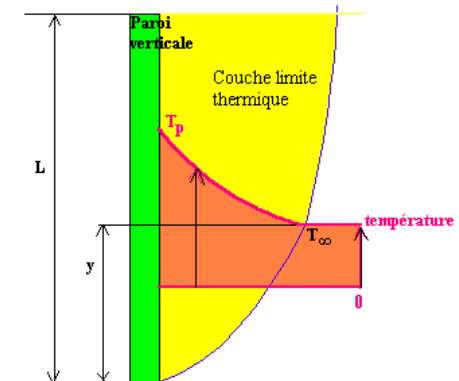
Comme les vitesses en convection naturelle demeurent faibles, les échanges sont nettement moins intenses qu'en convection forcée. Il en résulte qu'échanges en convection naturelle et échanges par rayonnement sont souvent du même ordre de grandeur.

### 3.4.1 Couche limite de convection naturelle

Considérons une plaque plane verticale chaude, de température de paroi  $T_p$ , au contact d'un fluide froid dont la température au loin est  $T_\infty$ .

Au voisinage de la plaque, existe une zone perturbée appelée couche limite de convection naturelle.

L'épaisseur  $\delta$  de cette couche limite et la densité du flux thermique varient avec la cote  $y$ .



On définit un coefficient moyen de convection naturelle  $h$  permettant d'exprimer le flux de chaleur échangé sur toute la surface  $S$  de la plaque sous la forme:

$$\Phi = h S (T_p - T_\infty) \quad (3.26)$$

### 3.4.2 Résultats de l'analyse dimensionnelle

Des considérations d'analyse dimensionnelle semblables à celles exposées au § 3.3.1 amènent à définir un nouveau groupement adimensionnel appelé Nombre de Grashof:

$$G_r = \frac{\alpha g \Delta T \rho^2 L^3}{\mu^2} \quad (3.27)$$

expression dans laquelle:

- $L$  est une dimension linéaire permettant de calculer la surface d'échange, par exemple la hauteur de la plaque dans l'exemple précédent.
- $\Delta T$  est la différence de température entre la paroi chauffante et le fluide.

- $\alpha$  est le coefficient de dilatation volumique du fluide à pression constante:

Par définition, si l'unité de masse d'un corps occupe à la température T le volume v, son coefficient de dilatation volumique  $\alpha$  a pour expression:

$$\alpha = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_{p = cte} \quad (3.28)$$

Dans le cas d'un gaz parfait, l'équation d'état de ce gaz s'écrira pour une masse unité  $m = 1$  :

$$p v = R T$$

d'où en différentiant à pression p constante:

$$\left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_{p = cte} = \frac{1}{p} R$$

ce qui permet d'obtenir immédiatement l'expression du coefficient  $\alpha$  de dilatation volumique à pression constante, dans le cas d'un gaz, considéré comme parfait:

$$\alpha = \frac{1}{p v} R = \frac{1}{T} \quad (3.29)$$

Dans l'expression (3.28), on prendra bien garde que la température T du gaz est sa température absolue, en Kelvin.

Pour les liquides, on ne pourra bien entendu plus utiliser de relation du type de l'équation (3.28) ci-dessus.

Dans le cas de l'eau,  $\alpha$  est donné dans la table ci-dessous:

T en °C	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$10^3 \cdot \alpha$	0,08	0,20	0,30	0,38	0,45	0,53	0,58	0,64	0,67

### 3.4.3 Interprétation physique du Nombre de Grashof

Le fluide au contact de la paroi chaude de température  $T_p$  se trouve lui à une température  $T_\infty$ . Sa masse volumique à cette température est :

$$\rho_\infty = \frac{1}{v_\infty} \quad (3.30)$$

$v_\infty$  désignant le volume occupé à cette température par une unité de masse.

A cette température  $T_\infty$ , le volume  $v_\infty$  contient un poids  $g$  de fluide.

Lorsque la masse unité de fluide occupant ce volume  $v_\infty$  s'échauffe au contact de la paroi et prend la température  $T_p$ , sa masse volumique devient:

$$\rho = \rho_\infty + \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dT \quad (3.31)$$

Comme on peut écrire:

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = \left( \frac{\partial \rho}{\partial v_\infty} \right)_p \left( \frac{\partial v_\infty}{\partial T} \right)_p = \left( \frac{-1}{v_\infty^2} \right) (\alpha v_\infty) = - \frac{\alpha}{v_\infty} = - \alpha \rho_\infty$$

La relation (3.31) s'écrit donc:

$$\rho = \rho_\infty (1 - \alpha dT)$$

Le volume  $v_\infty$  considéré ci-dessus contient maintenant un fluide moins dense, dont le poids est devenu:

$$\rho g v_\infty = \rho_\infty g (1 - \alpha dT) v_\infty = g - \alpha g dT$$

ce qui veut dire que le fluide considéré subit une poussée vers le haut d'intensité  $\alpha g \Delta T$

Le Nombre de Grashof défini par la relation (3.27) peut se présenter sous la forme du rapport suivant:

$$G_r = \frac{\alpha g \Delta T}{\left( \frac{\mu}{\rho} \right)^2 \frac{1}{L^3}} \quad (3.27)$$

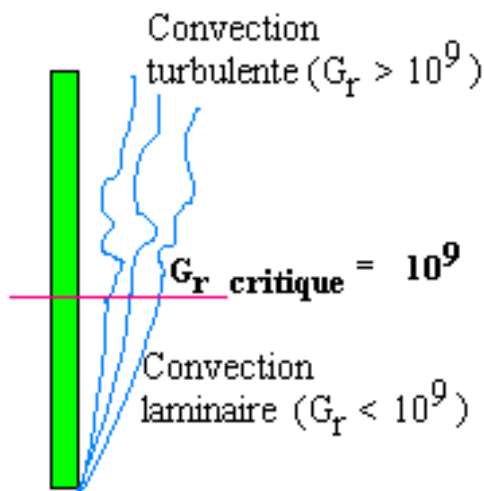
On reconnaît au numérateur la poussée d'Archimède subie par unité de masse, dont la dimension est  $LT^{-2}$ , et au dénominateur une force de viscosité par unité de masse également.

Le Nombre de Grashof est donc le rapport des forces de pesanteur qui agissent pour mettre en mouvement le fluide, aux forces de viscosité qui tendent à amortir ce mouvement.

Plus  $G_r$  est grand, plus la convection naturelle sera intense.

#### 3.4.4 Convection naturelle turbulente

Si on reprend l'exemple du § 3.4.1, on constate que plus la hauteur de la plaque augmente, plus le Nombre de Grashof augmente également. On doit donc observer une augmentation de l'intensité du mouvement de convection naturelle lorsqu'on s'élève vers le haut de la plaque.



L'expérience montre que l'écoulement en convection naturelle est d'abord laminaire, puis devient turbulent dans la partie supérieure, la transition ayant lieu à une cote correspondant à un Nombre de Grashof de l'ordre de  $10^9$ .

L'écoulement de convection naturelle créé par une cigarette illustre très bien ce phénomène.

### 3.4.5 Corrélations expérimentales

Les relations rendant compte des études expérimentales de transfert thermique en convection naturelle sont généralement de la forme:

$$N_u = C (G_r \cdot P_r)^n \quad (3.32)$$

Les grandeurs physiques intervenant dans les Nombres de Grashof et de Prandtl doivent être calculées pour la température moyenne  $\frac{T_p - T_\infty}{2}$ .

L'exposant  $n$  prendra les valeurs suivantes:

- $n = 1/4$  lorsque la convection est laminaire;
- $n = 1/3$  lorsque la convection est turbulente.

La valeur du coefficient  $C$  dépend du régime de convection ainsi que de la géométrie et de l'inclinaison de la paroi.

### 3.4.5 Application pratique

Le mur d'un bâtiment a 6 m de haut et 10 m de long. Sous l'échauffement dû au soleil, sa température extérieure atteint  $40^\circ\text{C}$ . La température ambiante extérieure étant de  $20^\circ\text{C}$ , calculer la puissance thermique échangée par convection entre le mur et l'extérieur.

On donne les propriétés physiques suivantes de l'air, à la température de  $30^\circ\text{C}$ :

Masse volumique $\rho$ :	1,149 kg/m <sup>3</sup>
Conductivité thermique $\lambda$ :	0,0258 W/(m.K)
Viscosité dynamique $\mu$ :	18,4.10 <sup>-6</sup> Pa.s
Capacité thermique massique $C_p$ :	1006 J/(kg.K)

On a vu qu'un tel échange pouvait se calculer par une corrélation expérimentale du type décrit par l'équation (5.32):

$$N_u = C (G_r \cdot P_r)^n \quad (3.32)$$

Il faut commencer par calculer les Nombres de Grashof et de Prandtl.

Le Nombre de Grashof est donné par la relation:

$$G_r = \frac{\alpha g \Delta T \rho^2 L^3}{\mu^2} \quad (3.27)$$

avec:

$$\alpha = 1/T = 1/(30 + 273) = 0,0033 \text{ K}^{-1}$$

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

$$\Delta T = 20 \text{ °C}$$

$$\rho = 1,149 \text{ kg/m}^3$$

$$L = 6 \text{ m}$$

$$\mu = 18,4 \cdot 10^{-6} \text{ Pa.s}$$

$$\text{On obtient donc: } G_r = \frac{0,0033 \cdot 9,81 \cdot 20 \cdot (1,149)^2 \cdot (6)^3}{(18,4 \cdot 10^{-6})^2} = 5,45 \cdot 10^{11}$$

Le Nombre de Prandtl est donné par la relation:

$$P_r = \frac{\mu/\rho}{\lambda/\rho C} = \frac{\mu C}{\lambda} \quad (3.10.c)$$

soit:

$$P_r = \frac{18,6 \cdot 10^{-6} \cdot 1006}{0,0258} = 0,725$$

On peut alors calculer le produit  $G_r \cdot P_r$  qui est utilisé comme critère de transition entre le régime de convection naturelle laminaire et celui de convection naturelle turbulente, la valeur critique étant de  $10^9$ . Ce produit  $G_r \cdot P_r$  est appelé le Nombre de Rayleigh  $R_a$ :

$$R_a = G_r \cdot P_r = 5,45 \cdot 10^{11} \cdot 0,725 = 3,95 \cdot 10^{11}$$

On est donc nettement en régime de convection naturelle turbulente, et on devra donc donner aux coefficients C et n de la corrélation (3.32) les valeurs:

$$C = 0,13 \text{ et } n = 1/3$$

d'où la valeur du Nombre de Nusselt de cet écoulement de convection naturelle:

$$N_u = \frac{h L}{\lambda} = C (G_r \cdot P_r)^n = 0,13 (3,95 \cdot 10^{11})^{0,33} = 954$$

On en déduit alors le coefficient d'échange convectif h:

$$h = \frac{\lambda N_u}{L} = \frac{0,0258 \cdot 954}{6} = 4,10 \text{ W / (m}^2 \cdot \text{K)}$$

d'où le flux de chaleur échangé sur toute la surface S:

$$\Phi = h S (T_p - T_\infty) \quad (3.26)$$

La puissance thermique échangée par convection entre le mur et l'extérieur a donc pour valeur:

$$\Phi = 4,10 \cdot 6 \cdot 10 \cdot (40 - 20) = 4922 \text{ W}$$

*Remarque:*

Le résultat du calcul précédent a fourni la valeur  $h = 4,10 \text{ W / (m}^2 \cdot \text{K)}$

Pour les gaz, les coefficients de transfert par convection naturelle h sont toujours de l'ordre de 1 à 10  $\text{W / (m}^2 \cdot \text{K)}$ .

Dans le cas des liquides, h sera par contre toujours compris entre 10 et 1000  $\text{W / (m}^2 \cdot \text{K)}$