1/ توزيع ذي الحدين؟

2/ توزيع بواسون كتقريب لقانون توزيع ذي الحدين؟

الحل:

1/ استخدام توزيع ذي الحدين:

نلاحظ أن هذه التجربة الاحتمالية تتبع في الأصل توزيع ثنائي الحد، حيث: n=3000، p=0,001، q=0,999، وعند استخدام قانون ثنائي الحد، حيث الاحتمال المطلوب، هو:

$$p(X=4)=C_{3000}^{4}\times(0{,}001)^{4}\times(0{,}999)^{2996}\approx 0{,}1681$$

2/ استخدام توزيع بواسون كتقريب لقانون ذي الحدين:

نلاحظ أن شروط التقريب متوفرة، حيث: p=0,001 هي قيمة صغيرة جدا، n كبيرة جدا (n=3000≥30)، np=3000×0,001=3≤5.

إذن نستخدم قانون بواسون، حيث $\lambda = np = 3$، وبالتالي يكون الاحتمال المطلوب هو:

$$p(X=x)=\frac{\lambda^{x}.e^{-\lambda}}{x!} \Rightarrow \quad p(X=4)=\frac{3^{4}.e^{-3}}{4!}\approx 0{,}1680$$

ونلاحظ أنه تقريبا نفس نتيجة الاحتمال عند استخدام توزيع ثنائي الحد أو توزيع بواسون.

تمرين 6/

يتم استقبال العديد من المكالمات الهاتفية لطلب النجدة في مركز للحماية المدنية، حيث في كل مكالمة، فإن احتمال (0,75) أن تكون تستحق الحالة المبلغ عنها تدخل أفراد الحماية المدنية، ففي فترة زمنية معينة تم استقبال 70 مكالمة هاتفية، فما احتمال أن يكون:

1/ 60 مكالمة تستحق التدخل؟

2/ 50 مكالمة هاتفية على الأكثر تستحق التدخل؟

3/ أكثر من 45 وأقل 65 مكالمة هاتفية تستحق التدخل؟

الحل:

نلاحظ أن هذه التجربة الاحتمالية تتبع في الأصل توزيع ثنائي الحد، حيث: n=70، p=0,75، q=0,25، وعند استخدام قانون ثنائي الحد، فإن القيام بالعمليات الحسابية صعب جدا، لذلك ينبغي تقريب هذا التوزيع إلى توزيع آخر.

ونلاحظ أن تقريب توزيع ثنائي الحد إلى توزيع بواسون لا تتوفر فيه الشروط، لأن: n=70≥30، لكن شرط np≤5 غير محقق، لأن: np=70×0,75 =52,5>5.

أما شروط التقريب إلى **التوزيع الطبيعي** فهي متوفرة، حيث: n=70≥30، np=52,5≥5، nq=17,5≥5، حيث يكون: $\mu = E(X) = np = 52,5$

$$\sigma^2 = V(X) = npq = 70 \times 0,75 \times 0,25 = 13,125$$

1/ احتمال أن يكون 60 مكالمة تستحق التدخل: $p(X = 60) = p(59,5 < X < 60,5)$

$$= p\left(\frac{59,5 - 52,5}{\sqrt{13,125}} < Z < \frac{60,5 - 52,5}{\sqrt{13,125}}\right)$$

$$= p(1,93 < Z < 2,21)$$

$$= p(0 < Z < 2,21) - p(0 < Z < 1,93) = 0,4864 - 0,4732 = 0,0132$$

2/ احتمال أن تكون 50 مكالمة هاتفية على الأكثر تستحق التدخل: $p(X \leq 50) = p(X \leq 50,5)$

$$= p\left(Z < \frac{50,5 - 52,5}{\sqrt{13,125}}\right)$$

$$= p(Z < - 0,55) = p(Z > 0,55)$$

$$= 0,5 - p(0 < Z < 0,55) = 0,5 - 0,2088 = 0,2912$$

3/ احتمال أكثر من 45 وأقل 60 مكالمة هاتفية تستحق التدخل:

$$p(45 < X < 60) = p(45,5 < X < 59,5)$$

$$= p\left(\frac{45,5-52,5}{\sqrt{13,125}} < Z < \frac{59,5-52,5}{\sqrt{13,125}}\right)$$

$$= p(-1,93<Z<1,93) = 2p(0<Z<1,93) = 2 \times 0,4732 = 0,9464$$

تمرين 7/

وكالة سياحية تستقبل في المتوسط 12,5 مكالمة هاتفية كل 5دقائق، فما احتمال أن تستقبل بين $10^h:00$ و $10^h:05$:

1/ أقل من 9 مكالمات هاتفية؟

2/ 9 مكالمات هاتفية على الاكثر؟

3/ 10 مكالمات؟

4/ أكثر من 15 مكالمة هاتفية؟

5/ أكثر من 5 وأقل من أو يساوي 15 مكالمة هاتفية ؟

الحل:

نلاحظ أن هذه التجربة الاحتمالية تتبع في الأصل توزيع بواسون، حيث: $\lambda = 12,5$، لكن حسب صيغة الأسئلة فإن استخدام هذا التوزيع يتطلب عمليات حسابية طويلة وصعبة، لذلك سيتم استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع بواسون، لأن شروط التقريب متوفرة، لأن: $\lambda = 12,5 \geq 10$، حيث يكون:

$$\mu = \sigma^2 = \lambda = 12,5.$$

1/ احتمال استقبال أقل من 9 مكالمات هاتفية: $p(X<9) = p(X<8,5)$

$$= p\left(Z < \frac{8,5-12,5}{\sqrt{12,5}}\right)$$

$$= p(Z < -1,13)$$

$$= p(Z>1,13) = 0,5 - p(0<Z<1,13) = 0,5 - 0,3708 = 0,1292$$

2/ احتمال استقبال 9 مكالمات هاتفية على الأكثر: $p(X \leq 9) = p(X < 9{,}5)$

$$= p\left(Z < \frac{9{,}5 - 12{,}5}{\sqrt{12{,}5}}\right)$$

$$= p(Z < -0{,}85)$$

$$= p(Z > 0{,}85) = 0{,}5 - p(0 < Z < 0{,}85) = 0{,}5 - 0{,}3023 = 0{,}1977$$

3/ احتمال استقبال 10 مكالمات هاتفية: $p(X = 10) = p(9{,}5 < X < 10{,}5)$

$$= p\left(\frac{9{,}5 - 12{,}5}{\sqrt{12{,}5}} < Z < \frac{10{,}5 - 12{,}5}{\sqrt{12{,}5}}\right)$$

$$= p(-0{,}85 < Z < -0{,}56)$$

$$= p(0{,}56 < Z < 0{,}85)$$

$$= p(0 < Z < 0{,}85) - p(0 < Z < 0{,}56) = 0{,}3023 - 0{,}2123 = 0{,}09$$

4/ احتمال استقبال أكثر من 15 مكالمة هاتفية: $p(X > 15) = p(X > 15{,}5)$

$$= p\left(Z > \frac{15{,}5 - 12{,}5}{\sqrt{12{,}5}}\right)$$

$$= p(Z > 0{,}85) = 0{,}5 - p(0 < Z < 0{,}85) = 0{,}5 - 0{,}3023 = 0{,}1977$$

5/ احتمال استقبال أكثر من 5 وأقل من أو يساوي 15 مكالمة هاتفية:

$$p(5 < X \leq 15) = p(5{,}5 < X < 15{,}5)$$

$$= p\left(\frac{4{,}5 - 12{,}5}{\sqrt{12{,}5}} < Z < \frac{15{,}5 - 12{,}5}{\sqrt{12{,}5}}\right)$$

$$= p(-2{,}26 < Z < 0{,}85)$$

$$= p(0 < Z < 2{,}26) + p(0 < Z < 0{,}85) = 0{,}4881 + 0{,}3023 = 0{,}7904$$