تمارين محلولة

التمرين 1: نرمي حجرة نرد 4 مرات متتالية، ونسجل في كل مرة الرقم الذي يظهر. فإذا كانت جميع الأوجه لها نفس احتمال الظهور وأن الأربعة رميات مستقلة عن بعضها البعض.

1- ما هو احتمال ظهور الرقم 5 ثلاث مرات؟

2- ما هو احتمال ظهور الرقم 5 مرة واحدة على الأقل؟

إذا كان لدينا المتغير العشوائي X حيث يمثل عدد مرات ظهور الرقم 5 في الأربع رميات.

3- حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ؟

4- أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

أ- احتمال ظهور الرقم 5 ثلاث مرات هو

احتمال ظهور الرقم 5 عند رمي حجرة نرد مرة واحدة هو $\frac{1}{6}$. إذا اعتبرنا A و B هو حادث ظهور وعدم ظهور الرقم 5 على التوالي. يصبح لدينا:

$$P(A) = \frac{1}{6}, \qquad P(B) = \frac{5}{6}$$

وبما أن عدد الرميات مستقلة عن بعضها البعض فإنه يمكن تطبيق توزيع ذي الحدين حيث أن:

$$P(X) = c_n^X p^x (1-p)^{n-x}$$

$$P(X=3) = c_4^3 (\frac{1}{6})^3 (\frac{5}{6})^{4-3} = 0.01$$

2- احتمال ظهور الرقم 5 مرة واحدة على الأقل هو

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$P(\bar{A}) = P(X=0) = c_4^0 \frac{1}{6}^0 (\frac{5}{6})^{4-0} = 0.48$$

$$P(A) = 1 - 0.48 = 0.52$$

3- تحديد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

إذا كان المتغير العشوائي ظهور الرقم 5 يكون لدينا عدد الحالات الممكنة عند رمي حجرة نرد مرة واحدة

$$\mathbf{\Omega} = \{A, B\}$$

أما عندما نرمي حجرة نرد 4 مرات تكون عدد الحالات الممكنة $2^4 = 16$

وبما أن المتغير العشوائي يتبع توزيع ذي الحدين فإنه يمكننا حساب الاحتمالات المقابلة من خلال:

حيث أن القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي هي: $\{0,1,2,3,4\}$

$$P(X=0)=c_4^0(\frac{1}{6})^0(\frac{5}{6})^{4-0}=\frac{625}{1296}$$

$$P(X=1)=c_4^1(\frac{1}{6})^1(\frac{5}{6})^{4-1}=\frac{125}{324}$$

$$P(X=2)=c_4^2(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^{4-2}=\frac{25}{216}$$

$$P(X=3)=c_4^3(\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^{4-3}=\frac{5}{324}$$

$$P(X=4)=c_4^4(\frac{1}{6})^4(\frac{5}{6})^{4-4}=\frac{1}{1296}$$

x_i	0	1	2	3	4	**Σ**
p_i	$\frac{625}{1296}$	$\frac{125}{324}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{5}{324}$	$\frac{1}{1296}$	1

4– حساب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري:

- التوقع الرياضي

$$E(X)=np$$
$$=4\times\frac{1}{6}=0.66$$

- التباين

$$V(X)=np(1-p)$$
$$=4\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=0.55$$

- الانحراف المعياري

$$\delta(X)=\sqrt{V(X)}$$
$$\delta(X)=\sqrt{0.55}$$
$$\delta(X)=0.74$$

التمرين 2: تشير الإحصائيات للسنوات السابقة أنه في المتوسط يتوقف 6 طلاب جدد عن الدراسة في كل قسم كل سنة في كلية معينة.

1– ما هو احتمال توقف 3 طلاب عن الدراسة في سنة معينة؟

2– ما هو احتمال توقف 3 طلاب أو أقل عن الدراسة في سنة معينة؟

3– أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

1– احتمال توقف 3 طلاب عن الدراسة في سنة معينة هو

$$P(X) = \frac{\lambda^X e^{-\lambda}}{X!}, \quad x = 0,1,2 \dots \dots . n$$

$$P(3) = \frac{6^3 e^{-6}}{3!} = \frac{216 \times 0.00248}{3 \times 2 \times 1} = 0.08928$$

2– احتمال توقف 3 طلاب أو أقل عن الدراسة في سنة معينة هو

$$P(X \le 3) = f(3) + f(2) + f(1) + f(0)$$

$$P\ (3) = 0.08928$$

$$P(2) = \frac{6^2 e^{-6}}{2!} = \frac{36 \times 0.00248}{2 \times 1} = 0.04464$$

$$P(1) = \frac{6^1 e^{-6}}{1!} = \frac{6 \times 0.00248}{1} = 0.01488$$

$$P(0) = \frac{6^0 e^{-6}}{0!} = \frac{1 \times 0.00248}{1} = 0.00248$$

$$P(X \le 3) = 0.08928 + 0.04464 + 0.01488 + 0.00248$$
$$= 0.15128$$

3– حساب التوقع الرياضي، والانحراف المعياري لعدد الحوادث:

- التوقع الرياضي

$$E(x) = \lambda = 6$$

- التباين

$$V(x) = \lambda = 6$$

- الانحراف المعياري

$$\sigma(x) = \sqrt{\lambda} = \sqrt{6} = 2.45$$

التمرين 3: في امتحان مقياس الإحصاء وجد الطالب 4 تمارين. فإذا كان احتمال أن يجيب هذا الطالب عن كل تمرين صحيحا هو $\frac{2}{3}$.

1– ما هو احتمال أن يجيب صحيحا عن تمرينين فقط؟

2– ما هو احتمال أن يجيب صحيحا عن تمرين واحد أو أكثر؟

3– ما هو احتمال أن يجيب صحيحا عن أكثر من نصف التمارين؟

الحل:

1– احتمال أن يجيب صحيحا عن تمرينين فقط هو

لدينا: $n = 4, \quad P = \frac{2}{3}, \quad q = 1 - P = \frac{1}{3}$

$$P(2) = c_4^2 (\tfrac{2}{3})^2 (\tfrac{1}{3})^{4-2} = 0.2962$$

2– احتمال أن يجيب صحيحا عن تمرين واحد أو أكثر هو

$$P(X \geq 1) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4)$$

$$P(1) = c_4^1 (\tfrac{2}{3})^1 (\tfrac{1}{3})^{4-1} = 0.0987$$

$$P(2) = c_4^2 (\tfrac{2}{3})^2 (\tfrac{1}{3})^{4-2} = 0.2962$$

$$P(3) = c_4^3 (\tfrac{2}{3})^3 (\tfrac{1}{3})^{4-3} = 0.3950$$

$$P(4) = c_4^4 (\tfrac{2}{3})^4 (\tfrac{1}{3})^{4-4} = 0.1975$$

$$P(X \geq 1) = 0.0987 + 0.2962 + 0.3950 + 0.1975$$
$$= 0.9876$$

أو بطريقة ثانية:

احتمال أن لا يجيب عن أي تمرين هو $q^4 = (\frac{1}{3})^4 = \frac{1}{81}$ وبالتالي احتمال أن يجيب صحيحا على الأقل على تمرين هو $1 - q^4 = \frac{80}{81} = 0.9876$

3– احتمال أن يجيب صحيحا عن أكثر من نصف التمارين هو

يجيب هذا الطالب على أكثر من نصف التمارين يعني إذا أجاب صحيحا على 3 أو 4 تمارين.

$$P(X \geq 3) = P(3) + P(4) = 0.3950 + 0.1975 = 0.5925$$

التمرين 4: تشير الإحصائيات أن 1 في المائة من السيارات المنتجة في مصنع ما فيها بعض المشاكل التقنية. فرضا أننا اخترنا عينة متكونة من 30 سيارة. أحسب احتمال وجود أكثر من سيارة فيها مشاكل تقنية:

1– باستخدام توزيع ذي الحدين؟

2– باستخدام التوزيع البواسوني كتقريب لتوزيع ذي الحدين؟

الحل:

1– باستخدام توزيع ذي الحدين:

لدينا: $n = 30, \quad P = 0.01, \quad q = 1 - P = 0.99$

باستخدام الجداول الإحصائية نجد:

$$P(X > 1) = P(2) + P(3) + P(4) \dots \dots . = 0.0328 + 0.0031$$
$$= 0.0328 + 0.0031 + 0.0002 = 0.0361$$

2- باستخدام التوزيع البواسوني كتقريب لتوزيع ذي الحدين:

بما أن $n = 30$ و$np = 30 \times 0.01 = 0.3$ فإنه يمكننا استخدام تقريب التوزيع البواسوني لتوزيع ذي الحدين. حيث أن: $\lambda = np = 0.3$

يمكننا حساب $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1)$ حيث أن X هو عدد السيارات غير الجيدة.

باستخدام قانون التوزيع البواسوني نحصل على:

$$P(1) = \frac{0.3^1 e^{-0.3}}{1!} = \frac{0.3 \times 0.74082}{1} = 0.222246$$
$$P(0) = \frac{0.3^0 e^{-0.3}}{0!} = \frac{1 \times 0.74082}{1} = 0.74082$$

$$P(X \leq 1) = P(1) + P(0) = 0.222246 + 0.74082$$
$$= 0.963066$$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1)$$
$$= 1 - 0.963066 = 0.036934$$

فكلما زادت n يقترب التقريب أكثر من الاحتمال باستخدام توزيع ذي الحدين

التمرين 5: إذا كان طول الطلبة في كلية ما يتبع التوزيع الطبيعي، بمتوسط حسابي 170 وانحراف معياري 10.

1- ما هو احتمال أن يكون عمر طالب اختير عشوائيا بين 150 و160؟

2- ما هو احتمال أن يكون عمر طالب اختير عشوائيا أقل أو يساوي 175؟

3- ما هو احتمال أن يكون عمر طالب اختير عشوائيا أكثر أو يساوي 185؟

الحل:

1- احتمال أن يكون عمر طالب اختير عشوائيا بين 150 و160 هو

نقوم بحساب أولا قيمة z المناظرة لقيم X ثم نجد القيم التي تناظر قيم z في الجداول الإحصائية كما

يلي:

$$z_1=\frac{X_1-\mu}{\delta}=\frac{150-170}{10}=-2 \qquad z_2=\frac{X_2-\mu}{\delta}=\frac{160-170}{10}=-1$$

عند البحث عن مقابل $z=-2$ و $z=1$ في الجداول الإحصائية نحصل على القيمتين 0.4772 و0.3413. هذا يعني أن احتمال أن العمر بين 150 و160 هو

$$P(150<X<160)=0.3413+0.4772=0.8185$$

2– احتمال أن يكون عمر طالب اختير عشوائيا أقل أو يساوي 175 هو

$$z=\frac{X-\mu}{\delta}=\frac{175-170}{10}=0.5$$

عند البحث عن مقابل القيمة $z=0.5$ في الجداول الإحصائية نحصل على القيمة 0.1915. هذا يعني أن احتمال أن يكون عمر الطالب أقل أو يساوي 175 هو

$$P(X\leq 175)=0.5-0.1915=0.3085$$

3– احتمال أن يكون عمر طالب اختير عشوائيا أكثر أو يساوي 185 هو

$$z=\frac{X-\mu}{\delta}=\frac{185-170}{10}=1.5$$

عند البحث عن مقابل القيمة $z=1.5$ في الجداول الإحصائية نحصل على القيمة 0.4332. هذا يعني أن احتمال أن يكون عمر الطالب أكثر أو يساوي 185 هو

$$P(X\geq 185)=0.5-0.4332=0.0668$$

التمرين 6: إذاكان الوسط الحسابي والانحراف المعياري للعلامات في أحد المسابقات هو 74 و12 على التوالي.

1– أحسب العلامات بالوحدات القياسية واحتمالاتها للمتسابقين الحاصلين على: 60،75، 85، 93؟

2– أحسب العلامات المناظرة للوحدات القياسية: -1، 0.5، 1.5، 2؟

الحل:

1– حساب العلامات بالوحدات القياسية للمتسابقين الحاصلين على:

$$z_1=\frac{X_1-\mu}{\delta}=\frac{60-74}{12}=-1.16, \qquad P(z_1=1.16)=0.3770$$

$$z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\delta} = \frac{75-74}{12} = 0.08, \qquad P(z_2 = 0.08) = 0.0319$$

$$z_3 = \frac{X_3 - \mu}{\delta} = \frac{85-74}{12} = 0.91, \qquad P(z_3 = 0.91) = 0.3186$$

$$z_4 = \frac{X_4 - \mu}{\delta} = \frac{93-74}{12} = 1.58, \qquad P(z_4 = 1.58) = 0.4429$$

2– العلامات المناظرة للوحدات القياسية: -1، 0.5، 1.5، 2 هي

$$X_1 = z_1 \times \delta + \mu = 12 \times (-1) + 74 = 62$$

$$X_2 = z_2 \times \delta + \mu = 12 \times (0.5) + 74 = 80$$

$$X_3 = z_3 \times \delta + \mu = 12 \times (1.5) + 74 = 92$$

$$X_4 = z_4 \times \delta + \mu = 12 \times (2) + 74 = 98$$

التمرين 7: إذا ألقينا 12 قطعة نقدية متماثلة. أحسب احتمال أن نحصل على الصورة عددا من المرات يتراوح بين 4 و7 بما في ذلك 4 و7، وذلك باستخدام:

1– توزيع ذي الحدين؟

2– التقريب الطبيعي لتوزيع ذي الحدين؟

الحل:

1– باستخدام توزيع ذي الحدين:

لدينا: $n = 12, \quad P = 0.5, \quad q = 1 - P = 0.5$

$$P(4 \le X \le 7) = P(4) + P(5) + P(6) + P(7)$$

$$P(4) = c_{12}^{4} (\tfrac{1}{2})^4 (\tfrac{1}{2})^{12-4} = 0.1208$$

$$P(5) = c_{12}^{5} (\tfrac{1}{2})^5 (\tfrac{1}{2})^{12-5} = 0.1933$$

$$P(6) = c_{12}^{6} (\tfrac{1}{2})^6 (\tfrac{1}{2})^{12-6} = 0.2255$$

$$P(7) = c_{12}^{7} (\tfrac{1}{2})^7 (\tfrac{1}{2})^{12-7} = 0.1933$$

$$P(4 \le X \le 7) = 0.1208 + 0.1933 + 0.2255 + 0.1933$$

$$\approx 0.7332$$

2– باستخدام التقريب الطبيعي لتوزيع ذي الحدين:

لدينا:
$$\mu = np = 12 \times 0.5 = 6$$
$$\delta = \sqrt{npq} = \sqrt{12 \times 0.5 \times 0.5} = 1.78$$

إذا كان X يمثل عدد ظهور الصورة. وبالتالي نقوم بحساب الاحتمال $P(4 \leq X \leq 7)$

ولكن إذا افترضنا عدد النتائج متصل من أجل تطبيق تقريب التوزيع الطبيعي. في هذه الحالة يجب أن نحسب الاحتمال: $P(3.5 \leq X \leq 7.5)$

نقوم بحساب 3.5 و7.5 بالوحدات المعيارية:

$$z_1 = \frac{X_1 - \mu}{\delta} = \frac{3.5 - 6}{1.78} = -1.45, \quad P(z_1 = 1.45) = 0.4265$$
$$z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\delta} = \frac{7.5 - 6}{1.78} = 0.87, \quad P(z_2 = 0.87) = 0.3078$$
$$P \approx P(4 \leq X \leq 7) = P(-1.45 \leq X \leq 0.87)$$
$$= 0.4265 + 0.3078 = 0.7343$$

التمرين 8: نفترض أنه هناك 300 خطأ مطبعيا موزعة على صفحات كتاب متكون من 500 صفحة. أحسب احتمال أن تحتوي صفحة معينة على:

1– خطأين بالضبط؟

2– خطأين أو أكثر؟

3– 5 أخطاء بالضبط؟

الحل:

1– احتمال وجود خطأين بالضبط هو :

نفترض أن عدد الأخطاء في الصفحة هو عبارة عن عدد مرات النجاح حسب توزيع ذي الحدين. لدينا:

$n = 300$ حيث أنه يوجد 300 خطأ مطبعي و $P = \frac{1}{500}$ هو احتمال أن يظهر خطأ في الصفحة المعينة. وبما أن P صغيرة وn كبيرة من الأفضل استخدام تقريب بواسون لتوزيع ذي الحدين حيث أن:

$$\lambda = np = 0.6$$

باستخدام قانون التوزيع البواسوني نحصل على:

$$P(X = 2) = \frac{0.6^2 e^{-0.6}}{2!} = \frac{0.36 \times 0.549}{2} = 0.0988$$

2– احتمال خطأين أو أكثر هو

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$P(X = 0) = \frac{0.6^0 e^{-0.6}}{0!} = \frac{1 \times e^{-0.6}}{1} = 0.549$$

$$P(X = 1) = \frac{0.6^1 e^{-0.6}}{1!} = \frac{0.6 \times 0.549}{1} = 0.329$$

$$P(X \geq 2) = 1 - 0.549 + 0.329$$

$$= 0.122$$

3- احتمال وجود 5 أخطاء بالضبط هو

$$P(X = 5) = \frac{0.6^5 e^{-0.6}}{5!} = \frac{0.0777 \times 0.549}{120} = 3.554775 \times 10^{-4}$$

التمرين 9: في مركز تلقي المكالمات الهاتفية، يتم استقبال المكالمات من خارج الوطن باحتمال قدره 0.1 في الساعة. قمنا بسحب 100 مكالمة خلال ساعة معينة. ما هو احتمال أن نجد أكثر من 3 مكالمات دولية في العينة المسحوبة وذلك باستخدام:

1- توزيع ذي الحدين؟

2- التوزيع البواسوني؟

3- التوزيع الطبيعي؟

الحل:

1- احتمال أن نجد أكثر من 3 مكالمات دولية باستخدام توزيع ذي الحدين هو:

نفترض أن X هو عدد المكالمات الدولية التي يستقبلها المركز. وبالتالي يجب أن نحسب الاحتمال:

$$P(X > 3)$$

لدينا: المكالمة يمكن أن تكون محلية أو دولية وبالتالي يمكن تطبيق توزيع ذي الحدين.

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3)$$

$$= 1 - P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$P(X = 0) = c_{100}^{0}(0.1)^0(0.9)^{100-0} = 0.0000265$$

$$P(X = 1) = c_{100}^{1}(0.1)^1(0.9)^{100-1} = 0.0005951$$

$$P(X = 2) = c_{100}^{2}(0.1)^2(0.9)^{100-2} = 0.0016231$$

$$P(X=3)=c_{100}^{3}(0.1)^{3}(0.9)^{100-3}=0.0078363$$

$$P(X\leq 3)=0.000026+0.000595+0.001623+0.007836$$
$$=0.0078363$$

وبالتالي:
$$P(X>3)=1-0.0078363$$
$$=0.9921$$

1– احتمال أن نجد أكثر من 3 مكالمات دولية باستخدام التوزيع البواسوني هو:

لدينا: $n=100$ و $P=0.1$ هو احتمال تلقي مكالمة دولية. وبما أن P صغيرة وn كبيرة فإنه بإمكاننا استخدام التوزيع البواسوني كتقريب لتوزيع ذي الحدين حيث أن:

$$\lambda=np=10$$

نقوم بحساب الاحتمال:
$$P(X>3)=1-P(X\leq 3)$$

باستخدام قانون التوزيع البواسوني نحصل على:

$$P(X=0)=\frac{10^{0}e^{-10}}{0!}=\frac{1\times 0.00005}{1}=0.00005$$

$$P(X=1)=\frac{10^{1}e^{-10}}{1!}=\frac{10\times 0.00005}{1}=0.0005$$

$$P(X=2)=\frac{10^{2}e^{-10}}{2!}=\frac{100\times 0.00005}{2}=0.0023$$

$$P(X=3)=\frac{10^{3}e^{-10}}{3!}=\frac{1000\times 0.00005}{6}=0.008$$

$$P(X\leq 3)=0.00005+0.0005+0.0023+0.008=0.0104$$

$$P(X>3)=1-0.0104=0.9896$$

3– احتمال أن نجد أكثر من 3 مكالمات دولية باستخدام التوزيع الطبيعي هو:

نقوم بحساب الاحتمال:
$$P(X>3)=1-P(X\leq 3)$$

لدينا:
$$\mu=np=100\times 0.1=10$$

$$\delta=\sqrt{npq}=\sqrt{100\times 0.1\times 0.9}=3$$

بافتراض أن X يمثل عدد المكالمات الدولية. وبالتالي نقوم بحساب الاحتمال

$$P(X>3)=1-P(0\leq X\leq 3)$$

ولكن إذا افترضنا عدد النتائج متصلة من أجل تطبيق تقريب التوزيع الطبيعي. في هذه الحالة يجب أن نحسب الاحتمال: $P(-0.5 \le X \le 3.5)$

نقوم بحساب 3.5 و7.5 بالوحدات المعيارية:

$$z_1 = \frac{X_1-\mu}{\delta} = \frac{-0.5-10}{3} = -3.5, \qquad P(z_1 = 3.5) = 0.4998$$

$$z_2 = \frac{X_2-\mu}{\delta} = \frac{3.5-10}{3} = -2.16, \qquad P(z_2 = 2.16) = 0.4846$$

$$P \approx P(0 \le X \le 3) = P(-3.5 \le X \le -2.16)$$
$$= 0.4998 + 0.4846 = 0.9844$$

التمرين 10: تتكون عائلة من 7 أطفال، ما هو احتمال أن يكون في هذه العائلة:

1– 4 أولاد ؟

2– عدد الأولاد أقل من عدد البنات؟

الحل:

1– احتمال أن يكون في هذه العائلة 4 أولاد هو

نفترض احتمال أن يكون الطفل ولد هو $\frac{1}{2}$

لدينا: $n = 7, \quad P = \frac{1}{2}, \quad q = 1 - P = \frac{1}{2}$

$$P(X = 4) = c_7^4 (\frac{1}{2})^4 (\frac{1}{2})^3 = 0.2734$$

2– احتمال أن يكون في هذه العائلة عدد الأولاد أقل من عدد البنات هو

$$P(X) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$P(X = 0) = c_7^0 (\frac{1}{2})^0 (\frac{1}{2})^7 = 0.0081$$

$$P(X = 1) = c_7^1 (\frac{1}{2})^1 (\frac{1}{2})^6 = 0.0546$$

$$P(X = 2) = c_7^2 (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^5 = 0.1640$$

$$P(X = 3) = c_7^3 (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^4 = 0.2734$$

$$P(X) = 0.0081 + 0.0546 + 0.1640 + 0.2734$$
$$= 0.5001$$

التمرين 11: نفترض أن نسبة رسوب الطلبة في إحدى الأقسام هو 0.02. ما هو احتمال وجود 3 طلبة راسبين في عينة متكونة من 100 طالب اختيرت عشوائيا وذلك باستخدام:

1- توزيع ذي الحدين؟

2- توزيع بواسون؟

الحل:

في هذا المثال نستطيع تطبيق توزيع ذي الحدين، وحيث أن P صغيرة تساوي 0.02 و n كبيرة تساوي 100 فمن الأفضل تطبيق التوزيع البواسوني.

1- توزيع ذي الحدين:

لدينا: $n = 100, \quad P = 0.02, \quad q = 1 - P = 0.98$

$$P(X = 3) = c_{100}^{3}(0.02)^3(0.98)^{97} = 0.1822$$

$$P(X = 3) = 0.1822$$

2- توزيع بواسون:

$$\lambda = np = 2$$

$$P(X = 3) = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = \frac{8 \times 0.1353}{6} = 0.1804$$

$$P(X = 3) = 0.1804$$