أولاً: التوزيعات الاحتمالية المنفصلة (المتقطعة)

(Discrete Probability Distributions)

التوزيع الاحتمالي هو جدول أو صيغة أو رسم بياني يصف قيم متغير عشوائي والاحتمال المرتبط بهذه القيم. سنتناول في هذا الفصل أهم التوزيعات الاحتمالية المنفصلة، مثل توزيع ذو الحدين، توزيع بواسون. في بقية هذا الفصل سندرس التوزيعات الاحتمالية المستمرة ونخصصها أساسا للتوزيع الطبيعي.

1- التوزيع الاحتمالي ذو الحدين **Binomial Distribution.**

إذا كانت هناك تجربة عشوائية لها نتيجتان فقط هما ظهور حدث معين نجاح أو عدم ظهور فشل مثل: نجاح الطالب أو فشلة، المصباح الكهربائي جيد أو تالف، وصول طائرة في موعدها أو عدم وصولها، ظهور الصورة عند رمي قطعة نقود أو عدم ظهورها...الخ

ـ و إذا أجريت هذه التجربة n من المرات و بافتراض أن احتمال نجاح هذه التجربة هو p الذي يكون ثابتاً في كل تجربة عشوائية نقوم بها. و احتمال فشلها هو $q = 1 - p$ حيث $p + q = 1$

ـ نفرض أن x هو المتغير العشوائي المعرف على هذه التجربة و يرمز إلى عدد مرات النجاح لهذه التجربة.

تعطى دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي X و التي نرمز لها بالرمز $f(x)$ بالمعادلة

$$p(X=x) = f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} P^{x}(1-p)^{n-x} & x = 0,1,2,\dots,n \\ 0 & \text{ماعداذلك} \end{cases}$$

حيث n عدد صحيح موجب، $0 < p < 1$. تحت هذه الشروط واضح أن $f(x) \geq 0$

ملاحظة:نذكر هنا بالعلاقة الرياضية الشهيرة التالية : $(a+b)^n=\sum_{x=o}^{n}\binom{n}{x} b^x a^{n-x}$ مفكوك ذي الحدين.

قلنا سابقاً أن أي دالة رياضية $f(x)$ متعلقة بمتغير عشوائي ستكون "دالة كثافة احتمالية إذا تحقق الشرطان:

$$1)\ f(x) \geq o$$
$$2)\sum_{x=0}^{n} f(x) = 1$$

سنبرهن لاحقاً أنّ الدالة الرياضية المعطاة لتوزيع ذو الحدين هي فعلاً دالة كثافة احتمالية، نبدأ أولا بالشرط الأول ثم الشرط الثاني:

نـــــــــــــبرهن **أن** $f(x) \geq 0$ ، $x=0,1,2,.....n$ __ $\rangle\ o$ $\binom{n}{x}=\dfrac{n!}{x!(n-x)!}$ وأيضـــــــــــــا

p^x , $q^{n-x}=(1-p)^{n-x}$ موجبتان لجميع قيم X حيث $x=0,1,2,....,n$ و منها نستنتج أن $f(x)$ موجبة.

الشرط الثاني، يكفي البرهنة على صحة هذه العلاقة، وبعد نشر وتبسيط العبارة الأصلية نصل إلى أن المجموع يساوي الواحد كما هو موضح أسفل.

$$\sum_{x=o}^{n}\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = [(1-p)+p]^n = 1$$

أي أن $f(x)$ تحقق شروط دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي X المنفصل و يطلق عليها دالة كثافة احتمال ذو الحديين. و في هذه الحالة نقول أن المتغير العشوائي X يتبع توزيع ذو الحدين بمعلمات إحصائية هي n : عدد التجارب العشوائية ، وp: الذي يمثل احتمال النجاح، و يُرمز لذلك بالرمز $X \sim b(n,p)$.

الأمل الرياضي والتباين لتوزيع ثنائي الحدين

معالم هذا التوزيع الاحتمالي (الأمل الرياضي والتباين) موضحة في الجدول أسفل

الأمل الرياضي $E(x)$ لتوزيع ثنائي الحدين	$E(x) = n \times p$
التباين $V(x)$ لتوزيع ثنائي الحدين	$V(x) = n \times p \times q$ مع العلم أن: $q = 1 - p$

إذا يمكن استنتاج أن التباين هو جداء الأمل الرياضي واحتمال الفشل $E(x) \times q = V(x)$، هذه العلاقة مهمة

في حال التمارين التي يكون فيها احد المعالم مجهول والأخر معلوم، الأمر الذي يسهل عملية حل التمرين.

دالة التوزيع التراكمية لتوزيع ذي الحديين: دالة التوزيع الاحتمالية معطاة بالصيغة التالية

$$F(x) = p(X \leq x) = \sum_{X=0}^{x} \binom{n}{X} p^{x} \ (1-p)^{n-X} \ ,$$

ملاحظة: في غالب الأحيان نعتمد على **الجداول الإحصائية** للتوزيعات الاحتمالية المختلفة لحساب الاحتمالات، وهذه الجداول توفر قيم دوال التوزيع الاحتمالية . $F(x) = P(X \leq x)$. انظر الملاحق.

مثال

في عملية مراقبة مخزون مؤسسة تجارية، لدينا صندوق يحتوي على 100 هاتف نقال، مع العلم أن هناك 20 هواتف مُعطّلة(لديها خلل تقني)، سحبنا عينة عشوائية من 5 هواتف بطريقة عشوائية (مع إرجاع الهواتف المسحوبة). ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الهواتف المعطلة في العينة العشوائية المسحوبة من الصندوق، المطلوب،

- ما هو القانون الاحتمالي الذي يتبعه هذا المتغير العشوائي؟
- احسب العدد المتوسط للهواتف المعطلة للممكن سحبها في التجربة العشوائية الواحدة، ما هو مقدار تباين (تشتت) عدد الهواتف المعطلة المسحوبة؟
- ما هو احتمال أن يكون عدد الهواتف المعطلة المسحوبة يساوي 3؟
- ما هو احتمال أن يكون عدد الهواتف المعطلة اقل من 4؟ اكبر أو يساوي 4؟

الحل النموذجي

- من معطيات التمرين، لدينا مجموعة قيم X الممكنة هي: $\Omega_X : \{0,1,2,3,4,5\}$ أي $n=5$ واحتمال سحب هاتف مُعطل $0.2 = \frac{20}{100} = p$ ، في هذه الحالة نرمز ب $X \sim b\left(5, \frac{20}{100}\right)$ لدالة كثافة الاحتمال المتغير العشوائي، وهي معطاة بالعبارة الرياضية

$$f(x) = \binom{5}{x} \left(\frac{20}{100}\right)^x \left(\frac{80}{100}\right)^{5-x} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots.., 5$$

- العدد المتوسط للهواتف المعطلة يقابل **الأمل الرياضي** $E(x)$ ، والذي يساوي جداء احتمال الفشل في العدد الأقصى n لمجال قيم المتغير X ، بالتعويض نجد $E(x) = n \times p = 5 \times 0.2 = 1$ ، أي بالمتوسط سيكون هاتف معطل واحد من بين 5 هواتف مسحوبة.

- التباين $V(x) = n \times p \times q$، نعوض القيم المحسوبة نجد: $V(x) = 5 \times 0.2 \times 0.8 = 0.8$، يمكن حساب الانحراف المعياري $\sigma_X = \sqrt{V(x)} = \sqrt{0.8} = 0.894$، يقدر مقدار تشتت عدد الهواتف المعطلة المسحوبة ب هاتف واحد (بالتقريب إلى العدد الصحيح الأكبر).

$$P(X \le x) = \sum_{r=0}^{x} C_r^n p^r (1-p)^{n-r}$$

$p=$		0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.15	0.2
$n=2$	$x=0$	0.9801	0.9604	0.9409	0.9216	0.9025	0.8836	0.8649	0.8464	0.8281	0.8100	0.7225	0.6400
	1	0.9999	0.9996	0.9991	0.9984	0.9975	0.9964	0.9951	0.9936	0.9919	0.9900	0.9775	0.9600
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=3$	$x=0$	0.9703	0.9412	0.9127	0.8847	0.8574	0.8306	0.8044	0.7787	0.7536	0.7290	0.6141	0.5120
	1	0.9997	0.9988	0.9974	0.9953	0.9928	0.9896	0.9860	0.9818	0.9772	0.9720	0.9393	0.8960
	2	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9993	0.9990	0.9966	0.9920
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=4$	$x=0$	0.9606	0.9224	0.8853	0.8493	0.8145	0.7807	0.7481	0.7164	0.6857	0.6561	0.5220	0.4096
	1	0.9994	0.9977	0.9948	0.9909	0.9860	0.9801	0.9733	0.9656	0.9570	0.9477	0.8905	0.8192
	2	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9992	0.9987	0.9981	0.9973	0.9963	0.9880	0.9728
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9995	0.9984
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=5$	$x=0$	0.9510	0.9039	0.8587	0.8154	0.7738	0.7339	0.6957	0.6591	0.6240	0.5905	0.4437	0.3277
	1	0.9990	0.9962	0.9915	0.9852	0.9774	0.9681	0.9575	0.9456	0.9326	0.9185	0.8352	0.7373
	2	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994	0.9988	0.9980	0.9969	0.9955	0.9937	0.9914	0.9734	0.9421
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9978	0.9933
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

الشكل(5): دالة التوزيع الاحتمالية (التراكمية) لقانون ثنائي الحدين عند قيم معينة ل n و p

- احتمال أن يكون عدد الهواتف المعطلة المسحوبة يساوي 3، أي: $P(X=3) = f(3)$ هناك، طريقتان للإجابة

الطريقة الأولى: يكفي نعوض القيمة 3 في دالة الكثافة للحصول على الاحتمال

$$P(X=3) = f(3) = \binom{5}{3}\left(\frac{20}{100}\right)^3\left(\frac{80}{100}\right)^{5-3} = 0.0512$$

الطريقة الثانية: باستعمال الجدول الإحصائي (الشكل 2)، لحساب هذا الاحتمال يكون بإتباع هذه الخطوات، أولا، نحن نعلم أن $P(X \le x) = F(x)$، ونعلم أيضا أن $P(X=x) = F(x) - F(x-1)$، ونعلم أيضا أن ما هو موجود في الجدول الإحصائي هي قيم $F(x)$، إذا

$$P(X=3)=F(x=3)-F(x=2)=0.9933-0.9421=0.0512$$

- احتمال أن يكون عدد الهواتف المعطلة اقل من 4، أي $P(X<4)$، رياضيا هذه المتراجحة تطابق المساواة

$$P(X<4)=P(X=3)+P(X=2)+P(X=1)+P(X=0)$$

إذا يكفي حساب الاحتمالات الجزئية وجمعها للحصول على احتمال $P(X<4)$، كما اجبنا في حساب الاحتمال الأول، هناك طريقة دالة الكثافة الاحتمالية (وهي متعبة في هذا السؤال) وطريقة دالة التوزيع الاحتمالية (وهي أحسن وأسرع طريقة في مثل هذه الأسئلة).

الطريقة الأولى: يكفي نعوض القيم 3،2،1،0 في دالة الكثافة للحصول على الاحتمال الكلي، ونحصل على

$$P(X<4)=f(3)+f(2)+f(1)+f(0)=0.0512+0.2048+0.4096+0.3277=0.9933$$

الطريقة الثانية: باستعمال دالة التوزيع الاحتمالية في الجدول الإحصائي، المتراجحة الرياضية $P(X<4)$ تطابق المتراجحة $P(X\le 3)$ (طبعاً ضمن مجموعة الأعداد الطبيعية)، ومنه $P(X<4)=P(X\le 3)=F(3)$، من الجدول الإحصائي، $F(3)=0.9933$

- احتمال أن يكون عدد الهواتف المعطلة اكبر أو يساوي 4، أي $P(X\ge 4)$، هذا الحدث العشوائي هو عكس الحدث السابق (عدد الهواتف اقل من 4)، ومنه نستعمل خاصية الحدث العكسي والتي تنص على انّ مجموع احتمال الحدث وحدثه العكسي هو الواحد، ومنه:

$$P(X\ge 4)=1-P(X<4)=1-P(X\le 3)=1-F(3)=1-0.9933=0.0067$$

مثال نرمي ستة أحجار نرد مرة واحدة . نفرض أننا نراقب ظهور الوجه الذي يحمل الرقم (4) . أوجد دالة كثافة الاحتمال الخاصة بالمتغير X والذي يمثل ظهور الرقم (4) .

الحل

$n=6$ احتمال ظهور الرقم 4 ثابت ويساوي $p=\frac{1}{6}$. احتمال عدم ظهور الرقم 4 ثابت ايضاً $=q=(1-p)=\frac{5}{6}$ و تكون دالة كثافة الاحتمال هي

$$f(x)=\begin{cases}\binom{6}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^{x}\left(\frac{5}{6}\right)^{6-x} & , \quad , \; x=0,1,2,3,4,5,6\\ 0 & ,\end{cases}$$

خلاف ذلك يمكن استخدام دالة كثافة الاحتمال لإيجاد عدة احتمالات كان من الصعب حسابها باستخدام المبادئ الأولية للاحتمالات. فمثلاً. (1) احتمال الحصول على وجه واحد يحمل الرقم (4) يمكن الحصول عليه من دالة كثافة الاحتمال بعد تعويض قيم $n\ ,p,q,x$

$$f(1)=\binom{6}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^{1}\left(\frac{5}{6}\right)^{5}$$

- احتمال ظهور الرقم 4 مرة واحدة على الأقل عند رمي أحجار النرد، هذا الاحتمال يطابق المتراجحة $P(X\geq 1)$ ، ومنه الإجابة تكون كما يلي:

$$p(x\geq 1)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$$

نستعين بخاصية الحدث العكسي ونحصل على $P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)$

$$P(X\geq 1)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{6}=1-0.3348979=0.66511$$

ملاحظة:. إذا كان عدد المحاولات يساوى واحد $N = 1$ فأن توزيع زى الحدين يأخذ الشكل الآتي:.

$$f(x) = \begin{cases} \binom{1}{x} p^x \ (1-p)^{1-x} \ , & x = 0,1 \\ 0 & , \end{cases}$$

يمكن أن نجد كذلك الصيغة التالية في بعض المراجع

$$f(x) = \begin{cases} p^x \ (1-p)^{1-x} \ , & x = 0,1 \\ 0 & , \end{cases}$$

و يطلق علية اسم توزيع برنولى Bernoulli Distribution نسبة إلى مكتشفة الرياضي السويسري.

مثال : عند إلقاء عملة معدنية مرة واحدة فأن دالة كثافة الاحتمال للحدث العشوائي "لظهور الوجه" هي

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} \ , & x = 0,1 \\ 0 & , \end{cases}$$

و معنى هذا أن التوزيع المذكور يعتبر حالة خاصة من توزيع ذي الحديين عندما تكون $n = 1$

واضح أن هناك علاقة وثيقة بين توزيع برنوللى و توزيع ذي الحديين. فإذا تكررت محاولة برنولى n مرة و كانت X_i هي المتغير العشوائي في المحاولة i فأن المتغير $X = \sum X_i$ يتبع توزيع ذو الحدين. أي أن توزيع ذي الحدين بمعالم n, p هو مجموع n متغير عشوائي يتبع كل منها توزيع برنولى بمعلمة p . و بمعنى آخر أذا كانت $X_1, X_2, ..., X_n$ متغيرات عشوائية يتبع كل منها توزيع برنولى بمعلمة p فأن $X = \sum X_i$ ، يتبع توزيع ذي الحدين بمعالم p, n .

2– التوزيع الاحتمالي لبواسون Poisson Distribution

في الحياة العملية أحيانا ما نقابل بعض الظواهر التي ينطبق عليها شروط توزيع ذي الحدين و لكن هذه الحوادث تكون نادرة الوقوع و هذا يعني أن احتمال النجاح يكون صغير جدا يقترب من الصفر و علية فأنة يمكن القول أن $n\,p=\lambda$ حيث λ هي مقدار ثابت و بذلك يكون احتمال الفشل كبير أي أنة يقترب من الواحد. و لكي نراقب بعض حالات النجاح فأننا سنجد أن n سوف تكون كبيرة جدا فمثلا لو أردنا حساب احتمال خروج القطار من على السكة الحديدية فأننا سنقوم بمراقبة القطارات أو عدد كبير جدا منها و نحسب عدد مرات خروج القطار من على الشريط أي حالات النجاح (التي حققت فيها الحادثة) حتى نستطيع أن نحسب الاحتمال.و بذلك تكون شروط هذا التوزيع كالآتي:

- ✓ أن يكون احتمال النجاح ثابت و كذلك احتمال الفشل في كل محاولة و يرمز لهما بالرمز q, p على الترتيب.
- ✓ أن يكون احتمال النجاح صغيرا و يقترب من الصفر و احتمال الفشل يقترب من الواحد الصحيح.
- ✓ أن تكون عدد المحاولات كبيرا جدا حيث أن $= n\,p= \lambda$ مقدار ثابت.

و يعتبر توزيع بواسون من أهم التوزيعات في المسائل المتعلقة بالمكالمات الهاتفية و حركة المرور، وبعض الظواهر النادرة مثل الزلزال، و الحرائق، حوادث سقوط الطائرات، عدد الأخطاء المطبعية في صفحة ما من كتاب و غير ذلك. و دالة كثافة الاحتمال لتوزيع بواسون هي :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{x}\ e^{-\lambda}}{x\ !} & , \qquad x = 0,1,2,3,.......... \\ 0 & , \end{cases}$$

حيث $e = 2.718$ تمثل مقدار ثابت، وقيمة λ تحسب كما يلي: $\lambda = n\ p$.

و تأخذ X قيما صحيحة موجبة اعتبارا من الصفر إلى ما لا نهاية. إثبات أنها دالة كثافة احتمال، يلاحظ أن المتسلسلة

$$e^{\lambda} = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \,........ = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

حيث $\lambda \rangle 0$

و حيث أن $\lambda \rangle 0$ في $\therefore f(x)$

$$f(x) \geq 0$$

$$\therefore \sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = e^0 = 1$$

الدالة $f(x)$ تحقق شروط دالة كثافة احتمال لمتغير عشوائي منقطع.

دالة التوزيع التراكمية لتوزيع بواسون

$$F(x) = p(X \leq x) = \sum_{x=0}^{x} f(x) \qquad X \geq o$$

$$F(x) = \sum_{x=0}^{x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad X \geq 0$$

الأمل الرياضي والتباين لتوزيع بواسون:

خاصية أساسية في التوزيع الاحتمالي لبواسون هي: **الأمل الرياضي يساوي التباين،** $V(x) = E(x) = \lambda$

يمكن البرهنة على هذه المساواة بين الأمل الرياضي والتباين، باستعمال الدالة المولدة للعزوم (التي لم نتطرق إليها في هذا المستوى)، وهي دالة رياضية معرفة كما يلي: $M(t)=E(e^{tx})$ ، وهي تمثل الأمل الرياضي للدالة e^{tx}, حيث $t\in R$، (في الملاحق وضعنا جدول يحتوي على كل دوال العزوم للتوزيعات الاحتمالية المشهورة). دالة العزوم بالنسبة لتوزيع بواسون هي: $M(t)= e^{-\lambda(1-e^t)}$. نستخدم هذه الدالة لحساب الأمل الرياضي والتباين كما يلي:

العزم من الدرجة (k) ما هو إلا مشتق دالة العزوم من الرتبة (k) عند قيمة $t = 0$ ، رياضياً العلاقة معرفة كما يلي، $m_k = M^{(k)}(0)$ ، ونعلم أن العزم من الدرجة (1) يقابل الأمل الرياضي، والتباين هو الفرق بين العزم من الدرجة (2) ومربع العزم الأول (أي مربع الأمل الرياضي)

باتباع هذه القاعدة الرياضية، يمكننا حساب الأمل الرياضي والتباين لتوزيع بواسون كما يلي

الأمل الرياضي $E(x)$

المشتق الأول لدالة العزوم الخاصة بتوزيع بواسون هي: $M'(t) = e^{\lambda(e^t-1)}\ \lambda\ e^t = \lambda\ e^{t+\lambda(e^t-1)}$، ومنه الأمل الرياضي $E(x)=m_k=M^{(k)}(0)=\lambda$.

التباين $V(x)$

المشتق الثاني لدالة العزوم الخاصة بتوزيع بواسون هي: $M''(t)=e^{\lambda(e^t-1)}\ \lambda e^t+\left(\lambda\ e^t\right)^2 e^{\lambda(e^t-1)}$، ومنه العزم من الدرجة الثانية $m_2=M^{(2)}(0)=\lambda+\lambda^2$، وذكرنا أنّ $V(x)=m_2-(m_1)^2$ بالتعويض نجد: $V(x)=\lambda+\lambda^2-\lambda^2=\lambda$. ومنه تتأكد الخاصية التي ذكرناها في الصفحة السابقة بان: $V(x)=E(x)=\lambda$

مثال في مؤسسة إنتاجية للمصابيح الكهربائية، تضمن تقرير خاص لمراقب النوعية في هذه المؤسسة أن نسبة الوحدات المعيبة في إنتاج نوع من المصابيح الكهربائية هي 2% وان عدد الوحدات المعيبة يتبع توزيع بواسون. نفرض أننا سحبنا عينة عشوائية من عشرة مصابيح. المطلوب

1. إيجاد التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير الإحصائي.
2. احتمال الحصول على مصباح واحد معيب.
3. احتمال الحصول على مصباح معيب على الأكثر.

الحل

إذا علمنا أن المتغير الإحصائي (عدد الوحدات المعيبة) يتبع توزيع "بواسون"، تحت شرط نسبة $2\ \%$ كإنتاج معيب، إذا $\lambda = n\,p = (10)\ (0.02) = 0.2$.

ومنه دالة كثافة الاحتمال هي $x = 0,1,2,........$ $$f(x) = \frac{e^{-0.2}\ (0.2)^x}{x\,!}$$

1- احتمال الحصول على مصباح معيب، يمكن الاعتماد على دالة الكثافة الاحتمالية لحساب هذا الاحتمال:

$$f(1) = \frac{e^{-0.2}\ (0.2)}{1!} = \frac{0.2}{e^{+0.2}} = 0.163746$$

<u>الطريقة الثانية</u>: باستعمال الجدول الإحصائي لقانون "بواسون" (الشكل 3)، لحساب هذا الاحتمال يكون بإتباع هذه الخطوات، أولا، نحن نعلم أن $P(X \le x) = F(x)$، ونعلم أيضا أن $P(X = x) = F(x) - F(x-1)$، ونعلم أيضا أن ما هو موجود في الجدول الإحصائي هي قيم $F(x)$، إذا، $P(X = 1) = F(1) - F(0)$، عند قيمة $\lambda = 0.2$،

$$P(X \le x) = \sum_{r=0}^{x} \lambda^{r} \frac{e^{-\lambda}}{r!}$$

$\lambda=$		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$x=$	0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065
	1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098
	2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856
	3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982
	4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

الشكل (6): مستخرج من الجدول الإحصائي لقانون توزيع بواسون، (انظر الملاحق)

بالتعويض نجد أن

$$P(X=1)=0.9825-0.8187=0.1638$$

وهي نفس النتيجة عند استعمال دالة الكثافة الاحتمالية.

2- احتمال الحصول على وحدة معيبة على الأكثر.

$$\begin{aligned} p(X \le 1) &= F(1) = \sum_{x=0}^{1} e^{-0.2}\ (0.2)^{x} \\ &= e^{-0.2} + e^{-0.2}\ (0.2) \\ &= e^{-0.2}\ (1+0.2) \\ &= e^{-0.2}\ (1.2) = 0.9825 \end{aligned}$$

الطريقة الثانية باستعمال الجدول الإحصائي، سهلة جداً وسريعة، نقرأ في الجدول مباشرة (الشكل 2) عند قيمة $\lambda = 0.2$، وعند قيمة $x=1$ نجد مباشرة أن قيمة الاحتمال المقابل للحصول على مصباح معيب على الأكثر هو: $p(X \le 1) = F(1) = 0.9825$

3- التوزيع الاحتمالي فوق-الهندسي The Hyper-Geometric Distribution

في التوزيعيين السابقين (توزيع ثنائي الحدين و توزيع بواسون) افترضنا أن احتمال النجاح ثابت من محاولة إلى أخرى أي أن الأحداث مستقلة. كما افترضنا في توزيع بواسون أن عدد المحاولات كبير جدا و الآن نريد أن نتعرف على توزيع يكون احتمال النجاح فيه غير ثابت و عدد المحاولات لا يمكن أن يكون كبير. و هذا التوزيع يصلح للمجتمعات المحدودة عندما يكون السحب بدون إرجاع.

للتعرف على دالة هذا التوزيع نفترض أن:

افتراض 1

- حجم المجتمع محدود N

افتراض 2

- نفرض أن هذا المجتمع مقسم إلى جزئين الأول يتكون من M وحدة لها خاصية معينة، و الجزء الثاني مكون من N – M وحدة و ليس له هذه الخاصية

افتراض 3

- نفرض أننا أخذنا عينة بطريقة عشوائية من هذا المجتمع حجمها n و كان السحب أو اختيار مفردات هذه العينة بدون إرجاع أي أن (الحوادث غير مستقلة). فطبيعي أن احتمال النجاح في كل محاولة سوف يختلف.

تحت هذه الشروط (أو الافتراضات) يكون المتغير الإحصائي x يتبع القانون الاحتمالي "فوق- الهندسي" والذي يأخذ دالة كثافة الاحتمال الخاصة التالية :

$$f(x) = p_r\ (X = x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad , \quad x = 0,1,2,\ldots\ldots\ldots , n$$

مثال: أثناء مراقبة دورية لحالة المنتوج في مؤسسة، اكتشف المراقب تلف جزئي لعدة صناديق في وحدة التخزين، وأن كل صندوق يحتوى على 25 وحدة منها 10 وحدات معيبة (تالفة)، نفرض أننا سحبنا عينة مكونة من خمسة وحدات بطريقة عشوائية من احد الصناديق، وكان السحب بدون إرجاع. المطلوب اوجد احتمال الحصول على (5) وحدات سليمة و كذلك احتمال الحصول على (4) وحدات معيبة.

الحل

حيث السحب بدون إرجاع فأن دالة كثافة الاحتمال تأخذ الشكل الآتي :

$$f(x) = \frac{\binom{10}{x}\binom{25-10}{5-x}}{\binom{25}{5}}$$

و منه احتمال الحصول على خمسة وحدات سليمة يطابق ويساوي احتمال عدم الحصول على وحدات معيبة، أي $p(X=0)$ هو

$$p(X=0) = f(0) = \frac{\binom{10}{0}\binom{15}{5}}{\binom{25}{5}} = \frac{\binom{15}{5}}{\binom{25}{5}} = 0.0565$$

واحتمال الحصول على 4 وحدات معيبة (تالفة)، أي $p(X=4)$ هو:

$$p(X=4) = f(4) = \frac{\binom{10}{4}\binom{15}{5-4}}{\binom{25}{5}} = 0.0593$$

الوسط الحسابي و الانحراف المعياري لتوزيع فوق الهندسي

إذا كان المتغير العشوائي X تتوزع حسب قانون "فوق–الهندسي" فإن:

- الوسط الحسابي للمتغير العشوائي يساوي: $\mu = E(x) = n \cdot \frac{M}{N}$
- والتباين يساوي: $Var(x) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{N-M}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$

أي أن المتوسط $n\frac{M}{N} = \mu = E(x)$ حجم العينة مضروباً في احتمال النجاح في المجتمع. (و الانحراف المعياري) 2 = التباين = حجم العينة مضروباً في $\frac{M}{N}$ و هو احتمال النجاح في المجتمع مضروبا في $\left(1-\frac{M}{N} = \frac{N-M}{N}\right)$ و هو احتمال الفشل في المجتمع مضروبا في $\frac{N-n}{N-1}$ ⇐ و هو مقدار يساوى الواحد الصحيح عندما يكون السحب بإرجاع و يطلق علية اسم التصحيح للمجتمعات المحدودة.

البرهان

$$\mu = E(x) = \sum_{x=o}^{n} x \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \sum_{x=0}^{n} x\, f(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x \frac{M!}{x!(M-x)!} \binom{N-M}{n-x} \Big/ \binom{N}{n}$$

نفس الأمر مع الانحراف المعياري لتوزيع فوق–الهندسي الذي يساوي الانحراف المعياري لتوزيع ذي الحدين مضروباً في المقدار $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ (الذي يسمى بمعامل تصحيح المجتمعات)

دالة التوزيع التراكمية لقانون الاحتمالي "فوق الهندسي"

$$F(x) = p(X \le x) = \sum_{x=0}^{x} \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad 0 \le x \le n$$

تقريب ذي الحدين كتقريب لتوزيع فوق–الهندسي

يمكن استخدام توزيع ذي الحدين كتقريب للحالات التي يطبق عليها توزيع فوق–الهندسي بشرط ألا تكون (N) صغيرة جدا. ويمكن استعمال العلاقة التالية: إذا كان $\frac{n}{N} \le 0{,}05$.

ملاحظة إذا وضعنا $p = \frac{M}{N}$ فأن الوسط الحسابي $\mu = n\frac{M}{N} = np$ لتوزيع "فوق الهندسي" يكون مساويا للوسط الحسابي لتوزيع ذي الحدين.

$$\frac{N-M}{N} = 1 - \frac{M}{N} = 1 - p$$

$$\sqrt{Var(x)} = \sqrt{n\,p(1-p)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$

مثال عينة مكونة من (5) وحدات اختيرت بطريقة عشوائية من مجموعة مكونة من (50) وحدة تحتوى على (5) وحدات معيبة و المطلوب حساب الاحتمالات المختلفة باستخدام ذي الحدين و التوزيع فوق–الهندسي و المقارنة بينهما.

الحل

أولا إذا افترضنا أن السحب تم بإرجاع فأن احتمال النجاح سوف يكون ثابتا و مقداره $P = \frac{5}{50} = 0.1$ و بذلك يكون احتمال الفشل $q = 1 - 0.1 = 0.9$ و تكون دالة التوزيع الاحتمال لتوزيع زى الحدين هي

$$f(x)=\binom{5}{x}(0.1)^{x}\ (0.9)^{5-x} \quad , \quad x=0,1,2,3,4,5$$

و بالتعويض يقيم X المختلفة نحصل على $f(x)$ الموضحة في الجدول.

ثانيا إذا كان السحب بدون إرجاع فأن احتمال النجاح و كذلك احتمال الفشل غير ثابت و تكون دالة كثافة

الاحتمال لتوزيع فوق–الهندسي هي $f(x)=\dfrac{\binom{5}{x}\binom{45}{5-x}}{\binom{50}{5}} \quad , \quad x=0,1,2,3,4,5$

و بالتعويض بقيمx المختلفة نحسب $f(x)$ الموضحة بالجدول الآتي :

الجدول (8): جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي، باستعمال قانون ثنائي الحدين و فوق–الهندسي

X : عدد الوحدات المعيبة	الاحتمالات باستعمال توزيع **ثنائي الحدين**	الاحتمالات باستعمال توزيع **فوق–الهندسي**
0	0.5949	0.5766
1	0.32805	0.35336
2	0.0729	0.06392
3	0.0081	0.0005
4	0.00045	0.00011
5	0.00001	0.0000015

المصدر: من إعداد الباحث

يتضح من الجدول أن الاحتمالات تقترب من بعضها و بذلك يمكن اعتبار توزيع زى الحدين تقريب جيد لتوزيع فوق-الهندسي عندما تكون n ليست صغيرة جدا. و لكن يجل أن ننوه إلى أن في حالة السحب بإرجاع يكون توزيع ثنائي الحدين هو الذي يعطى الاحتمال المضبوط أما في حالة السحب بدون إرجاع فأن توزيع فوق-الهندسي يعطى الاحتمال المضبوط.

ثانياً: القوانين الاحتمالية المتصلة: قانون التوزيع الطبيعي

(Continuos Probability Distributions)

كتذكير لما تطرقنا إليه في محور المتغيرات العشوائية، غالباً ما توصف العمليات العشوائية إما بدالة الكثافة الاحتمالية أو دالة التوزيع الاحتمالية. وتكون دالة الكثافة الاحتمالية، المشار إليها هنا بالعلامة $f(x)$ للمتغير x، بحيث أن الاحتمال لكي يأخذ المتغير x قيمة في الفاصل المتناهي الصغر بين x و $x+dx$ يكون $f(x)dx$. وتعطى دالة التوزيع التراكمية(الاحتمالية) المسماة $F(x)$ احتمال أن يأخذ المتغير قيمة أصغر من x. أي تكون العلاقة بين الدوال كما يلي:

$$F(x)=\int_{c}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{أو ،} \quad f(x)=\frac{d}{dx}\left[F(x)\right]$$

حيث: c هي الحد الأدنى للقيم التي يمكن أن تأخذها t.

نجد أهم التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات الكمية المتصلة،

التوزيع الطبيعي (Normal Distribution)	توزيع لوغاريتمي طبيعي (Log-Normal Distribution	توزيع كاي χ^2 لبيرسون Chi-Squared Distribution (***)	توزيع غاما و التوزيع الأسي: Gamma Distribution and Exponential Distribution

(***): يُستعمل أساسا في الاستدلال الإحصائي ونظرية الاختبارات الإحصائية، وسيكون الطالب في حاجة إليه بقوة في **مقياس الاحصاء3** بحول الله.

نهتم في هذا المستوى بالتوزيع الطبيعي (Normal Distribution)، وتبقى التوزيعات الاحتمالية الأخرى من اجتهاد الطالب(ولقد وضعنا ملخص لأهم هذه التوزيعات وخصائصها الشكل الرياضي لدوالها الاحتمالية في الملاحق).

1- التوزيع الطبيعي Normal Distribution

يُعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات المتصلة حيث يلعب دوراً أساسياً في عملية المعاينة Sampling ، كما يستخدم لوصف الأنماط التكرارية للعديد من الظواهر الإحصائية مثل التغيرات الطبيعية التي تحدث للإنسان والحيوان والعوامل البيئية بشكل عام . والتوزيع الطبيعي يدرس سلوك المتغيرات العشوائية المتصلة مثل درجة الحرارة والطول والوزن والدخل والأخطاء العشوائية الناتجة عند تحليل الانحدار.

وبدراسة شكل منحنى التوزيع الطبيعي نجد أنه منحنى متماثل حول الوسط الحسابي للتوزيع ، ويأخذ الشكل الجرسى وله قمة واحدة ويمتد طرفاه إلى ما لانهاية مقتربين من المحور الأفقى شيئا فشيئا دون أن يتماسا مع هذا المحور . وإذا أسقطنا عموداً من قمة المنحنى على المحور الأفقى فإن هذا العمود يعتبر محوراً للتماثل لأنه يقسم المساحة تحتي المنحنى إلى قسمين متساويين تماماً وينطبق كل منهما على الآخر تمام الانطباق ومساحة كل قسم تساوي 50% من المساحة الكلية تحت المنحنى وينتج عن هذا التماثل أن قيم الوسط الحسابي والوسيط والمنوال للتوزيع الطبيعي تكون متساوية .

وحيث أن التوزيع الطبيعي يعبر عن متغيرات عشوائية متصلة فإننا لا نستطيع استخدام دالة التوزيع له لإيجاد احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي الذي يتبعه لقيمة معينة حيث أن هذا الاحتمال يساوى صفراً . ولكن يمكن استخدام دالة التوزيع الطبيعي لإيجاد احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي أقل من قيمة معينة أو أكثر من قيمة معينة أو تقع قيمته بين قيمتين معلومتين.

وترجع أهمية التوزيع الطبيعي إلى الأسباب الآتية :

1. يستخدم التوزيع الطبيعي في وصف العديد من المتغيرات العشوائية في الواقع العملي مثل الأطوال والأوزان لمجموعة من الأشخاص ، درجات الطلاب في امتحان مقرر معين ، أخطاء القياس الناتجة من تجربة ما ، حيث تتوزع القياسات المشاهدة (التكرارات) بشكل متماثل حول قيمة مركزية هي قيمة متوسط التوزيع وتقل هذه القياسات تدريجيا كلما ابتعدنا عن هذه القيمة إلى جهة اليمين أو إلى جهة اليسار ، حيث يأخذ منحنى التوزيع الشكل الجرسى .

2. يعتبر التوزيع الطبيعي تقريبا مفيدا للعديد من التوزيعات المتقطعة وغير المتقطعة مثل توزيع ذي الحدين وتوزيع بواسون وتوزيع فوق الهندسي وغيرها .

الأساس الرياضي لقانون التوزيع الطبيعي

ينطبق هذا التوزيع على متغير مستمر بأي إشارة جبرية. تكون كثافة الاحتمال من نمط: $f(x)=e^{-T(x)}$ ، والتي تُسمى عائلة التوزيعات الآسية (Exponential Family)، حيث $T(x)$ دالة متعددة الحدود من الدرجة الثانية غير سالبة. فإذا استعملنا كمعلمات المتوسط m والانحراف المعياري σ، فإن $f(x)$ تُكتب بالصيغة الرياضية التالية:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right]$$

عن طريق حساب تكامل دالة الكثافة في المجال $]-\infty,x[$ ، نحصل على صيغة دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2\right]\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[1+\operatorname{erf}\left(\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]$$

حيث $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2}\, dt$ ، تمثل دالة الخطأ (Error Function)، وهي دالة مركبة لمتغير مركب.

ملاحظة: لأغراض الحسابات العملية، يمكن تمثيل $F(x)$ بدوال تقريبية، فمثلاً تعتبر الدالة التالية صالحة لمتغير

x موجب مع خطأ نسبي أقل من $(2,8 \times 10^{-3})$:

$$1 - F(x) = \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}\left(0.661\, x + 0.339\sqrt{x^2 + 5.51}\right)}$$

دالة كثافة الاحتمال Probability Density Function

إذا كان X متغيرا عشوائيا متصلا يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وانحراف معياري σ فإن دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي X تعطى بالعلاقة :

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad , -\infty < \mathbf{X} < \infty$$

$$, -\infty < \mu < \infty \qquad , \sigma > 0$$

وحيث أن استخدام هذه الدالة لحساب الاحتمالات المختلفة تكتنفه صعوبات رياضية كثيرة تعتمد بالدرجة الأولى على معرفة تامة بتقنيات التكامل الرياضي، علاوة على أنه كما ذكرنا يوجد عدد لا نهائي من التوزيعات الطبيعية والتي تحدد كل منها قيم المعلمتين μ ، σ فإنه لحسن الحظ يمكن تحويل أي توزيع طبيعي إلى توزيع

طبيعي قياسي له جداول خاصة تعرف باسم جداول المساحات تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري متي علم متوسطه وانحرافه المعياري .(انظر الملاحق).

2- التوزيع الطبيعي المعياري Standard Normal Distribution

إذا كان X متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وانحراف معياري σ فإن Z تتبع التوزيع الطبيعي المعياري بمتوسط صفر، وانحراف معياري يساوي الواحد الصحيح حيث:

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{X} - \mu}{\sigma}$$

وتسمى Z أيضا بالقيمة المعيارية أو الدرجة المعيارية وهي تساعد على إيجاد المساحة أو الاحتمال المطلوب أسفل أي منحنى توزيع طبيعي وذلك باستخدام جدول المساحات تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري . هذا وتأخذ دالة كثافة الاحتمال للمتغير Z الشكل الآتي :

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{1}{2}Z^2\right)} \qquad , -\infty < \mathbf{Z} < \infty$$

ومن الجدير بالذكر هنا أن الدالة لا تعتمد على معالم مجهولة القيمة وبالتالي فقد استخدمت في حساب جدول المساحات تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري المشار إليه.

خصائص المنحنى الطبيعي المعياري

- ✓ المساحة الكلية تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري تساوى الواحد الصحيح بحيث يقسم الخط العمودي الواصل من قمة المنحنى إلى الصفر (متوسط التوزيع) المساحة إلى قسمين متساويين مساحة كل منهما تساوي 0.05

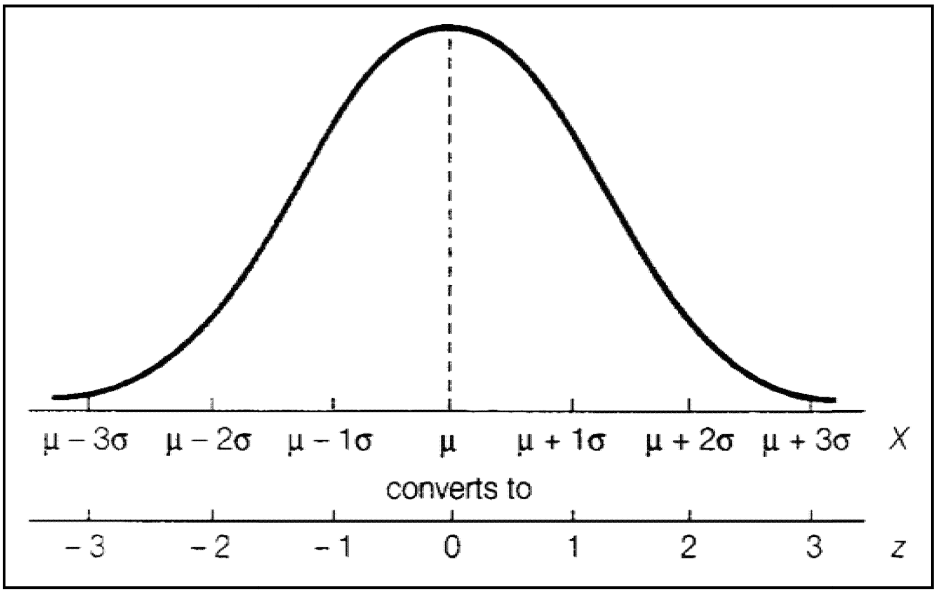
✓ منحنى التوزيع الطبيعي المعياري متماثل حول متوسطه ، وبالتالي فإن التواءه يساوى صفر وتفرطحه يساوى 3 .

✓ المساحة المحصورة بين 1 ± درجة معيارية تساوى 68.26 % تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى . والمساحة المحصورة بين 2 ± درجة معيارية تساوى 95.44 % تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى . أما المساحة المحصورة بين 3 ± درجات معيارية تساوى 99.74 % تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى . هذا ويمكن التعبير عن ذلك رمزيا كالآتي :

$$P(-1 < Z < 1) = 0.6826$$

$$P(-2 < Z < 2) = 0.9544$$

$$P((-3 < Z < 3) = 0.9974$$



الشكل (7): التمثيل البياني لدالة التوزيع الاحتمالية للقانون الطبيعي مع الإشارة لأهم خصائصها

مثال تطبيقي (1)

إذا كان العمر الافتراضي لمشغل الأقراص المرنة والمنتج بمعرفة إحدى شركات الكمبيوتر يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 1000 ساعة وانحراف معياري 100 ساعة . فإذا تم اختيار وحدة مشغل من إنتاج هذه الشركة بطريقة عشوائية ، فأوجد احتمال أن يكون عمرها الافتراضي :

1. بين 1000 ، 1150 ساعة .
2. أقل من 930 ساعة .
3. أكبر من 780 ساعة .
4. بين 700 ، 1200 ساعة .
5. بين 750 ، 850 ساعة .

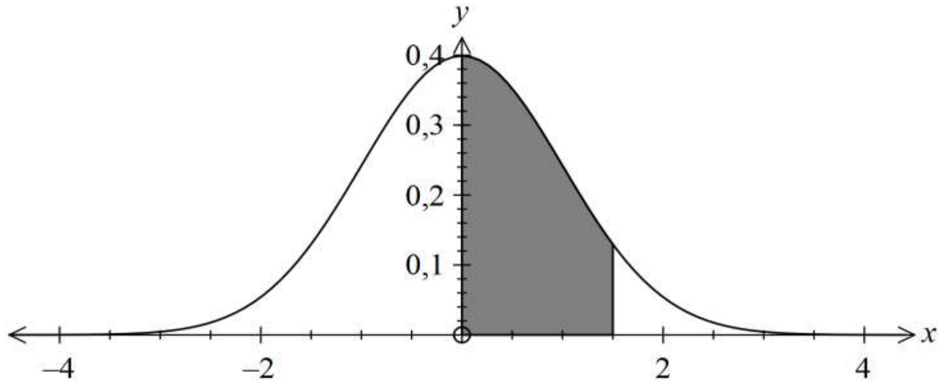
الحل النموذجي للمثال

نفرض أن المتغير العشوائي χ يعبر عن العمر الافتراضي لمشغل الأقراص المرنة ، أى أن : المتوسط $\mu = 1000$ ساعة و الانحراف المعياري $\sigma = 100$ ساعة

1. احتمال أن يكون العمر الافتراضي لمشغل الأقراص المرنة بين 1000 ، 1150 ساعة

$$P(1000 \leq X \leq 1150) = P\left(\frac{1000-1000}{100} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{1150-1000}{100}\right)$$

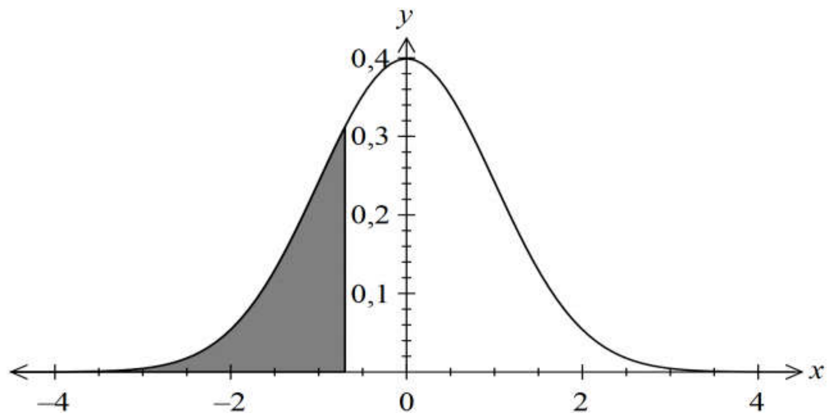
$$= P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$$



2– احتمال أن يكون العمر الافتراضي لمشغل الأقراص المرنة أقل من 930 ساعة

$$P(X<930)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{930-1000}{100}\right)=p\left(Z<\frac{-70}{100}\right)$$

$$=p(Z<-0.7)=0.5-0.2580=0.2420$$



3– احتمال أن يكون العمر الافتراضي لمشغل الأقراص المرنة أكبر من 780 ساعة

$$P(X>780)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{780-1000}{100}\right)=P\left(Z>\frac{-220}{100}\right)$$

$$=P(Z>-2.2)=0.5+P(-2.2<Z<0)$$

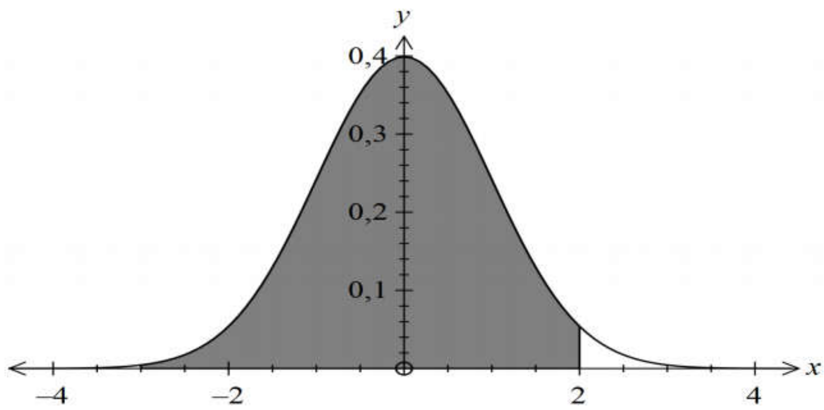
$$= 0.5 + P(0 < Z < 2.2)$$
$$= 0.5 + 0.4861 = 0.9861$$

4- احتمـــــال أن يكـــــون العمـــــر الافتراضـــــي لمشـــــغل الأقـــــراص المرنـــــة بين 700 ، 1200 ساعة

$$p(700 \le X \le 1200) = P\left(\frac{700-1000}{100} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{1200-1000}{100}\right)$$

$$= P\left(\frac{-300}{100} \le Z \le \frac{200}{100}\right) = P(-3 \le Z \le 2)$$

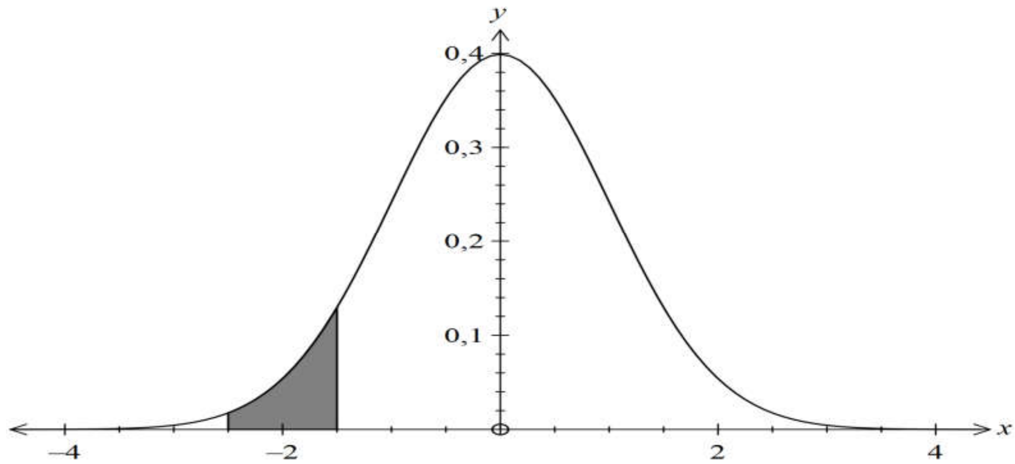
$$= P(-3 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 2)$$
$$= P(0 \le Z \le 3) + P(0 \le Z \le 2)$$
$$= 0.4987 + 0.4772 = 0.9759$$



احتمـــــال أن يكـــــون العمـــــر الافتراضـــــي لمشـــــغل الأقـــــراص المرنـــــة بين 750 ، 850 ساعة

$$P(750 \le X \le 850) = P\left(\frac{750-1000}{100} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{850-1000}{100}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= P\left(\frac{-250}{100} \le Z \le \frac{-150}{100}\right) \\
&= P(-2.50 \le Z \le -1.50) \\
&= P(-2.50 \le Z \le 0) - P(-1.50 \le Z \le 0) \\
&= P(0 \le Z \le 2.50) - P(0 \le Z \le 1.50) \\
&= 0.4938 - 0.4332 = 0.0606
\end{aligned}$$



التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين : يمكن استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين إذا تحققت الشروط الآتية :

- حجم العينة يكون كبيرا ($n \ge 30$)
- المتوسط يكون أكبر من أو يساوى 5 ($\mu = np \ge 5$)
- التباين يكون أكبر من أو يساوى 5 ($\sigma^2 = np\,(1-p) \ge 5$)

مثال تطبيقي (2)

إذا كانت نسبة الوحدات المعيبة المنتجة بواسطة إحدى الآلات هي 15% ، فإذا تم اختيار عينة حجمها 150 وحدة بطريقة عشوائية من إنتاج هذه الآلة . فاحسب احتمال أن تحتوى هذه العينة على :

1. أقل من 20 وحدة معيبة .
2. 20 وحدة معيبة على الأقل .
3. ما بين 15 ، 20 وحدة معيبة .
4. أكثر من 18 وحدة معيبة .
5. أكثر من 28 وحدة معيبة .

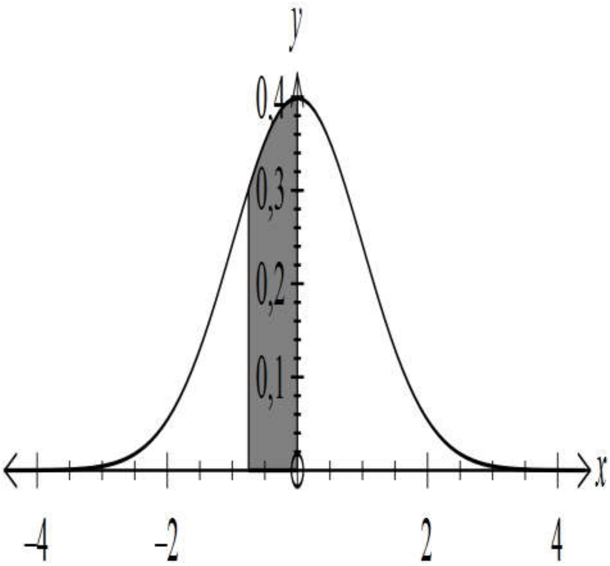
الحل النموذجي للمثال:

نلاحظ أن شروط استخدام التوزيع الطبيعة كتقريب لتوزيع ذي الحدين متوفرة حيث أن :

$\sigma 2 = np(1-p) = 150 \times 0.15 \times 0.85 = 19.125 > 5$	$\mu = np = 150 \times 0.15 = 22.5 > 5$	$n = 150 > 30$

وعلى فرض أن المتغير العشوائي X يعبر عن عدد الوحدات المعيبة فإن الاحتمالات المطلوبة يمكن حسابها كالآتي :

احتمال أن تحتوى العينة على أقل من 20 وحدة معيبة

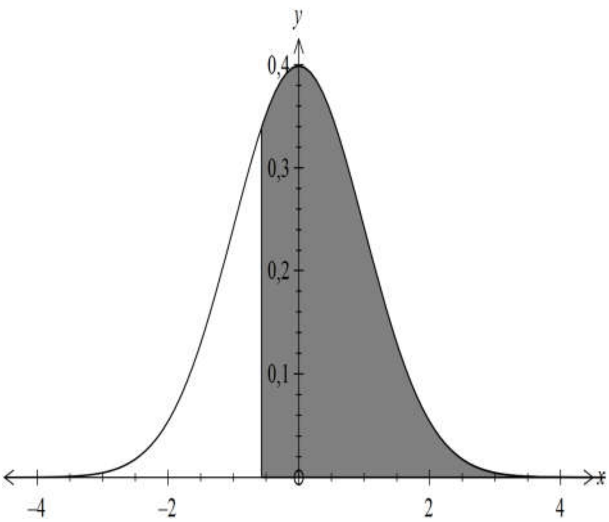


$$P(X<20)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{20-22.5}{4.4}\right)$$

$$=p\left(Z<\frac{-2.5}{4.4}\right)$$

$$=p(Z<-0.57)$$
$$=0.5-p(-0.57<Z<0)$$
$$=0.5-P(0<Z<0.57)$$
$$=0.5-0.2157=0.2843$$

احتمال أن تحتوى العينة على 20 وحدة معيبة على الأقل

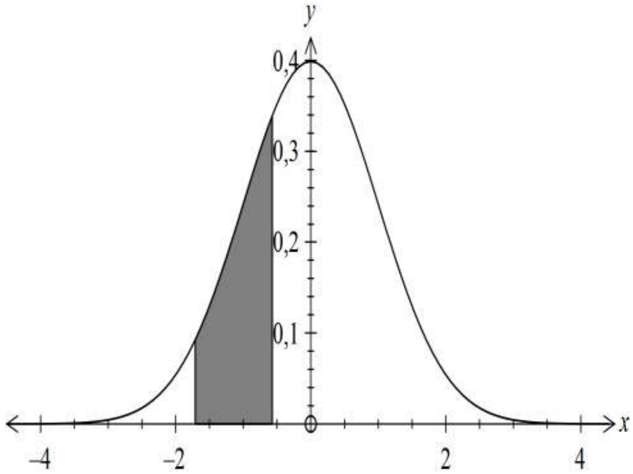


$$P(X\geq 20)=P(\frac{X-\mu}{\sigma}\geq\frac{20-22.5}{4.4})$$

$$=p(Z\geq -0.57)$$
$$=0.5+p(-0.57\leq Z\leq 0)$$

$$=0.5+P(0\leq Z\leq 0.57)$$
$$=0.5+0.2157=0.7157$$

احتمال أن تحتوى العينة على ما بين 15 ، 20 وحدة معيبة



$$P(15 \leq X \leq 20) =$$

$$P\left(\frac{15-22.5}{4.4} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{20-22.5}{4.4}\right)$$

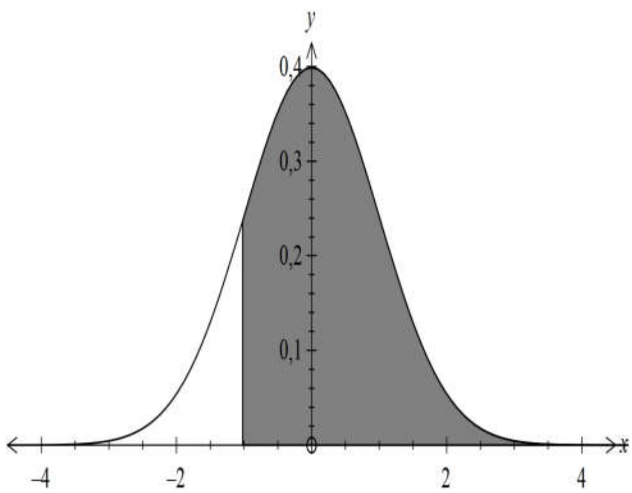
$$= P(-1.71 \leq Z \leq -0.57)$$

$$= P(-1.71 \leq Z \leq 0) - p(-0.57 \leq Z \leq 0)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1.71) - P(0 \leq Z \leq 0.57)$$

$$= 0.4564 - 0.2157 = 0.2407$$

احتمال أن تحتوى العينة على أكثر من 18 وحدة معيبة



$$P(X > 18) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{18-22.5}{4.4}\right)$$

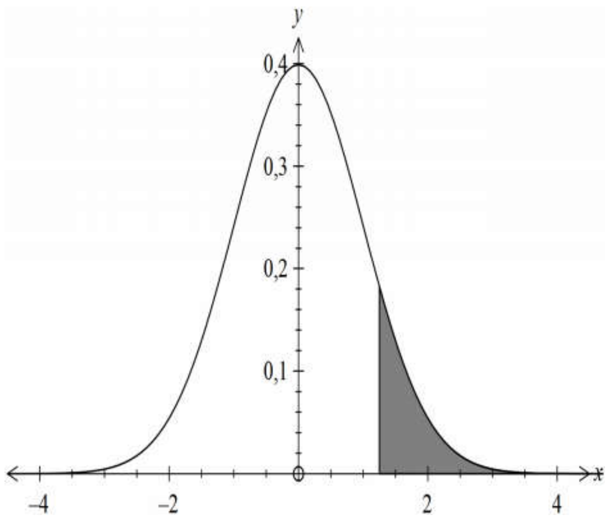
$$= P\left(Z > \frac{-4.5}{4.4}\right) = P(Z > -1.02)$$

$$= 0.5 + P(-1.02 < Z < 0)$$

$$= 0.5 + P(0 < Z < 1.02)$$

$$= 0.5 + 0.3461 = 0.8461$$

احتمال أن تحتوى العينة على أكثر من 28 وحدة معيبة



$$P(X > 28) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{28-22.5}{4.4}\right)$$

$$= P\left(Z > \frac{5.5}{4.4}\right) = P(Z > 1.25)$$

$$= 0.5 - P(0 < Z < 1.25)$$

$$= 0.5 - 0.3944 = 0.1056$$

الخاتمة العامة

في هذه المطبوعة العلمية حاولنا قدر الإمكان تلخيص وتبسيط أهم المفاهيم الأولية لنظرية الاحتمالات مع التعريج على دراسة بعض التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المنفصلة (المتقطعة) والمتصلة (المستمرة). نرجو أن يلبي هذا الإنتاج العلمي حاجة الطلبة في السنة الأولى جذع مشترك علوم اقتصادية وتجارية وعلوم التسيير على وجه الخصوص وكل مهتم بهذه النظرية وتطبيقاتها عموماً.

المجهود المبذول في إخراج هذه المطبوعة كان كبيراً ومُضنياً للباحث، ونرجوا من وراءه الإخلاص في سبيل العلم والعلم فقط، ورغم ذلك فهذا الكتيب العلمي هو قطرة في بحر علوم نظرية الاحتمالات والإحصاء الرياضي، والطالب مطالب بالإطلاع والبحث أكثر في أهم المراجع العربية والأجنبية الشاملة في هذا الموضوع.

لا ننسى فضل الأساتذة الأفاضل محكّمي هذه المطبوعة، الدكتور: "**قطوش عبد الحميد**" والدكتور" **مرابط ساعد**"، الذين بدلوا الجهد والوقت من اجل تقديم الملاحظات وتصويب الخطأ وإثراء المحتوى فلهم جزيل الشكر والامتنان، ونسأل الله أن يتقبل جهدهم ويبارك في علمهم وأوقاتهم.