3

المحـــــاضـــرة

استخدام الطريقة البيانية لحل مسائل البرمجة الخطية
(مشكلة التعظيمMax)
(مشكلة التخفيض Min)

1- تعريف طريقة البيانية.

2- خطوات طريق الحل البياني.

3- أمثلة تطبيقية حول تطبيق الطريقة في حالة "Max" و"Min".

تمهيــد:

هناك عدة طرق يتم بواسطتها حل المشاكل البرمجة الخطية ويعتمد استخدام إحدى هذه الطرق دون غيرها على طبيعة وحجم المشكلة موضوع البحث، أو رغبة الجهة متخذة القرار،ومن أهم هذه الطرق الطريقة الجبرية، طريقة الرسم البياني الطريقة المبسطة، فالطريقة الجبرية يتم فيها حل المسألة على أساس أنها مجموعة من المعادلات من الدرجة الأولى وما يأخذ على هذه الطريقة عدم قدرتها على معالجة المشاكل الكبيرة ذات المتغيرات أو القيود المتعددة، أما طريقة الرسم البياني تقوم على أساس رسم المحاور الممثلة للمتغيرات، وبعد ذلك يتم نقوم برسم الخطوط الممثلة للقيود بعد تحديد النقاط الممثلة للمتغيرات على المحاور، ومن ثم نقوم بتحديد منطقة الحلول الممكنة وتحديد وتقسيم نقاط هذا الحل لاختيار أفضلها، ويأخذ على هذه الطريقة أن قدرتها التحليلية محدودة، وأنها صعبة الاستخدام إن لم تكن مستحيلة في الحالات التي يكون فيها عدد المتغيرات كبيرًا، أخيرًا الطريقة المبسطة التي تعتبر أكثر الطرق انتشارًا، ويعود السبب في ذلك إلى قدرتها على معالجة المشاكل الكبيرة والمعقدة، وقد ساعد التقدم الفني في مجال أنظمة وبرامج الحاسوب المتعلقة بهذا الموضوع في زيادة قدرة وفاعلية هذه الطريقة.

1- تعريف الطريقة البيانية: تعتبر طريقة رسم البياني طريقة سهلة وواضحة في معالجة مشاكل البرمجة الخطية خاصة تلك المشاكل التي لا نتزيد فيها عدد المتغيرات عن اثنين فقط، والتي تحتو ي على عدد بسيط من القيود، وتفيد طريقة الرسم البياني كمقدمة لدراسة طرق وأساليب أخرى أكثر تعقيدًا في حل مشاكل البرمجة الخطية كالسمبلكس. (رندة، 2016، صفحة 68).

2- خطوات طريقة الحل البياني: لإيجاد حل لكل برنامج خطي يحتوي على متغيرين باستخدام الرسم البياني يتم إتباع الخطوات التالية (خالد، 2018، الصفحات 8-9):

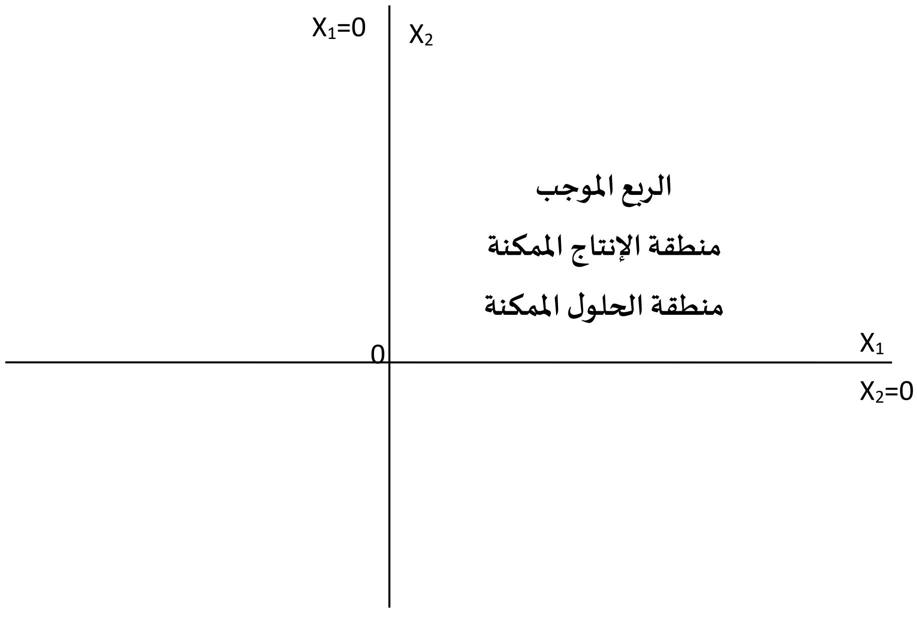
- **تحويل المتراجحات إلى معادلات**، ويتم ذلك عن طريق تغيير إشارة القيد من (≤) أو (≥) إلى (=) دون إحداث أي تغيير في القيد؛

- **إيجاد إحداثيتين لكل قيد**؛ أي تحديد نقطتين لكل قيد، حيث كل نقطة تحتوي على قيمة لـ "x_1" وقيمة لـ "x_2" ، " بالنسبة للقيد الأول يتم افتراض أن أحد المتغيرين معدوم و بالتالي يمكن حساب المتغير الآخر، و نفس الشيء يتم افتراض أن المتغير الثاني معدوم ليتم حساب المتغير الأول، و بهذا تكون لدينا نقطتان يتم من خلالهما رسم مستقيم القيد الأول. و بنفس الطريقة يتم رسم مستقيمات باقي القيود و بتقاطعها يتم الحصول على منطقة الحلول المقبولة (الممكنة)، و يجب ملاحظة اتجاه المتراجحات أو القيود" (عبد الستار أحمد، 2003، صفحة 27).

- رسم محور السينات ويحوي على قيم "x_1" ثم محور العينات ويحوي على "x_2"؛

- **رسم القيود في معلم وتحديد منطقة الحلول الممكنة:** لرسم القيود في المعلم نختار المربع الموجب، وذلك تطبيقًا لشرط عدم السلبية كما يوضحه الشكل التالي:

الشكل رقم (01): تطبيق شرط السلبية على القيود بيانيا



المصدر: محمد الفاتح محمود المغربي، 2018، ص42.

ويتم رسم القيود الموجودة في البرنامج الخطي من خلال تحديد النقطتين اللتين تم تحديدهما في الخطو السابقة والإيصال بينهما بخط مستقيم.

- **تحديد منطقة الحلول الممكنة لكل قيد**؛ وذلك حسب شكل القيد:

* قيد من الشكل (≥) (أكبر من أو يساوي): تقبل المنطقة العليا كمنطقة الحلول الممكنة وترفض المنطقة السفلى؛

* قيد من الشكل (≤)(أقل من أو يساوي): تقبل المنطقة السفلى كمنطقة حلول ممكنة وترفض المنطقة العليا؛

* قيد من الشكل (=): ترفض المنطقة العليا والمنطقة السفل، وتكون منطقة الحلول الممكنة هي فقط النقاط الموجودة على القيد؛ تعتبر المنطقة المشتركة بين كل القيود منطقة الحلول الممكنة للنموذج؛

- **إيجاد الحل الأمثل**: الحل الأمثل هو أحد رؤوس منطقة الحلول الممكنة لذلك نقوم بحساب قيم "x_1" و"x_2" عند كل رأس وحساب قيمة كل دالة هدف ويتم تحديد الحل الأمثل حسب شكل دالة الهدف.

دالة الهدف من شكل Max الحل الأمثل هو قيم "x_1","x_2" التي تعطي أكبر قيمة لدالة الهدف وتكون أبعد ما يكون من نقطة الأصل.

منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تضم مجموع النقاط حيث أن هذه النقاط تحقق كل القيود للنموذج، وتعطي قيمة لدالة الهدف.

دالة الهدف من شكل Min الحل الأمثل هو قيم "x_1","x_2" التي تعطي أقل قيمة لدالة الهدف وتكون أقرب ما يكون من نقطة الأصل.

3- أمثلة تطبيقية لتطبيق طريقة البيانية في حالة التعظيم "Max" وحالة التدنية "MiN":

مثال01: مؤسسة وطنية لصناعة الأثاث توفرت لها معلومات تفيد بإمكانية استخدام طاقتها الفائضة في إنتاج منتجين جديدين هما (مكاتب صغيرة، كراسي) وأن كل هذين المنتجين سيمران بورشتين صناعيتي، والجدول الموالي يوضح احتياجات كل منتج وجميع المعلومات المتعلقة بالمنتجين:

المنتجات	**المنتجات**		**الوقت المتاح (الطاقة الإنتاجية)**
	مكاتب	كراسي	
النجارة	3 سا	5 سا	15 سا
الإكمال والتجميع	5 سا	2 سا	10 سا
ربح الوحدة	5 دج	3 دج	

المطلوب:

- أوجد نموذج رياضي لمسألة البرمجة الخطية إذا كانت المؤسسة تريد تعظيم أرباحها؟

- أوجد الحل الأمثل باستعمال الطريقة البيانية؟

صياغة النموذج الرياضي لمسألة البرمجة الخطية:

من خلال المسألة نلاحظ أن المؤسسة ترغب في إنتاج منتجين وتكون بذلك متغيرات القرار كما يلي:

x_1: عدد وحدات من المكاتب؛

x_2: عدد وحدات من الكراسي؛

دالة الهدف: دالة هدف من نوع تعظيم تظهر كما يلي:

$$MaxZ = c_1x_1 + c_2x_2 = 5x_1 + 3x_2$$

القيود: **ومنه تظهر القيود كما يلي:**

قيد ورشة النجارة: $3x_1 + 5x_2 \leq 15$

قيد ورشة الإكمال والتجميع : $5x_1 + 2x_2 \leq 10$

شرط عدم السلبية: $x_1, x_2 \geq 0$

ومنه يظهر النموذج بالشكل التالي:

$$MaxZ = c_1x_1 + c_2x_2 = 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- إيجاد الحل الأمثل باستعمال الطريقة البيانية:

- تحويل المتراجحات إلى معادلات: وذلك من خلال تغيير إشارة القيد إلى شكل (=)

* بالنسبة القيد الأول: $3x_1 + 5x_2 \leq 15$ نحذف إشارة القيد (≤) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل

$$3x_1 + 5x_2 = 15$$

* بالنسبة القيد الثاني: $5x_1 + 2x_2 \leq 10$ نحذف إشارة القيد (≤) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل

$$5x_1 + 2x_2 = 10$$

- إيجاد إحداثيتين لكل قيد: كما ذكرنا سابقا فإن الإحداثية تتكون من قيمة لـ "x_1" وقيمة لـ"x_2" ولتسهيل الحساب نفرض أن قيمة "x_1" صفر وبالتعويض نتحصل على "x_2"، وللحصول على الإحداثية الثانية نفرض قيمة صفر لـ "x_2" وبالتعويض نتحصل على قيمة "x_1".

القيد الأول: $3x_1 + 5x_2 = 15$

$x_1 = 0 \Rightarrow 5x_2 = 15 \Rightarrow x_2 = 3 \Rightarrow (0, 3)$

$x_2 = 0 \Rightarrow 3x_1 = 15 \Rightarrow x_1 = 5 \Rightarrow (5, 0)$

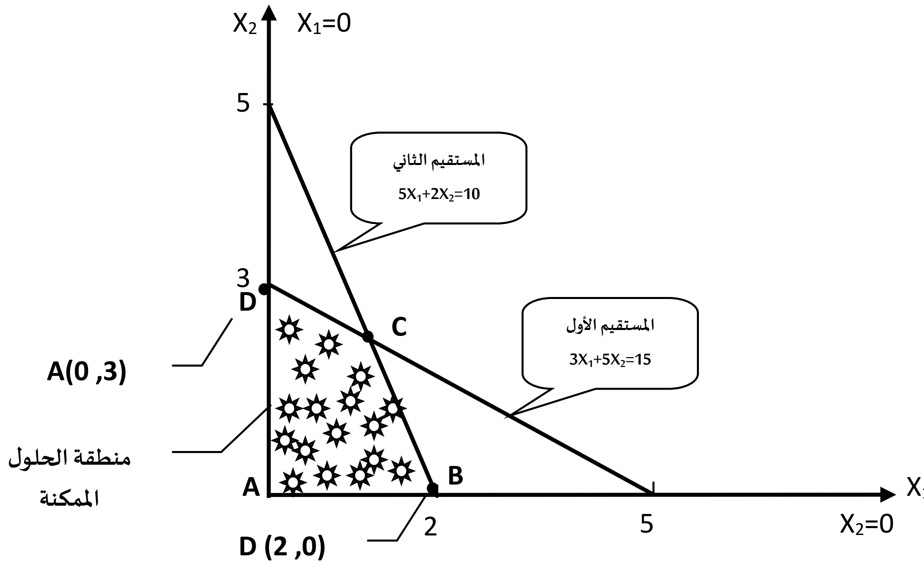
القيد الثاني: $5x_1 + 2x_2 = 10$

$x_1 = 0 \Rightarrow 2x_2 = 10 \Rightarrow x_2 = 5 \Rightarrow (0, 5)$

$x_2 = 0 \Rightarrow 5x_1 = 10 \Rightarrow (2, 0)$

- رسم القيود في المعلم وتحديد منطقة الحلول الممكنة: من خلال تحديد إحداثيات محددة في المرحلة السابقة في المعلم والربط بينهما نتحصل على الرسم البياني للقيود في الشكل. نلاحظ أن القيد الأول من **الشكل (≤)** ومنه نقبل المنطقة السفلى كمنطقة حلول ممكنة، ونرفض المنطقة العليا بالنسبة للقيد، أما بالنسبة للقيد الثاني فهو كذلك من الشكل أقل أو تساوي

$(\leq)$ وبذلك نقبل المنطقة السفلى **كمنطقة حلول الممكنة** وترفض المنطقة العليا، ومنه تبقى المنطقة المضللة :والمحددة بالنقاط $(\boldsymbol{A, B, C, D})$ وهي **منطقة الحلول الممكنة** بالنسبة للنموذج كما يوضحه الشكل التالي:



-إيجاد الحل الأمثل: يكون **الحل الأمثل موجود في إحدى رؤوس (حدود) منطقة الحلول الممكنة** (A, B, C, D) لذلك سنقوم بحساب قيم "X_1"، "X_2"، و"Z" عند كل نقطة، ويكون الحل الأمثل هو النقطة التي تعطي أكبر قيمة لدالة الهدف، كون دالة الهدف من الشكل "Max"، حيث $B(2,0)$ ، $D(0,3)$ ، $A(0,0)$، و النقطة "C" سيتم حساب إحداثياتها.

إيجاد إحداثيات النقطة C: تمثل النقطة C تقاطع القيدين لإيجاد الاحداثيات يكفي حل جملة المعادلتين، وسنقوم بحلها بطريقة الجمع والتعويض:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 15 \cdots (01) \cdots \times (-5) \\ 5x_1 + 2x_2 = 10 \cdots (02) \cdots \times (+3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -15x_1 - 25x_2 = -75 \\ +15x_1 + 6x_2 = 30 \end{cases} \quad +$$

$$-19x_2 = -45 \quad =$$

$$x_2 = \frac{45}{19}$$

بالتعويض في إحدى المعادلتين نجد: $3x_1 + 5\left(\frac{45}{19}\right) = 15 \rightarrow = x_1 = \frac{20}{19}$، ومنه إحداثيات النقطة هي: $c\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$

والجدول أدناه يمثل نقاط أو حدود أو رؤوس منطقة الحلول الممكنة وهي كما يلي:

النتيجة	$Z=5x_1+3x_2$	ملاءمة القيم للقيود	X_2	X_1	النقطة
0	5×0+3×0	$3\times 0+5\times 0=0\leq 15$	0	0	A(0,0)
0		$5\times 0+2\times 0=0\leq 10$	0	0	
10	5×2+3×0	$3\times 2+5\times 0=6\leq 15$	0	2	B(2,0)
		$5\times 2+2\times 0=10\leq 10$	0	2	
9	5×0+3× 3	$3\times 0+5\times 3=15\leq 15$	3	0	D (0, 3)
		$5\times 0+2\times 3=6\leq 10$	3	0	
$\frac{235}{19}=12,37$	$5\times\frac{20}{19}+3\times\frac{45}{19}$	$3\times\frac{20}{19}+5\times\frac{45}{19}=15\leq 15$	$\frac{45}{19}$	$\frac{20}{19}$	$C(\frac{20}{19},\frac{45}{19})$
		$5\times\frac{20}{19}+2\times\frac{45}{19}=10\leq 10$			

من خلال الجدول نلاحظ أن أكبر قيمة لدالة الهدف محققة في النقطة $C(\frac{20}{19},\frac{45}{19})$ وهي أفضل حل للمؤسسة، كما أنها ملائمة للقيود، لذلك وجب على المؤسسة إنتاج "$x_1=\frac{20}{19}$" وحدة من المكاتب و "$X_2=\frac{45}{19}$" وحدة من الكراسي لتحقيق ربح قدره"$Z=12,37$دج".

مثال 02: تنتج شركة الواحة الصناعية نوعان من الدهانات (الخارجية والداخلية) وذلك باستخدام نوعين من المواد الخام (م$_1$، م$_2$) والجدول التالي يبين الاحتياجات:

المادة الخام / المنتجات	عدد الأطنان من المادة الخام لكل طن من المنتج: الدهان الخارجي	الدهان الداخلي	أقصى كمية متاحة في اليوم (الطن)
المادة الخام (م1)	6	4	24
المادة الخام (م2)	1	2	6
الربح لكل طن	5	4	

وتشير دراسة السوق إلى أنَّ:

- الطلب اليومي على الدهان الداخلي لا يمكن أن يتجاوز الطلب على الدهان الخارجي بأكثر من طن واحد؛
- أقصى كمية للطلب اليومي من الدهان الداخلي تبلغ 2 طن؛

المطلوب:

- قم بصياغة النموذج الرياضي لمسألة البرمجة الخطية إذا كانت ترغب الشركة في تحديد الحل الأمثل (الأفضل) الذي يؤدي إلى تعظيم الربح الإجمالي اليومي للشركة؟
- حدد حل الأمثل بالطريقة البيانية؟

* صياغة النموذج الرياضي لمسألة البرمجة الخطية:

من خلال المسألة نلاحظ أن الشركة ترغب في إنتاج نوعين من المنتجات (x_1,x_2) وتكون بذلك متغيرات القراركما يلي:

x_1: عدد وحدات الدهان الخارجي؛

x_2: عدد وحدات الدهان الداخلي؛

دالة الهدف : دالة الهدف بشكل تعظيم وتظهر بالشكل التالي:

$$MaxZ = c_1x_1 + c_2x_2 + c_2 \cdot x_3 = 5x_1 + 4x_2 + x_3$$

القيود: تظهرلنا في المسألة نوعين من القيود:

قيود مادة الخام:

- ✓ **قيد المادة الخام "م$_1$":** $6x_1 + 4x_2 \leq 24$
- ✓ **قيد المادة الخام "م$_2$":** $x_1 + 2x_2 \leq 6$

قيود دراسة السوق:

- الطلب اليومي على الدهان الداخلي لا يمكن أن يتجاوز الطلب على الدهان الخارجي بأكثر من طن واحد؛

ويأخذ القيد الشكل التالي: $x_2 \leq x_1 + 1$، $x_2 - x_1 \leq 1$

- أقصى كمية للطلب اليومي من الدهان الداخلي تبلغ 2 طن؛

يكون القيد بالشكل التالي: $x_2 \leq 2$

شرط عدم السلبية: $x_1, x_2 \geq 0$

ومنه يظهر النموذج بالشكل التالي:

$$MaxZ = 5x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_2 - x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- البحث عن الحل الأمثل بطريقة الرسم البياني:

تحويل المتراجحات إلى معادلات: وذلك من خلال تغيير إشارة القيد إلى شكل (=):

بالنسبة القيد الأول: $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ نحذف إشارة القيد (≤) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل:

$$6x_1 + 4x_2 = 24$$

بالنسبة القيد الثاني: $x_1 + 2x_2 \leq 6$ نحذف إشارة القيد (≤) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل:

$$x_1 + 2x_2 = 6$$

بالنسبة القيد الثالث: $x_2 - x_1 \leq 1$ نحذف إشارة القيد (≤) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل:

$$x_2 - x_1 = 1$$

بالنسبة القيد الثالث: $x_2 \geq 2$ نحذف إشارة القيد (≥) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل:

$$x_2 = 2$$

- إيجاد إحداثيتين لكل قيد: كما ذكرنا سابقا فإن الإحداثية تتكون من قيمة لـ "x_1" وقيمة لـ"x_2" ولتسهيل الحساب نفرض أن قيمة "x_1" صفر وبالتعويض نتحصل على "x_2"، وللحصول على الإحداثية الثانية نفرض قيمة صفر لـ "x_2" وبالتعويض نتحصل على قيمة "x_1".

القيد الأول: $6x_1 + 4x_2 = 24$

$$x_1 = 0 \Rightarrow 4x_2 = 24 \Rightarrow x_2 = 6 \Rightarrow (0, 6)$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow 6x_1 = 24 \Rightarrow x_1 = 4 \Rightarrow (4, 0)$$

القيد الثاني: $x_1 + 2x_2 = 6$

$$x_1 = 0 \Rightarrow 2x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = 3 \Rightarrow (0, 3)$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 6 \Rightarrow (6, 0)$$

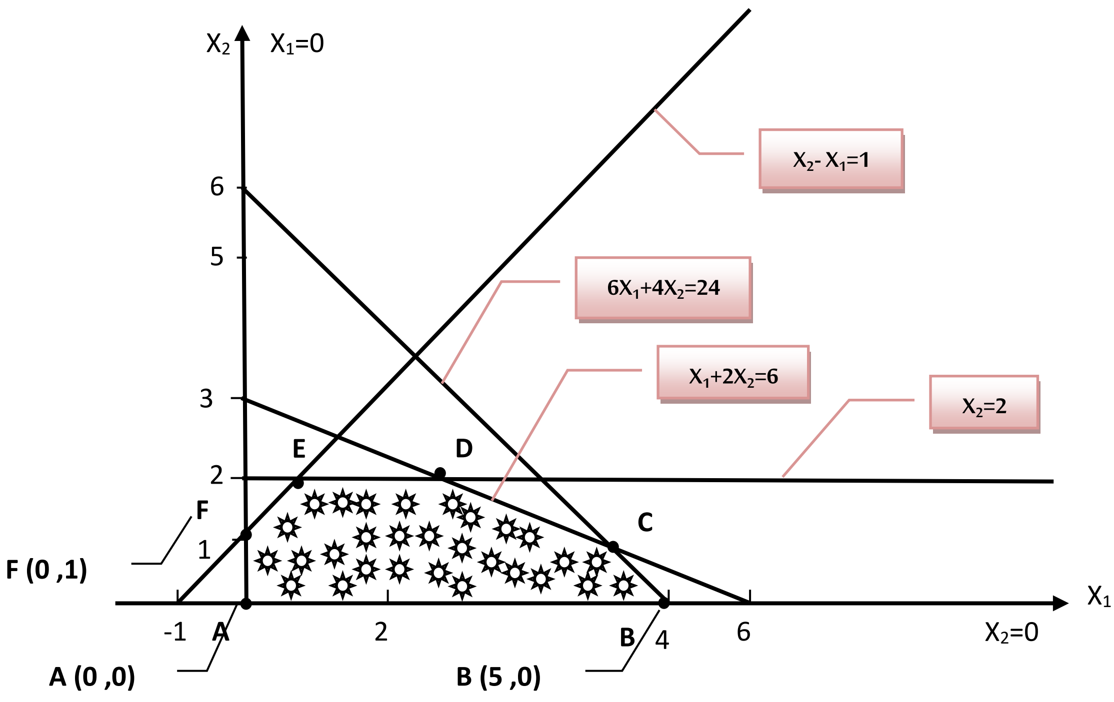
القيد الثالث: $x_2 - x_1 = 1$

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 3 \Rightarrow (0, 1)$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \Rightarrow (-1, 0)$$

القيد الر لع: $x_2 = 2$ عبارة عن مستقيم موازي لمحور الفواصل.

- رسم القيود في المعلم وتحديد منطقة الحلول الممكنة: من خلال تحديد إحداثيات محددة في المرحلة السابقة في المعلم والربط بينهما نتحصل على الرسم البياني للقيود في الشكل. نلاحظ أن القيد الأول من **الشكل** ($\leq$) ومنه نقبل المنطقة السفلى كمنطقة حلول ممكنة، ونرفض المنطقة العليا بالنسبة للقيد، أما بالنسبة للقيد الثاني فهو كذلك من الشكل أقل أو تساوي ($\leq$) وبذلك نقبل المنطقة السفلى **كمنطقة حلول الممكنة** وترفض المنطقة العليا، ومنه تبقى المنطقة المضللة :والمحددة بالنقاط (A, B, C, D) وهي **منطقة الحلول الممكنة** بالنسبة للنموذج كما يوضحه الشكل التالي:



-**إيجاد الحل الأمثل:** يكون الحل الأمثل موجود في إحدى رؤوس (حدود) منطقة الحلول الممكنة (A,B,C,D,E,F) لذلك سنقوم بحساب قيم "X_1"، "X_2"، و"Z" عند كل نقطة، ويكون الحل الأمثل هو النقطة التي تعطي أكبر قيمة لدالة الهدف، كون دالة الهدف من الشكل "Max"، حيث $B(4,0)$ ، $F(0,1)$ ، $A(0,0)$، و النقاط C,D,E سيتم حساب إحداثياتها.

إيجاد إحداثيات النقطة C: تمثل النقطة C تقاطع القيدين الأول والثاني ولإيجاد الاحدثيات يكفي حل جملة المعادلتين، وسنقوم بحلها بطريقة الجمع والتعويض:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = 24 \cdots (01) \cdots \times (+1) \\ x_1 + 2x_2 = 6 \cdots (02) \cdots \times (-6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = +24 \\ -6x_1 - 12x_2 = -36 \end{cases} \quad +$$

$$-8x_2 = -12 \quad =$$

$$x_2 = \frac{3}{2}$$

بالتعويض في إحدى المعادلتين نجد: $6x_1 + 4\left(\frac{3}{2}\right) = 24 \rightarrow= x_1 = 3$، ومنه إحداثيات النقطة هي: $c\left(3,\frac{3}{2}\right)$

إيجاد إحداثيات النقطة "D" التي تمثل تقاطع القيد الثاني والرابع:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 \cdots (01) \\ x_2 = 2 \cdots (02)) \end{cases}$$

بالتعويض نجد: $x_1 + 2(2) = 6 \rightarrow= x_1 = 2$، ومنه إحداثيات النقطة هي: $D(2,2)$

إيجاد إحداثيات النقطة "E" التي تمثل تقاطع القيد الثاني والرابع:

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 1 \cdots (01) \\ x_2 = 2 \cdots (02)) \end{cases}$$

بالتعويض نجد: $2 - x_1 = 1 \rightarrow= x_1 = 1$، ومنه إحداثيات النقطة هي: $E(1,2)$

والجدول أدناه يمثل نقاط أو حدود أو رؤوس منطقة الحلول الممكنة وهي كما يلي:

النقطة	X_1	X_2	$Z=5x_1+4x_2$	النتيجة
A(0,0)	0	0	5×0+4×0	0
B(4,0)	2	0	5×4+4×0	20
$C(3,1,5)$	**3**	**1,5**	**5×3+4×1,5**	**21**
$D(2,2)$	2	2	5×2+4×2	18
$E(1,2)$	1	2	5×1+4×2	13
$F(0,1)$	0	1	5×0+4×1	4

من خلال الجدول نلاحظ أن أكبر قيمة لدالة الهدف محققة في النقطة $C(3,1,5)$ وهي أفضل حل للمؤسسة، كما أنها ملائمة للقيود، لذلك وجب على المؤسسة إنتاج "$x_1 = 3$" وحدة من الدهان الداخلي و "$x_2 = 1,5$" وحدة من الدهان الخارجي لتحقيق ربح قدره "$Z = 21$ دج".

مثال 03: تستخدم شركة المزارع الخضراء 800 كغ على الأقل من نوع خاص من الأعلاف يوميًا لتغذية المواشي التي تمتلكها، ويتكون هذا العلف الخاص من مزيج من الذرة وفول الصويا بالتوليفات التالية:

الكيلوجرام من العلف			
الأعلاف	بروتين	ألياف	التكلفة
الذرة	0,09	0,02	0,30
فول الصويا	0,20	0,06	0,90

علما أن المتطلبات الغذائية للأعلاف الخاصة هي بروتين 30% على الأقل والألياف 5% على الأكثر.

المطلوب:

- قم بصياغة النموذج الرياضي لمسألة البرمجة الخطية إذا كانت الشركة ترغب في تحديد الحد الأدنى للتكلفة للمزيج من الأعلاف؟

- باستخدام الطريقة البيانية أو جد المزيج الأمثل الذي يخفض التكلفة؟

صياغة نموذج رياضي للمسألة:

من خلال المسألة نلاحظ أن الشركة ترغب في تأمين وجبة غذائية متكونة من نوعين من الأعلاف وتكون بذلك متغيرات القراركما يلي:

x_1: عدد وحدات أعلاف الذرة؛

x_2: عدد وحدات أعلاف فول الصويا؛

دالة الهدف من نوع تخفيض: تكوين الوجبة بأقل تكلفة إذن دالة الهدف هي تخفيض فتظهر دالة الهدف بالشكل التالي:

$$MaxZ = c_1x_1 + c_2x_2 + c_2 \cdot x_3 = 0{,}3x_1 + 0{,}9x_2$$

القيود: تعبر القيود في النموذج عن كل من الكمية اليومية اللازمة والمتطلبات الغذائية المطلوبة، حيث أن الشركة تحتاج على الأقل 800 كغ من الأعلاف يوميا فغنه يمكن التعبير عن القيد المرتبط بذلك على النحو التالي:

$$x_1 + x_2 \geq 800$$

أما بالنسب لقيد المتطلبات الغذائية اليومية من البروتين فإن كمية البروتين التي يتضمنها الكيلوغرام من الذرة والكيلوغرام من فول الصويا تعادل $0{,}09x_1 + 0{,}60x_2$ كغ، (الأعلاف الخاصة هي بروتين 30% على الأقل) ويتم التعبيرعن القيد المرتبط بذلك على القيد المرتبط بذلك على النحو التالي:

قيد البروتين: $0,09x_1 + 0{,}60x_2 \geq 0{,}3(x_1 + x_2)$

وبطريقة مماثلة فإنه يمكن صياغة المتطلبات من (الأعلاف الخاصة بالألياف و تبلغ 5% على الأكثر) على النحو التالي:

قيد الفيتامين: $0,02x_1 + 0{,}06x_2 \geq 0{,}05(x_1 + x_2)$

شرط عدم السلبية: $x_1, x_2 \geq 0$

ومنه يظهر النموذج بالشكل التالي:

$$Minc = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0{,}30x_1 + 0{,}90x_2$$

$$\left\{ \right.$$

$$x_1 + x_2 \geq 800$$
$$0,09x_1 + 0,60x_2 \geq 0,3(x_1 + x_2)$$
$$0,02x_1 + 0,06x_2 \geq 0,05(x_1 + x_2)0$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

ويمكن تبسيط الأرقام ليظهر النموذج بالشكل التالي:

$$Minc = 0,30x_1 + 0,90x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 800 \\ -0,21x_1 + 0,3x_2 \geq 0 \\ -0,03x_1 + 0,01x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- إيجاد الحل الأمثل باستعمال الطريقة البيانية:

- تحويل المتراجحات إلى معادلات: وذلك من خلال تغيير إشارة القيد إلى شكل (=)

بالنسبة القيد الأول: $x_1 + x_2 \geq 800$ نحذف إشارة القيد (≤) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل

$$x_1 + x_2 = 800$$

بالنسبة القيد الثاني: $-0,21x_1 + 0,3x_2 \geq 0$ نحذف إشارة القيد (≤) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل

$$-0,21x_1 + 0,3x_2 = 0$$

بالنسبة القيد الثالث: $-0,03x_1 + 0,01x_2 \geq 0$ نحذف إشارة القيد (≤) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد بالشكل:

$$-0,03x_1 + 0,01x_2 = 0$$

- إيجاد إحداثيتين لكل قيد: كما ذكرنا سابقا فإن الإحداثية تتكون من قيمة لـ "x_1" وقيمة لـ"x_2" ولتسهيل الحساب نفرض أن قيمة "x_1" صفر وبالتعويض نتحصل على "x_2"، وللحصول على الإحداثية الثانية نفرض قيمة صفر لـ "x_2" وبالتعويض نتحصل على قيمة "x_1".

القيد الأول: $x_1 + x_2 = 800$

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 800 \Rightarrow x_2 = 3 \Rightarrow (0, 800)$

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 800 \Rightarrow x_1 = 5 \Rightarrow (800, 0)$

القيد الثاني: $-0,21\, x_1 + 0,3\, x_2 = 0$

$x_1 = 0 \Rightarrow 0,3x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow (0, 0)$

$x_2 = 0 \Rightarrow -0,21\, x_1 = 0 \Rightarrow (0, 0)$

القيد الثالث: $-0,03\, x_1 + 0,01\, x_2 = 0$

$x_1 = 0 \Rightarrow 0,03x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow (0, 0)$

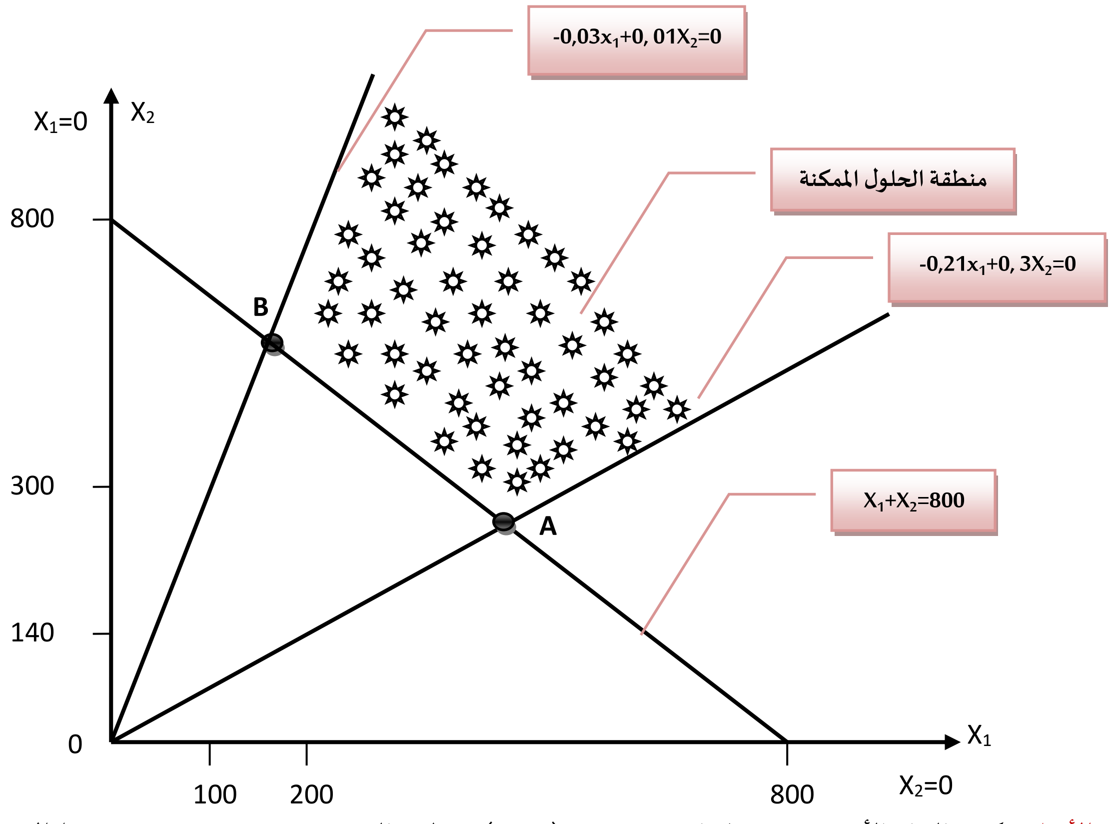
$x_2=0 \quad \Rightarrow \quad +0,01\,x_1=0 \quad \Rightarrow \quad (0,0)$

نلاحظ أن القيد الثاني والثالث يمران بنقطة الأصل ولرسم الخطوط المستقيمة المرتبطة بكل قيد فإننا نحتاج نقطة إضافية والتي يمكن الحصول عليها عن طريق تخصيص قيمة لأحد المتغيرات ثم حل المعادلة للحصول على المتغير الآخر.

بالنسبة للقيد الثاني: نضع "$x_1=200$" بعد التعويض نجد «$140=2x$»، هذا يعني أن مستقيم القيد الثاني سيمر بالنقطتين (0, 0)، و النقطة ((400200 ,.

بالنسبة للقيد الثالث: نضع "$x_1=100$" بعد التعويض نجد "$x_2=300$" ، هذا يعني أن مستقيم القيد الثاني سيمر بالنقطتين (0,0)، و النقطة (100, 300).

- رسم القيود في المعلم وتحديد منطقة الحلول الممكنة: من خلال تحديد إحداثيات محددة في المرحلة السابقة في المعلم والربط بينهما نتحصل على الرسم البياني للقيود في الشكل نلاحظ أن القيد الأول من **الشكل** ($\geq$) ومنه نقبل المنطقة العليا كمنطقة حلول ممكنة، ونرفض المنطقة السفلى بالنسبة للقيد، أما بالنسبة للقيد الثاني والثالث فهو كذلك من الشكل أكبر أو تساوي ($\geq$) وبذلك نقبل المنطقة العليا **كمنطقة حلول الممكنة** وترفض المنطقة السفلى، ومنه تبق المنطقة المضللة والتي حدودها ($\boldsymbol{A, B}$) هي **منطقة الحلول الممكنة** بالنسبة للنموذج كما يوضحه الشكل التالي:



-إيجاد الحل الأمثل: يكون الحل الأمثل موجود في إحدى رؤوس (حدود) منطقة الحلول الممكنة **التي من حدوها النقطتين** ($\boldsymbol{A, B}$) لذلك سنقوم بحساب قيم "X_1"، "X_2"، عند كل نقطة، ويكون الحل الأمثل هو النقطة التي تعطي أقل قيمة لدالة الهدف، كون دالة الهدف من الشكل "Min"، حيث $B(4,0)$ ، $F(0,1)$ ، $A(0,0)$،

إيجاد إحداثيات النقطة A: تمثل النقطة A تقاطع القيدين الأول والثاني ولإيجاد الاحدثيات يكفي حل جملة المعادلتين، وسنقوم بحلها بطريقة الجمع والتعويض:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 800 \cdots (01) \cdots \times (-0,3) \\ \end{cases}$$

$$x_1 + 0{,}3x_2 = 0 \cdots (02) - 0{,}21$$

$$\begin{cases} -0{,}3x_1 - 0{,}3x_2 = -240 & + \\ x_1 + 0{,}3x_2 = 0 - 0{,}21 & \\ -0{,}51x_2 = -240 & = \end{cases}$$

$$x_2 = 470{,}588$$

بالتعويض في إحدى المعادلتين نجد: $x_1 = 800 - 470{,}588 \rightarrow= x_1 = 329{,}412$، ومنه إحداثيات النقطة هي: $A(470{,}588{,}329{,}412)$

إيجاد إحداثيات النقطة "B" التي تمثل تقاطع القيد الأول والثالث:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 800 \cdots (01) \\ 0{,}03x_1 + 0{,}01x_2 = 0 \cdots (02)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -0{,}01x_1 - 0{,}01x_2 = 8 & + \\ x_1 + 0{,}01x_2 = 0 - 0{,}03 & \\ -0{,}04x_1 = 8 & = \end{cases}$$

$$x_1 = 200$$

بالتعويض نجد: $200 + x_2 = 800 \rightarrow= x_2 = 600$، ومنه إحداثيات النقطة هي: $B(200{,}600)$

والجدول أدناه يمثل نقاط أو حدود أو رؤوس منطقة الحلول الممكنة وهي كما يلي:

النقطة	X_1	X_2	$C=0,3x_1+0,90x_2$	النتيجة
$A(470{,}588{,}329{,}412)$	470 ,588	329,412	0,3×470,588+0 ,9 ×329,412	437,6472
$B(200,600)$	**200**	**600**	**5×200+4×600**	**3400**

من خلال الجدول نلاحظ أن أقل قيمة لدالة الهدف محققة في النقطة $B(200{,}600)$ وهي أفضل حل للشركة، كما أنها ملائمة للقيود، لذلك وجب عليها استخدام "$x_1 = 470{,}588$" أعلاف الذرة و "$x_2 = 329{,}412$" وحدة من أعلاف فول الصويا لتدنية التكاليف إلى "C=437,6472"