الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة العربي بن مهيدي أم البواقي

مطبوعة في مقياس البرمجة الرياضية

من إعداد : د. عبادلي رياض

السنة الجامعية 2015 – 2016

جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

الأسابيع	المحتوى
الأسبوع الأول	**الفصل الأول: البرمجة الرياضية الخطية**
	1 -البرمجة الرياضية الخطية مفاهيم أساسية
	2- كيفية كتابة برنامج رياضي (النمذجة)
الأسبوع الثاني	3 - الطريقة البيانية في حل مسائل البرمجة الرياضية الخطية
الأسبوع الثالث	**الفصل الثاني: الطريقة الرياضية (السمبلكس) في حل مسائل البرمجة الرياضية**
	1-البرمجة الرياضية وجداول السمبلكس
الأسبوع الرابع	2- الخطوات الأساسية لطريقة السمبلكس
الأسبوع الخامس	3- حالات خاصة لأسلوب السمبلكس
الأسبوع السادس	**الفصل الثالث: النموذج الثنائي لحل مسائل البرمجة الرياضية الخطية**
	1-طرق حساب النموذج الثنائي
الأسبوع السابع	2- التفسير الاقتصادي لمعنى النموذج الثنائي
الأسبوع السابع	3- طرق حل المسائل الثنائية
الأسبوع الثامن	**الفصل الرابع : نماذج النقل**
الأسبوع الثامن	1-الشكل العام لجدول نموذج النقل
الأسبوع الثامن	2- مراحل و طرق حل مسائل (نموذج) النقل
الأسبوع التاسع	**الفصل الخامس : البرمجة الرياضية اللاخطية**
	1- مفاهيم أساسية
الأسبوع العاشر	2- طرق حل البرمجة الرياضية اللاخطية
الأسبوع الحادي عشر	
الأسبوع الثاني عشر	**الفصل السادس: البرمجة الديناميكية**
الأسبوع الثالث عشر	1- مفاهيم أساسية
	2- استخدام البرمجة الديناميكية في توزيع الموارد
الأسبوع الرابع عشر	3-البرمجة الديناميكية و حالات تطبيقية

برمناج مقياس البرمجة الرياضية للسنة الثانية ماستر اقتصاد قياسي

هذه المطبوعة موجهة إلى طلبة السنة الثانية ماستر إقتصاد قياسي، أين سنوضح فيها مختلف الطرق الرياضية المتبعة لحل مسائل الأمثلية .

قسم العمل إلى ثلاث فصول، الأول يوضح الأسس النظرية للبرمجة الرياضية، الثاني يتطرق إلى الشق الخطي لمسائل الأمثلية ، و في الفصل الثالث وضحنا كيفية حل المسائل اللاخطية .

في الأخير تم صياغة و حل العديد من التمارين للإحاطة بالموضوع و تبسيطه لتحضير الطالب إلى الإمتحان النهائي .

مقدمة عامة

تعتبر البرمجة الرياضية فرعا من فروع الرياضيات التطبيقية التي تقوم على اساس رياضي. حيث تعتمد طرقا كمية رياضية في تحليل البيانات المرتبطة بدراسة الوضعية القائمة لظاهرة ما، ومن ثم رسم سيناريوهات مستقبلية لتطور امثل لهذه الظاهرة.

يعد الفزيائيون السباقون في ادخال علم الرياضيات في مجال بحثهم و الاستفادة منه، وبالنظر لما حققته هذه الإخيرة من تطور سارع باحثو العلوم الانسانية إلى تبني هاته المبادرة. وهذا من اجل معرفة ادق لما يجري من ظواهر محل الدراسة.

والعلوم الاقتصادية كاحد اهم فروع العلوم الانسانية والتي تتميز في شقها القياسي بطبيعة بديهية مبنية على المنطق وقابلة للتكميم، سهلت على الباحثين ادماج الرياضيات و التقنيات الكمية في بحوثهم.

تقوم البرمجة الرياضية على صياغة نموذج رياضي يمثل نظاما معينا بهدف الوصول للأمثلية. هذا النموذج ذو طبيعة رياضية و مبسطة . نظريا على العموم يمكن تقسيم الانظمة إلى ثلاث فروع:

أ\ نظام يعتمد على مشاهدات قد مضت، كثيرا ما يستعمل من طرف علماء الفلك و الفيزياء.

ب\ نظام يمكن تغييره او تصويبه من اجل بلوغ هدف معين: نظام مسير و نظام قابل للامثلية.

ج\ نظام ذو تعديل ذاتي او آلي: الآلات ....الخ.

النظام الوحيد السائد في علم الاقتصاد هو النظام «ب»

في حقيقة الامر، نعمل دائما على احداث تغيرات على النظام للوصول الى اهداف قمنا بتحديدها مسبقا، والتي قد تكون على سبيل المثال تعظيم الربح او تدنية التكاليف والمصاريف. في علم الاقتصاد نلاحظ عدم ثبات الانظمة فهي في تغير مستمر وليس لدينا طرق آلية تضمن استقرارها. هذا ما يجعلنا نصنف هذا العلم في الفرع «ب» للانظمة،

ونقصي النظامين أ و ج.

هناك جملة من العقبات للقيام بدراسات من هذا النوع نذكر منها:

<u>التعقيد</u>: فهذا النظام محل الدراسة هو من بدون شك معقد جدا، فالأمثلية ليست فقط مسألة أبعاد (أعداد، متغيرات، علاقات) لكن أيضا يغيب فيها طابع الإستمرارية و البساطة للعلاقات التي تربط بين الحقائق المدروسة. و هذا نابع من تطور النظام في إطار متعدد و متنوع، أين يجب رفض تبرير الجزء على حساب أجزاء أخرى.

إن تطور النظام مبني في حقيقة الأمر على إختيارات أين يتم الأخذ بعين الإعتبار القيود الإقتصادية، الرياضية .... الخ أثناء عملية الإنتقاء. هاته القوى تؤطر نمو النظام محل الدراسة و لا يمكن نمذجتها بالطرق الكلاسيكية، فهاته الأخيرة لا تستطيع بناء دراسة من هذا النوع للظواهر المراد تفسيرها.

لقد حاولنا من خلال ما سبق توصيف الموضوع ليتسنى لنا معرفة المكانة التي تحتلها البرمجة الرياضية، والتي نعتبرها المحرك الرئيسي لما يسميه المنظمون العلبة السوداء.

الفصل الأول :الإطار النظري للبرمجة الرياضية

1.1 ماهية البرمجة الرياضية

البرمجة الرياضية هي أحد فروع بحوث العمليات، تتمثل في وضع نظرية و أساليب لحل المسائل بالغة التعقيد لمجاميع معرفة بقيود خطية أو غير خطية (مساوات أو لا مساوات).

البرنامج الرياضي هو مسألة أمثلية تحت القيود.

يعطى E على انه مجموع و A هو محتوى في المجموع E $A \subset E$ و يمثل رياضيا بالدالة الرقمية:

$$F : E \to R \;\; \ddot{X}$$

لإيجاد $A \in \ddot{X}$ يمكن صياغته على الشكل التالي:

$$\{F(\ddot{X}) = \max \{ F(X)/ X \in A$$

مسألة من هذا الشكل يمكن أن لا يكون لها حل في حالة ما إذا كان F غير محدود اكبر من A أو إن لم إن لم نصل للحد الأقصى.

حاليا أهم الدراسات المتعلقة بالمجاميع E هي لـ: *Banach و *Hilbert أين $E=R^n$ و $E=Z^n$ في دراستنا هاته سنتوقف عند R^n .

سنعطي إهتمام أكبر للحالة التي يكون فيها A مجموع محدب و F هي دالة مقعرة تقودنا إلى خصائص مهمة للغاية.

في المسائل ذات الطبيعة الواقعية أو الحقيقية دائما ما تكون:

$$I_{1 \in L} \;\; D_1 \text{مع} \; \{D_1 = \{ x \in R^n / a_1 (x) \geq 0$$

أين $a_1 : R^n \to R$ و $a_1 \Omega \; C \; R^n \to R$

1 : هو مجموع محدد ل: m من المؤشرات

في هاته الحالة يمكننا إعادة الصياغة بإدخال $a : R^n \to R^m$

$$\{A = \{ x \in R^n / a(x) \geq 0$$

نكتب دائما هذا النوع من البرامج الرياضية على الشكل :

$$\max \; F(X), a (X) \geq 0 \quad \text{أو} \quad \max \; F'(X), a_1 (X) \geq 0 \; , 1 \in L$$

أين يتم تعريف مفردات هذا البرنامج على النحو التالي :

F هي الدالة الإقتصادية أو دالة الهدف.

$a_1(x)$ هي القيد رقم 1.

و نكتب $\{x \in R^n / a_1 (x) \geq 0 \}$

أين: $X: a(x) \geq 0$ أو $X \in A$ هي حل يمكن الوصول اليه.

A تمثل مجموع الحلول الممكنة أو المنطقة التي تعظم فيها F على A و هي أيضا حل أمثل.

$a_1(x)=0$ هي مؤشر لقيد ملزم وهو قيمة البرنامج الرياضي.

إعتمادا على ماتم توضيحه يمكن الجزم بأن البمجة الرياضية يمكن الإعتماد عليها في مختلف المجالات، خاصة حين نكون مجبرين على المفاضلة بين حلول متاحة و مقبولة لإتخاذ قرار معين، مثال: تسيير وتوزيع الحجم الساعي لموضفي مستشفى، جامعة، مصنع بكيفية تضمن أداء مهامه على المدى القصير،المتوسط والبعيد على أحسن وجه. كما يمكن الإستفادة من البرمجة الرياضية في حل المشاكل المطروحة و الناجمة عن الحياة الإجتماعية. بإختصار يمكن إستعمالها أو تطبيقها على كل الظواهر القابلة للحل على أساس قرار يتخذ بكل عقلانية. في بحوث العمليات مصطلح قرار نقصد به تلك العملية المعقدة نسبيا أين نقوم بإتخاذ خطوات حساسة و أساسية لمعالجة مشكلة مطروحة

2.1 خطوات صياغة النماذج الرياضية

يعتمد البرنامج الرياضي أساسا على البيانات المجموعة و المراد دراستها بعد عملية جمع البيانات نقوم ب :

- رسم الهدف المرجو الوصول إليه (تعظيم أو تدنية).
- كتابة المتغيرات المتحكمة في المسألة المدروسة (ويشترط فيها عدم السلبية).
- إستخراج القيود المفروضة على المتغييرات و شكلها الرياضي، هذا الأخير يمكن أن يكون من الشكل $\geq$ أكبر من أو يساوي لإنتاج أكبر كمية ممكنة مثلا أو الشكل $\leq$ أصغر من أو يساوي لظبط تكاليف الإنتاج مثلا أو المساوات $=$ في حالة وجود طلب ثابت لا يقبل الزيادة ولا النقصان.

بعد أن تتوفر كل هذه الشروط نقوم بمعالجة المشكلة وفق الخطوات التالية :

الخطوة الأولى:

تتم فيها صياغة نموذج كمي للمشكلة محل الدراسة، يعني قبول كل العوامل المهمة المؤثرة وصياغة القوانين التي تؤثر فيها أو تحركها.

هاته الخطوة يمكن تصنيفها في مجال فلسفي و نظري ضمن إطار رياضي بحت. (يتعدى الإطار الرياضي التطبيقي الذي يصنف في مجال أو مستوى أقل).

الخطوة الثانية:

تخص المجال الرياضي الذي يهتم بصياغة النماذج الرياضية. ففي هذه الخطوة تتم نمذجة المشكلة المطروحة حاضرا أو التي يمكن أن تعترض طريقنا في المستقبل.

يمكن إستخلاص مما سبق أن النموذج الرياضي هو عملية تجريدية لظاهرة حقيقية توصف أو تترجم برموز رياضية وتركب وفق صورة معينة تسمح بتحليل الظاهرة محل الدراسة بطريقة ذكية لا تغيير من طبيعتها.

في هذا الإطار، يجب على الباحث في الإقتصاد القياسي الإلمام بكل العناصر المكونة للظاهرة وربط علاقة بين هاته المعلومات، وهو مكلف أيضا ببناء دوال إقتصادية (على أساس أهداف أو إختيارات).

الخطوة الثالثة:

في هاته الخطوة ندخل في الميدان التطبيقي، حيث نستخدم مخرجات الخطوة الثانية من جهة، و ماتم جمعه من معطيات في الميدان من جهة ثانية تحت سقف تطبيقي واحد.

في هاته الخطوة نبقى دائما في الميدان الرياضي، حيث يتم فيها تطبيق الترميز و التقنيات الرياضية لحل المسائل المماثلة. يجب التركيز على أن مسائل البرمجة الرياضية مربوطة بحلول لأسئلة تطبيقية تحتوي على العموم على عدد كبير من المتغيرات و القيود، ما يجعلها مجبرة على إستعمال برنامج موجود من قبل أو تركيب و صياغة نموذج جديد.

الخطوة الرابعة:

يتم فيها مقارنة النتائج المستخلصة من الخطوة الثالثة مع الهدف المخطط له أو المراد الوصول إليه. بمعنى آخر هي المرحلة التي يتم فيه التحقق من فاعلية و ملائمة النموذج المستعمل مع البيانات التي تم جمعها في الميدان. ينجم على هذه المقارنة حالتين:

- الحالة 1: أين تكون نتائج المقارنة غير كافية (وهي وضعية عادية في المرحلة الأولى للمحاكاة)، لذا نمر إلى مرحلة أخرى ثانية أين يتم تدقيق معلومات المداخلات مع موضوع المحاكاة، وكذا الإحتياجات. وبعدها يتم وضع نموذج رياضي جديد نتخطى به الصعوبات التي واجهتنا مغ النموذج الإبتدائي. ومنه نرجع إلى مقارنة النتائج المستخلصة من الخطوة الثالثة مع الهدف المخطط له أو المراد الوصول إليه.
- الحالة 2: حينما تكون نتائج المقارنة مقبولة و كافية يتم تبني النموذج. بعد أن يتم

تطبيقه على المعطيات لمرتين على الأقل و يعطي نتائج إيجابية يتم وضع هذا النموذج في الخدمة.

مثال مبسط: إذا أردنا وضع نموذج لتوزيع الحجم الساعي لعمال مؤسسة ما، يستدعي الأمر جمع المعلومات والبيانات اللازمة ومنه صياغة نموذج يجرب لمرتين على الأقل فإذا وصلنا إلى النتائج المرجوة يتم تبني هذا النموذج من طرف المؤسسة.
صياغة نموذج رياضي للخدمة يتطلب صياغة أو تصميم تقنيات رياضية خاصة من غيرها يكون إستعمال النماذج الرياضية مستحيل. هذا الشيء يستلزم مخزون كبير من البرامج يتم تحديثها في كل مرة و في متناول المستعملين.

3.1تصنيف الصفات المحددة للنماذج

للبرمجة الرياضية نوعين:
الأول: أين يكون البرنامج مصمم بدقة كبيرة، ويخص حل المسائل ذات بيانات بسيطة ومحددة مسبقا.
الثاني: يسمى البرنامج العشوائي، و يخص المسائل ذات المعلمات العشوائية لكن معرفة بواسطة مواصفات إحتمالية معروفة. كما هو الحال بالنسبة لبرنامج الأنشطة الصناعية، التي يتم صياغتها عادة في ظروف غامضة نسبيا حيث لا يمكن الإحاطة بكل المعلومات حول المحيط والظروف التي سيتم إنشاءها فيها، مثلا لا يمكن معرفة ما إذا كان نظام تشغيل آلي سيعرف مشكلة ما ولا نستطيع التنبؤ بالمدة التي سيعود فيها إلى العمل العادي.
نشير إلى أن أكبر مشكل يعترض البرمجة العشوائية يكمن في طرح أو وضع المسألة، خاصة لما نعرف أن ظروف تحليل المعلومات الإبتدائية صعبة للغاية.
تنقسم البرمجة الرياضية إلى فرعين رئيسيين و هما : البرمجة الخطية، و البرمجة اللا خطية (غير الخطية).

4.1 الأسس النظرية للبرمجة الرياضية

الدوال الإقتصادية عادة ما تكون خطية، أين نبحث فيها عن الأمثلية التي توضع على شكل مساواة لنظام خطي.

البرمجة الخطية بدورها تحتوي على عدة أنواع من المسائل حيث تسمح تركيبة كل منها بوضع صيغة خاصة بها لإيجاد الحل الأمثل لها، هذا الحل أفضل بكثير من الحلول المتعلقة بالمسائل من الشكل العام. وفي هذا الإطار ظهرت البرمجة الخطية لمسائل النقل.

البرمجة الرياضية تقوم بدراسة المسائل على الشكل التالي:

لدينا المعطيات $m + q + 1$ للدالة: $F, g_1 \ldots\ldots. G_m \; ; h_1 \ldots . h_q$

معرفة جزئيا في $\Omega \subset R^n$ ، نعرف الفضاء R^n بالعلاقات التالية:

$$g_i(x) \geq 0 \qquad i = 1, 2 \ldots\ldots.., m$$

$$h_k(x) = 0 \qquad k = 1, 2 \ldots\ldots.., q$$

لإيجاد $X^0 \in R$ مثل: $F(X) \geq F(X^0)$ من أجل $X \in R$. نقول إذا أن X^0 هو الحد الأدنى ل: F على R ، أو أيضا F يقبل X^0 كحد أدنى على R، أو حتى X° هو الحد الأدنى للبرنامج الرياضي.

قيمة $F(X^0)$ ل $F(X)$ تسمى القيمة الأدنى ل $F(X)$ على R. أو القيمة الأدنى للبرنامج الرياضي. لكي لا نقع في الإلتباس نعوض دائما كلمة الحل الأدنى بالحل الأمثل R.

إذا إفترضنا أن البرنامج الرياضي أعلاه يستلزم أن لا يكون R مجموعة خالية، وأن تكون قيم $F(X)$ ل: $X \in R$ محدود في مستوى أدنى نقول:

$$\gamma = \inf \{ F(X) / X \in R \}$$

حالتين ممكنتين فقط:

الحالة 1: لا يوجد أي $X \in R$ مثل $F(X) = \gamma$ ، في الواقع مهما كان $\varepsilon > 0$ يوجد $X \in R$ مثل:

$$\gamma < F(x) < \gamma + \varepsilon$$

الحالة 2: يوجد $X^0 \in R$ مثل $F(X^0) = \gamma$ ، ما يعني أنX^0 هو الحل الأمثل للبرنامج الرياضي.

في هذا الفصل سنتعرض إلى الحالات الإستثنائية أين تكون الدوال g_i، h_k خطية: وهو موضوع البرمجة الخطية.

وكذا البرمجة الخطية هي دراسة المسائل التالية:

إيجاد الحل الأدنى لنموذج خطي معطى على شكل بيانات متعددة السطوح R و R^n. بعض من الحلول أو النتائج التي وصلنا إليها يتم تعميمها لاحقا.

إذا كان R مجسم محدب (مجسم متعدد الأوجه أو الأسطح) غير فارغ (خالي)،و إذا كان هناك شكل خطي محدودعند مستوى أدنى ل: R، فهي تقبل إذا أصغر قيمة.

برهان

نعتبر أن «C» هي مشكل خطي معطى، حيث يجب أن تكون قيمته دائما لا تساوي الصفر (و إلا كان$C_x = 0$ لكل $X\in R$ ، و النتيجة تكون معروفة). نضع:

$$\gamma = \inf \{ cx/\ x\in R\}$$

و ليكن Q مجسم متعدد الأسطح مغلق (يتم تخفيض مساحته أو فضاؤه إلى النصف).

$$Cx \leq \gamma$$

إذا لم يتحقق $Cx= \gamma$ نسبة لغير $x\in R$ فإن المجسمين المتعددين الأسطح المغلقين و الغير فارغين R و Q ليس لهما نقاط إلتقاء: هذا ما يعني بوجود فضاء شاسعةH تفصل بينهما، و كذا وجود شكل أو مجسم خطي اينd يختلف عن الصفر $d \neq 0$. و مدرج δ (مدرج يعني مجموع الأعداد الحقيقية مضاعفات الشعاع في فضاء شعاعي) على الشكل التالي:

$$dx < \delta \quad \text{لكل} \quad x\in Q$$

$$dx < \delta \quad \text{لكل} \quad x\in Q$$

إذا نحن في نظام ذو متراجحتين:

$$-\,cx \geq -\gamma$$

$$dx \geq \delta$$

هذا النظام ليس له حل، نتيجة لهاته الوضعية نقول بوجود مجموعتين من الأعداد الحقيقية من مضاعفات الشعاع في فضاء شعاعي هما: $0 \geq \lambda$ و $0 \leq t$ على الشكل :

$$-\lambda c + td = 0$$

$$-\lambda j + t\delta > 0$$

λ و t لا يمكن أن يكونا معدومين (مساويين للصفر) معا. وبالتحصيل نجد

$$= \lambda c = td$$

حيث لا يمكن للإثنين أن يكونا معدومين (مساويين للصفر)

$$\mu = t / \lambda$$

نقول بوجود $\mu > 0$ على الشكل:

$$\mu\, d = c$$

$$\nu\, \delta > \gamma$$

مهما كان $x \in R$ فإن $dx > \delta$ ، هذا يعني $cx > \mu\delta > \gamma$ و هو ما يناقض تعريف γ على أساس $\inf \{ cx/x \in R \}$ هذا ما يؤدي بنا أن نفترض فيما يلي أن علاقات البرنامج الخطي لا تحتوي على معادلات (إذا وجدت واحدة و هي $h_k (x) = 0$ يمكننا تعويضها بثنائية متراجحة $h_k (x) \geq 0$ و $-h_k (x) \geq 0$). سنرى في نهاية هذا الفصل الطريقة التي يجب إتباعها في حالة ما إذا أردنا الحفاظ على المعادلات .

نفترض أن x^0 هو الحل الأمثل للبرنامج الرياضي PL1 :

لتصغيرCX (min CX) المقيد ب:

$$Ax \geq b$$

لدينا $cx \geq c x^\circ$ لكل حل ل $Ax \geq b$:

إستنادا لنظرية FARKAS فاركاس، يوجد هناك $u^0 \in (R^m)^*$ من الشكل:

$$\begin{aligned} & u^0 \geq 0 \\ & u^0 A = 0 \qquad (1) \\ & u^0 b \geq cx^\circ \end{aligned}$$

مع كل ما سبق يعتبر X حل مهما كان $Ax \geq b$ و كذا u هي حل مهما كان:

$$u^0 \geq 0$$

$$u^0 A = 0 \qquad (1^*)$$

نستنتج من (1) و (1*) أن:

$$uAx \geq ub$$
$$uAx = cx$$

ما يعطينا: $cx \geq ub$

و بتطبيق هاته النتائج على X^0 و U^0 نجد: $CX^0 = U^0b$ وبتطبيق في مرحلة ثانية نفس النتائج على X^0 وعلى الحل (1*) مهما كان U، وبعدها على U^0 وعلى الحل X مهما كان ل: (1) نتحصل على ما يلي:

$$cx \geq cx^0 = u^0b \geq ub$$

من أجل كل X بفحص (1) و من أجل كل U بفحص (1*).

يمكننا إستنتاج أن U^0 هو تعظيم البرنامج الخطي PL1 لتعظيم Ub المقيد ب:

$$u \geq 0 \qquad (*1)$$
$$uA = cx$$

علاوة على كل هذا القيم المثلى للبرامج الخطية PL1 و *PL1 هم متساوون.

في الحالة العكسية، نعتبر U^0 هي الحل الأمثل للبرنامج الخطي *PL1. إذا كان R معرف ب (1)، هي مجموعة خالية، (من الفصل 1، نظرية 1) يوجد هناك U^1 للفحص:

$$u^1 \geq 0$$
$$u^1 A = 0$$
$$u^1 b > 0$$

بما أن U^0 تفحص

$$u^0 \geq 0$$
$$u^0 A = c$$

نستنتج أن $U^1 + U^\circ$ تفحص:

$$(u^0 + u^1) \geq 0$$

$$(u^0 + u^1) A = c$$

$$(u^0+u^1)\ b \geq u^0 b$$

إذا إعتبرنا أن *PL1 يقبل حل أمثل U^0، و أن R ليس خاليا.

و إعتمادا على ما سبق، لدينا $cx \geq ub$ من أجل كل$x \in R$ و من أجل كل U يفحص (*1):

الشكل الخطي CX محدود من الأدنى لكل $x \in R$، إعتمادا على ما سبق يوجد هناك حل أمثل X^0 ل: PL1 حيث أن الخلاصة كانت

$CX^0 = U^0 b$.

النتائج المتحصل عليها حتى الآن تبين أن PL1 و *PL1 متناظرين. يمكن أن نبين هذا التناظر على الشكل التالي:

إذا كان البرنامج الخطي الإبتدائي المعطى هو *PL1، يمكننا تطبيق نفس الخطوات المطبقة سايقا علىPL1. و بموجبه نتحصل على البرنامج الخطي **PL1 الذي يلعب الدور ل:*PL1 وهو نفس الدور الذي يلعبه هذا الأخير لصالح PL1:

سوف نتأكد من أن **PL1 هو مطابق ل: PL1.

يمكننا أن نكتب *PL1 على شكل *PL1:

لتصغير أو تدنية Ub المقيد ب:

$$u \geq 0$$

$$uA \geq c$$

$$- uA \geq -c$$

في هاته الحالة يكون **PL1 إذا إعتبرنا 2 شعاع ل R^m ، و 'X، و ''X شعاعين ل R^n:

لتعظيم ''CX' – CX المقيد PL1 ين ب:

$$z \geq 0$$

$$x' \geq 0$$

$$x'' \geq 0$$

$$z + A x' - A x'' = -b.$$

الذي يتناقص في PL1 لما نضع: $x'' - x' = x$

نستطيع القول أن *PL1 هو البرنامج الخطي الثنائي لPL1. وكذا بالنسبة للبرنامج الخطيPL1 هو البرنامج الثنائي للبرنامج الخطي *PL1 (بديهيا البرنامج الثنائي لبرنامج خطي مهما كان فهو البرنامج الأولي).

بعد كل هذا التحليل يمكننا القول أننا في مرحلة ضبط الإستنتاجات و إستخراج النتائج.

هام جدا: نعتبر PL1 برنامج خطي و *PL1 ثنائية.

PL1:

$$\text{mini } (cx)$$

مقيد ب: $AX \geq b$

PL1*:

$$\max (ub)$$

مقيد ب:

$$u \geq 0 \qquad (^*1)$$

$$U A = c$$

1/ إذا كان أحد البرنامجين الخطيين يقبل حل أمثل، فحتما الثاني يقبل حل كذلك، و القيمة المثلى هي نفسها لكليهما.

2/ إذا كان نظام العلاقة (1)،(*1) للبرنامجين الخطيين يقبل حلول فإن البرنامجين الخطيين يقبلان حلول مثلى.

3/ إذا كان X^0، U^0 حلان لأنظمة العلاقات (1)،(*1) على الترتيب، و إذا كان $CX^0 = U^0b$ فإن X^0، U^0 هما أمثل حلان للبرنامجين الخطيين PL1، *PL1.

التعليق الآتي دائما ما يكون مهم:

نعتبر أن لدينا الأنظمة التالية:

$$Ax \geq b \qquad (1)$$

$$u \geq 0 \qquad (1^*)$$

$$uA \geq c$$

نضع $y = Ax - b$

إذا كان X هو الحل ل (1) و كانU هو الحل ل (*1) فإن الشروط التالية هي معادلة لها:

1/ $cx = ub$

2/ $u_i \; y_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots\ldots, m$

أين يمثل m عدم المساوات العددية ل: (1).

برهان

لنعتبر أن $cx = ub$ هذا ما يعطينا إذا إستعملنا (1*): $uAx = ub$ ما يعني:

$u(Ax - b) = 0$ و منه $uy = 0$.

و نستطيع كتابته على الشكل: $\Sigma^{m}_{i=1} u_i y_i =$

و بإعتبار أن لدينا $u_i \geq 0,\ y_i \geq 0$ لكل $i= 1,2,\ldots\ldots\ldots,m$ لدينا $u_i y_i = 0$

في مرحلة أخرى لنعتبر السيناريو الغكسي

أي$u_i y_i = 0,\ i=1,2,\ldots\ldots\ldots;m$. ما ينتج عنه $uy= 0$ ،

و منه $u(Ax - b) = 0$

و بما أن ($uA = c$) فان: $cx = ub$

الأدوار التي كان يلعبها البرنامج الخطي PL1 و ثنائيته *PL1من قبل

آليا لم تنطبق على البرامج المستنسخة منها أعلاه. مع ذلكPL1 هي حالة إستثنائية

للبرنامج التالي:($d=0$ ،$h=0$ ،$H=0$ ،$B= 0$ ،$0 =G$)

$$PL2 :\ \min cx+dy$$

مقيد ب :

$$\begin{aligned} Ax + By &\geq b \\ Gx + Hy &= h \qquad (2) \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

أين$x \in R^n,\ \ y \in R^p,\ b \in R^m,\ h \in R^q$ و تكون المصفوفات A,B,G,H المناسبة

لها. عموما يمكن لنا كتابة PL2 على شكل PL1 بتعويض كالعادة $Gx + Hy = h$ ب:

$Gx=Hy \geq h$ ، $-Gx - Hy = - h$

الثنائية * PL2 للبرنامج الخطي PL2 يمكن كتابتها على الشكل :

$$\max ub + vb$$

مقيد ب: $u \geq 0$

$$\begin{aligned} uA = vG &= c \qquad (3) \\ uB + vH &\leq h \end{aligned}$$

تناظر شكل البرنامج الخطي مع شكل ثنائيةيصبح مرة أخرى شيء بديهي.

النتائج المتحصل عليها في هذا الفصل تسمح لنا بالوصول إلى نتائج أخرى بكل سهولة.

لنعتبر أن $Ax \geq b$ ليس له حل. و ليكن e شعاع ل R^m أين كل المكونات تساوي 1، ليكن ε متغير مدرج أو مضاف فتكون العلاقة $e\varepsilon + Ax \geq b$

تكون العلاقة متوافقة (هي حل $\{bi\}$ $\varepsilon = \max$ ،$x=0$)

للشرح نعتبر البرنامج الرياضي التالي :

(تصغير ε)

$$\min \varepsilon$$

مقيد ب : $e\varepsilon + Ax \geq b$

النظام $Ax \geq b$ يكون غير متوافق في حالة واحدة فقط و هي كون البرنامج يقبل قيمة مثلى$\varepsilon^0 > 0$. أي ε^0, X^0 حل أمثل:

يوجد وفقا لما قلنا سابقا $u^0 \in (R^m)^*$ على الشكل :

$$u \geq 0$$

$$u^0 e = 1$$

$$u^0 A = 0$$

$$u^0 b = \varepsilon$$

و هو ما يعادل وجود u الذي يفحص:

$$u \geq 0$$

$$uA = 0$$

$$ub > 0$$

الشيء الذي يؤدي بنا الى الحصول على النتائج المعلنة سابقا:

$$\min (x)$$

المقيد ب: $g(x) \leq 0$

$$x \in C$$

خاتمة الفصل

البرمجة الرياضية هي فرع من فروع بحوث العمليات، تهدف إلى حل المسائل الشائكة و المساهمة في إتخاذ القرارات المناسبة. هاته الأهداف يتم الوصول إليها بموجب طرق رياضية نبحث فيها عن الحل الأمثل من بين عدة حلول متاحة للمشكلة المطروحة (المسألة).
أمثلية الحل تكون على أحد شكلين أو نوعين :

- حالة التعظيم max : إيجاد الحل الأمثل لأكبر عائد أو فائدة.
- حالة التدنية min : إيجاد الحل الأمثل لأقل خسارة متوقعة لمؤسسة ما.

من خلال ما سبق يمكن القول بأن البرمجة الرياضية قائمة على معالجة مشكلة معينة وفق منهاج رياضي أين نحدد الأهداف الموجودة مع الأخذ بعين الإعتبار العوامل الخارجية المؤثرة المسماة قيود و المفاضلة بين الحلول المتوصل إليها و إختيار الحل الأمثل.
للبرمجة الرياضية عدة فروع نذكر منها :البرمجة الخطية Programmation linéaire ، البرمجة متعددة الأهداف، Programmation des objectifs البرمجة الصحيحة بمختلف أشكالها (عامة، ثنائية، مختلطة)،البرمجة الغير خطية، Programmation non linéaire
تطرقنا في هذا الفصل الى الإطار النظري للبرمجة الرياضية، في الفصل الثاني و الثالث سنتطرق بالتفصيل إلى البرمجة الخطية و البرمجة الغير خطية.

"الفصل الثاني البرمجة الخطية "

1.2 البرمجة الخطية

لقد بدأ الباحثون بادماج الأسلوب الرياضي الخطي في دراستهم الأكاديمية و بحوثهم العلمية منذ نهاية الحرب العالمية الثانية. و هو الأسلوب الأكثر شيوعا نظرا لسهولة تطبيقه في شتى المجالات. إن أسلوب البرمجة الخطية يبحث في توزيع الموارد المحدودة بين الإستخدامات البديلة ضمن إطار القيود و الشروط المفروضة وذلك لتحقيق الأهداف التي تسعى إلى تحقيقها منظمات الأعمال سواء كان ذلك في حالة تعظيم قيمة دالة الهدف. وقد يتعلق الأمر بتقليل قيمة دالة الهدف كما هو الحال في تقليل التكاليف المترتبة عن تنفيذ العمليات الإنتاجية[1] كما ذكرنا سابقا منذ نهاية الحرب العالمية الثانية ظهرت حاجة ماسة إلى أسلوب أو تقنية دقيقة لتسيير الموارد و تكييفها مع بعضها وفقا للكميات المتاحة و القيود المفروضة للوصول إلى الإستغلال الأمثل لها. بساطة إستعمال هاته الطريقة جعلتها محل إهتمام الكل، فحتى أصغر مقاول أو حرفي في رحلة بحثه لتحقيق أكبر ربح وفقا لما يتوفر لديه من ساعات عمل و مواد أولية تدخل في عملية الإنتاج يمكنه إستخدام البرمجة الخطية بكل بساطة (تستعمل أيضا في إيجاد أمثل طرق النقل و في حساب أقل خسارة ممكنة في حالة الأزمات ... الخ).

2.2مجالات إستخدام البرمجة الخطية

يمكن إستخدام البرمجة الخطية في شتى المجالات التي تهدف للوصول إلى الأمثلية ففي الجانب الإقتصادي يمكن حصر مجالات إستخدامها في ما يلي :

القطاع الصناعي :

تلجأ المؤسسات الصناعية لهاته التقنية من أجل وضع خطة أو إستراتيجية إنتاج و كذا سياسة تخزينية لتلبية الطلبات المستقبلية المتوقعة. فالمؤسسة تبحث عن تدنية تكاليف الإنتاج و التخزين إلى أقل تكلفة ممكنة وفي نفس الوقت إنتاج و تخزين الكميات لتغطية كل الطلبات الممكنة.

مجال التحليل المالي :

يجد المحلل المالي نفسه أمام عدة إختيارات ممكنة للربح و بما أنه يسعى إلى تحقيق أكبر عائد ممكن فإنه يجد نفسه مجبرا على إتباع إحدى الطرق الكمية لبلوغ هذا الهدف. لما تكون المسألة بسيطة و الهدف واضح يلجأ إلى البرمجة الخطية ليتوصل إلى الحل الأمثل.

---

[1] حسن ياسين طعمة ومروان محمد النسور و إيمان حنوش ، بحوث العمليات نماذج و تطبيقات ص 8

مجال التسويق :

التسويق و التقنيات الكمية ولدا تقريبا في نفس الوقت (بعد الحرب العالمية الثانية) إلا أن لهفة الجميع على إعادة الإعمار جعلت من الثاني يتطور بخطوات أسرع من الأول. بعد مرحلة الإعمار في نهاية الستينيات و بداية السبعينيات أصبح للتسويق مكانة خاصة لدى الكل لتصريف منتجاته، وظهرت معه الحاجة للوصل إلى أحسن طريقة لتقييم الميزانية الخاصة بهذا القسم على مختلف أنواع وسائل الإعلام لذلك الوقت (لم يكن هناك أنترت بعد) مثل التلفزيون، الراديو، الصحف، الجرائد، والمجلات. و يهدف المسؤول هنا إلى الوصول إلى الخليط الأمثل من الإستعمال لمختلف هاته الوسائل السمعية البصرية لتعظيم مبيعاته و تحقيق أكبر عائد ممكن.

في مسائل التوزيع و النقل :

إن تطور الإنتاج والذي واكبه تزايد في الطلب على المنتجات، و توسع الرقعة الجغرافية للطلب الواجب تلبيته أدى بالمؤسسة إلى إنشاء نقاط تخزين في عدة أماكن للتقرب من عملائها. و من هناك تولدت حاجة ماسة إلى معرفة الكميات المثلى الواجب شحنها إلى هاته المخازن وفقا للطلب الموجود في تلك الجهة وكذا تدنية تكاليف النقل إلى أدنى مستوى ممكن.

3.2 كيفية إعداد مسائل البرمجة الخطية

في حالة ما إذا كانت المؤسسة تطمح إلى تحقيق أكبر عائد ممكن، يتوجب على إدارتها تسخير كل الموارد التي بحوزتها و إستغلالها بطريقة مثلى مع الأخذ في الإعتبار كل العوامل التي قد تعيق وصولها إلى النتيجة المرجوة المسماة قيود.

هاته القيود تختلف حسب نوعية النشاط الذي تقوم به المؤسسة و كذا حسب الخطوات التي يمر بها المنتوج :

فالمرحلة الأولى و هي مرحلة الإنتاج مقيدة بعدد ساعات عمل الآلات و اليد العاملة المتوفرة و كذا المواد الأولية التي تدخل في عملية الإنتاج، و نجد أيضا الطاقة المتوفرة ...... الخ من العوامل الداخلة والمؤثرة في العملية الإنتاجية.

في المرحلة الثانية وهي خروج المنتجات من المعامل و دخولها إلى المخازن، نجد أيضا قيود يمكن أن تتحكم أو تحول دون تحقيق الهدف.

مثلا : مقدرة الفضاء التخزينية على إستعاب كميات معينة، ظروف التخزين، ظروف

الخروج من المخزن .... الخ

في المرحلة الأخيرة، فالسوق أيضا يمكن أن تتحكم في الوصول إلى الهدف فحجم الطلب على السلعة مثلا أو طرق التوزيع أو المنافسة هي قيود يجب أن تأخذ في الحساب أثناء إعداد مسائل البرمجة للوصول إلى الحل الأمثل.

في ظل هاته المعطيات ، من هدف مرجو و قيود مفروضة تسعى المؤسسة لإيجاد التوليفة المناسبة للإستغلال الأمثل لمختلف الموارد و الوصول إلى الكميات المثلى الواجب إنتاجها من مختلف الأنواع لتحقيق أكبر عائد.

4.2 الأسس التي يقوم عليها البرنامج الخطي

يقوم أي برنامج رياضي على أسس و دعائم يجب أن تتوفر فيه :

- أول أساس لا يقوم من دونه البرنامج الخطي هو تسطير هدف واجب الوصول إليه، عموما تهدف أي مؤسسة إقتصادية إلى بلوغ أكبر عائد ممكن في الحالات أو تدنية التكاليف.
- ثانيا و كما ذكرنا سابقا فلكل مؤسسة إمكانيات محددة تستوجب على متخذي القرار أخذها بعين الإعتبار في رسم الأهداف المرجوة، فهاته القيود تؤثر بشكل كلي أو جزئي على بلوغ الهدف الأمثل.
- تناسبية الهدف مع القيود، بحيث تكون دالة الهدف و القيود المرسومة متناسقة.
- إمكانية التجزئة، حلول البرمجة الخطية يمكن أن تكون أعداد صحيحة و أجزاء كسرية.
- عدم سلبية المتغيرات، التوليفة التي نخرج بها كحل للمسألة يجب أن تكون موجبة, إستعمال مثلا كوحدات من الموارد لبلوغ الهدف.
- صحة البيانات، أي أنه قد تم التأكد مسبقا من صحة المعطيات قبل إستعمالها في صياغة المسألة.

حتى يتسنى لصاحب القرار إستخدام البرمجة الخطية لإيجاد الحلول المثلى لأي مشكل كان سواء ذا طابع إداري أو إقتصادي يجب أن يقسم عمله إلى عدة مراحل وهي :

- البحث في وجود مشكلة تستدعي إتخاذ قرار و تحديد جميع البيانات المتعلقة بها.

- صياغة نموذج رياضي حسب طبيعة المشكلة و الهدف الأمثل المرجو إما تعظيم أو تدنية.

- حساب الحل أو الحلول الممكنة التحقيق و المفاضلة فيما بينها للوصول إلى الحل الأمثل.

- في النهاية يجب تطبيق الحل الأمثل على أرض الواقع و متابعة العملية إذا أمكن.

5.2 حل مسائل البرمجة الخطية

لحل مسائل البرمجة الخطية يمكن إستعمال العديد من الطرق وهي: الطريقة البيانية، طريقة السمبلكس، طريقة M الكبير. ولكل طريقة شروط تطبيقها والتي سنراها فيما يلي:

1.5.2 الطريقة البيانية (الرسم البياني)

إنطلاقا من إسمها نفهم أن هاته الطريقة تعتمد على رسم بياني لإيجاد الحلول الممكنة ثم إختيار الحل الأمثل.

هاته الطريقة مربوطة بشرط واحد هو أن لا تتعدى مكونات المسألة متغيرين. فإتباع هاته الطريقة إذا كان لدينا ثلاث متغيرات يكون صعبا و يستحيل في حالة أربع متغيرات.

عادة ما نمر بهاته الطريقة لفهم مسائل الأمثلية و تبسيطها ثم نمر إلى الطرق الأكثر تعقيدا.

مثال: لحل المشكل التالي : تعظيم دالة الإنتاج Z

$$Max(Z) = 1400\ x_1 + 800\ x_2$$

تحت القيود الخطية الإقتصادية :

$$2\ x_1 + 5\ x_2 \leq 140$$

$$3x_1 + 2\ x_2 \leq 150$$

$$x2 \geq 0; x1 \geq 0$$

حيث أن المجهولين x_1 و x_2 هما متغيرين النشاط .

في المرحلة الأولى نقوم بتحويل القيود من شكل متراجعات إلى شكل معادلات فتصبح على الشكل :

$$2\ x_1 + 5\ x_2 = 140\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$3\ x_1 + 2\ x_2 = 150\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

في المرحلة الثانية نقوم بتمثيل القيود بيانيا حيث نستخرج قيمها من المعادلة (1) و (2) .

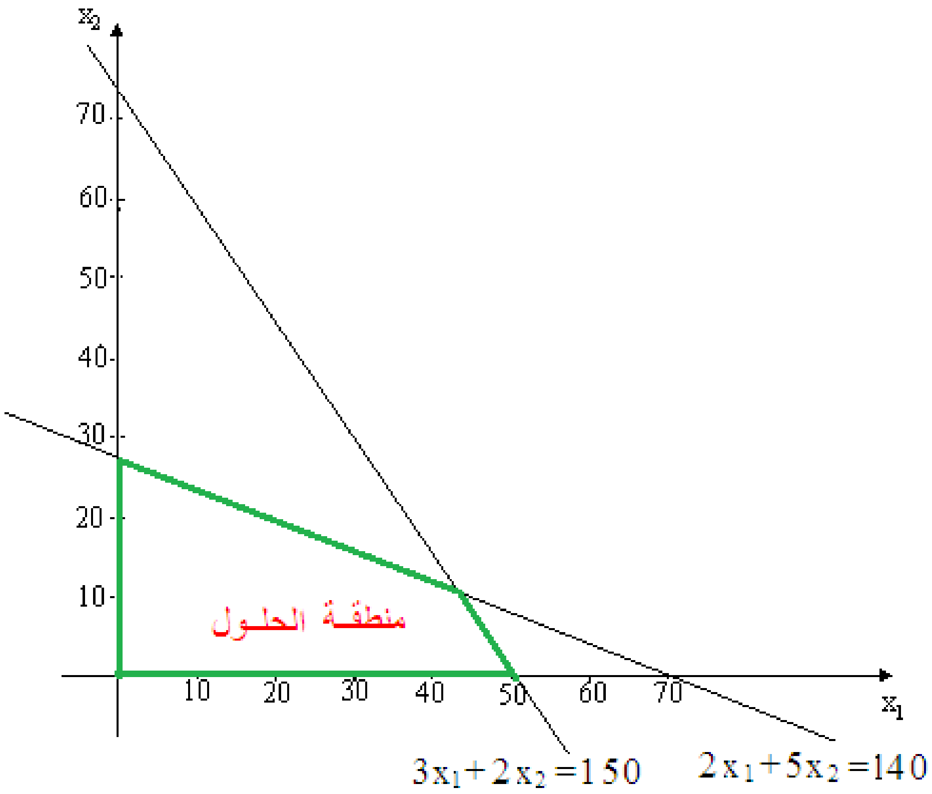
من (1) إذا كان $x_1 = 0$ فإن $x_2 = 140/5 = 28$

من (1) إذا كان $x_2 = 0$ فإن $x_1 = 140/2 = 70$

من (2) إذا كان $x_1 = 0$ فإن $x_2 = 150/2 = 75$

من (2) إذا كان $x_2 = 0$ فإن $x_1 = 150/3 = 50$

يتم تمثيل النتائج المتحصل عليها بيانيا فنجد :



منطقة الحلول المقبولة هي النقاط المحصورة بين نقطة الإنطلاق 0 و المحاور المرسومة (كل النقاط الموجودة على يمين المحاور هي نقاط خارج منطقة الحلول و بالتالي هي مرفوضة).

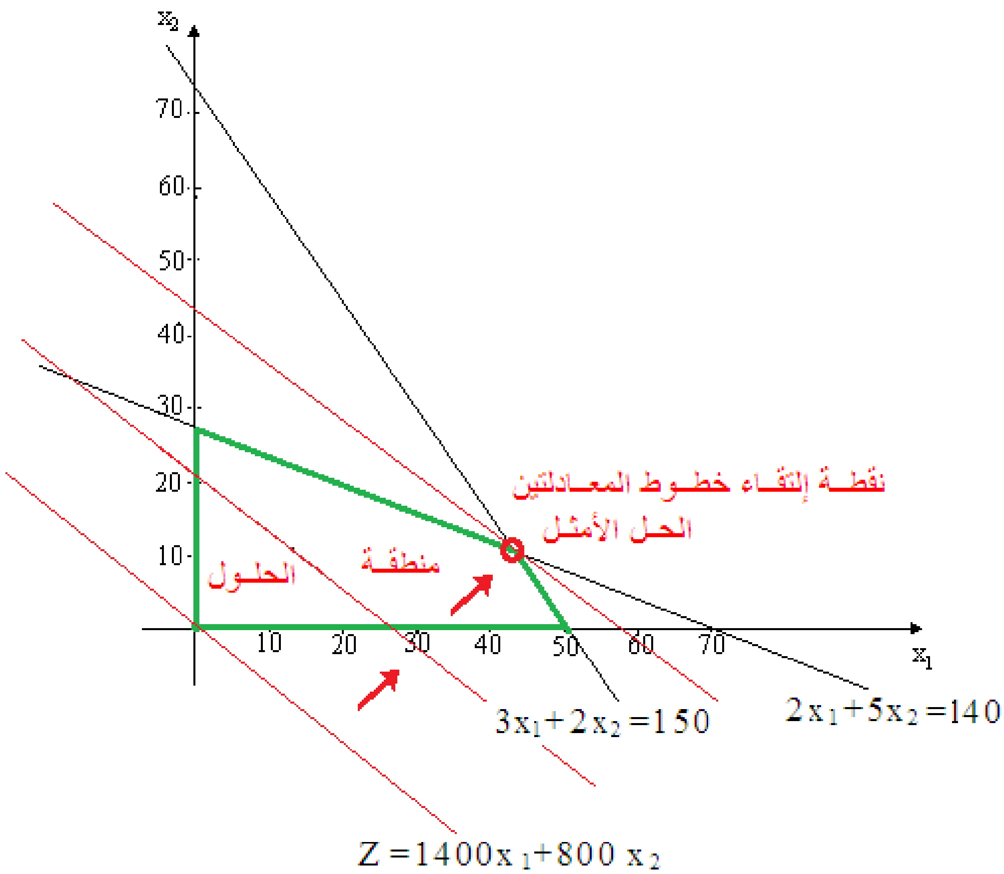
من الرسم نستطيع القول أن جميع النقاط الموجودة داخل شبه المنحرف (A,B,C ,0) تمثل الحلول الممكنة و هي عبارة عن ثنائية من (x_1 ، x_2) و تستجيب لكل القيود أيضا .

في هاته الحالة يجب البحث عن الحل الأمثل المكون من الثنائيتين (x_1 ، x_2) داخل هاته المنطقة بتعظيم دالة الهدف .

في حالة ماذا وضعنا هاته الدالة = 0 ، معناه :

$$1400\ x_1 + 800\ x_2 = 0$$

فإن الخط يمر عبر النقطة 0 . كلما عظمنا نجد أن الخط ينتقل إلى أعلى مثل ما هو مبين في الشكل أدناه. نواصل على هذا الشكل حتى نسحب خط المعادلة إلى أبعد نقطة في منطقة الحلول، أين لا يبقى إلا نقطة واحدة يلامسها الخط و هي تابعة لمنطقة الحلول المقبولة .



نلاحظ أن الحل الأمثل يتواجد دائما عند حدود منطقة الحلول المقبولة.

الحل موجود عند نقطة إلتقاء خطوط المعادلتين :

$$2x_1 + 5x_2 = 140$$

$$3x_1 + 2x_2 = 150$$

حل هاته المشكلة يقودنا إلى النقطتين :

$$x_1 = 43$$
$$x_2 = 11$$
$$Z = 69000$$

أي أنه يجب استخدام 43وحدةمن x_1 و 11 وحدة من x_2 للوصول إلى الحل الأمثل وهو 69000 وحدة

2.5.2الحالات الخاصة للطريقة البيانية

للبرمجة الخطية حالات خاصة أين يمكن أن تكون الحلول غير محدودة أو عدم وجود حلول مقبولة بيانيا وكذا وجود أكثر من حل واحد أمثل (عدة حلول مثلى).

في حالة الحلول الغير محددة:

ليكن لدينا النموذج الخطي التالي مع قيود خطية و نريد تدنيته

$$Max\ (Z) = 12\ X_1 + 17\ X_2$$

القيود : $X_1 + 3\ X_2 \geq 9$

$X_1 \geq 5$

$X_1 \geq 0\ ,\ X_2 \geq 0$

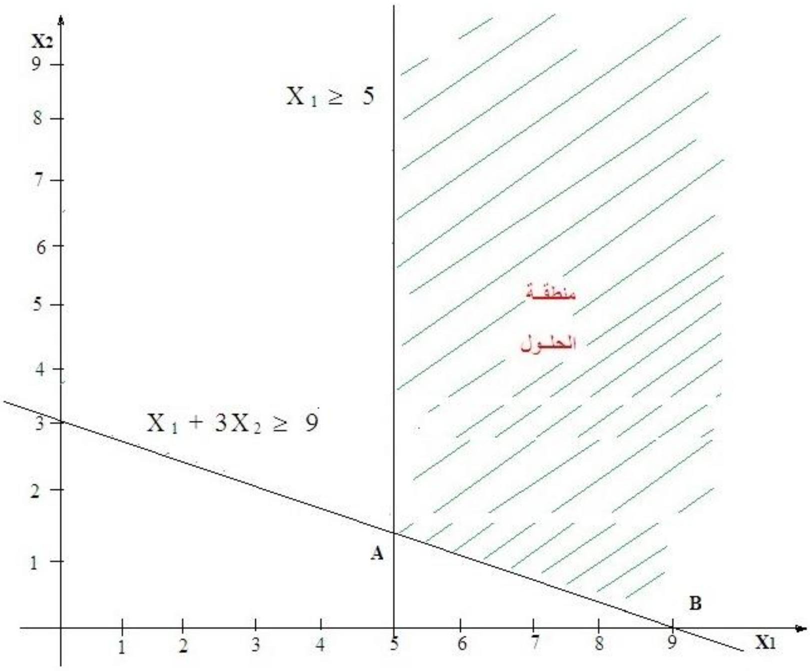
الحل : $X_1 + 3\ X_2 = 9 \ldots\ \ldots\ldots (1)$

$X_1 = 5\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots (2)$

من (1) لما تكون $X_1 = 0$ فإن $X_2 = 3$, لما تكون $X_2 = 0$ فإن $X_1 = 9$.

من (2) تكون قيمه $X_1 = 5$

نمثل ها ته النقاط بيانيا:



في ها ته الحالة نقول أن الحلول غير محددة

حالة عدم وجود حلول مقبولة :

ليكن لدينا النموذج الخطي التالي مع قيود خطية و نريد تدنيته

$$\text{Max } (Z) = 7X_1 + 14X_2$$

القيود :

$$4X_1 + 5X_2 \geq 30$$

$$2X_1 + 4X_2 \leq 6$$

$$X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0$$

الحل :

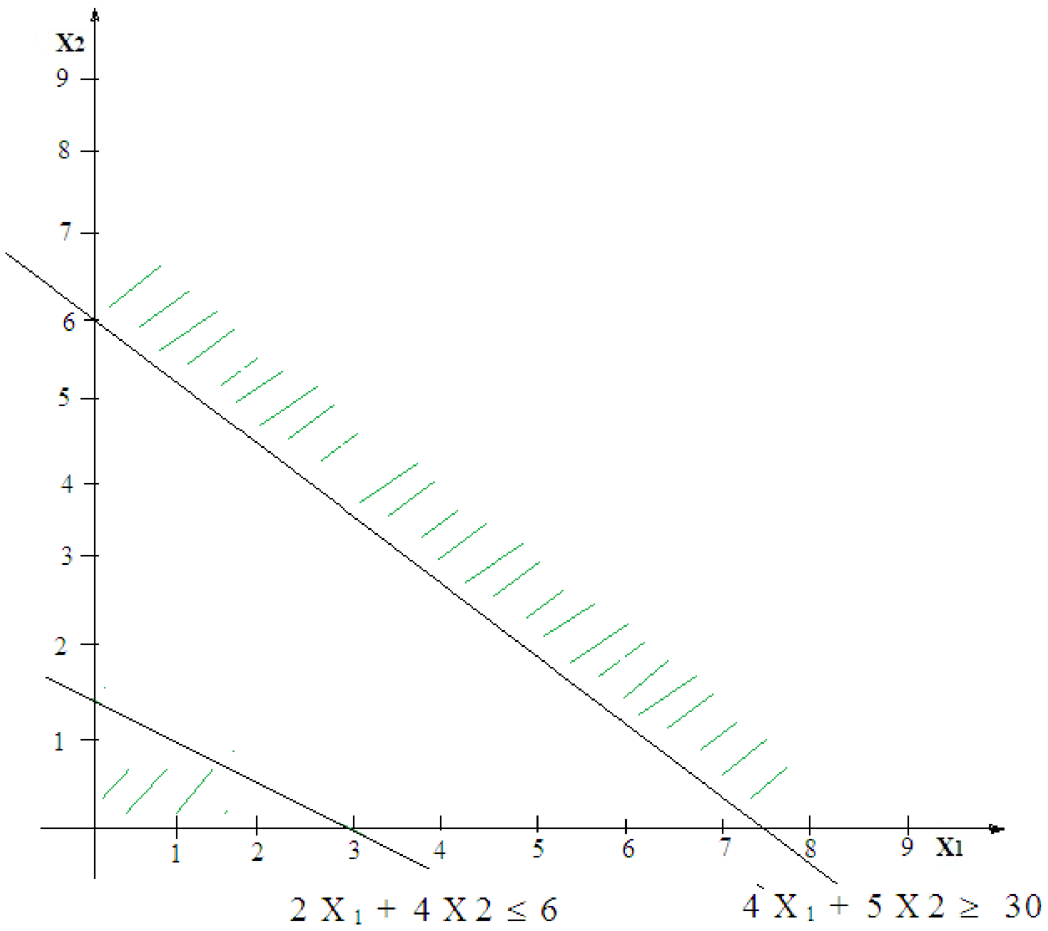
$$4X_1 + 5X_2 = 30 \ldots \ldots\ldots (1)$$

$$2X_1 + 4X_2 = 6 \ \ldots\ldots\ldots (2)$$

من (1) لما تكون $X_1 = 0$ فإن $X_2 = 6$, لما تكون $X_2 = 0$ فإن $X_1 = 30/4$.

من (2) لما تكون $X_1 = 0$ فإن $X_2 = 6/4$, لما تكون $X_2 = 0$ فإن $X_1 = 3$.

نمثل ها ته النقاط بيانيا:



في ها ته الحالة نقول بعدم وجود حلول مقبولة

حالة وجود أكثر من حل واحد أمثل (عدة حلول مثلى).

ليكن لدينا النموذج الخطي التالي مع قيود خطية و نريد تعظيمه

$$Max\ (Z) = 15\ X_1 + 30\ X_2$$

القيود :

$$2\ X_1 + 4\ X_2 \leq 80$$

$$2\ X_1 + 6\ X_2 \leq 90$$

$$X_1 \geq 0\ ,\ X_2 \geq 0$$

الحل :

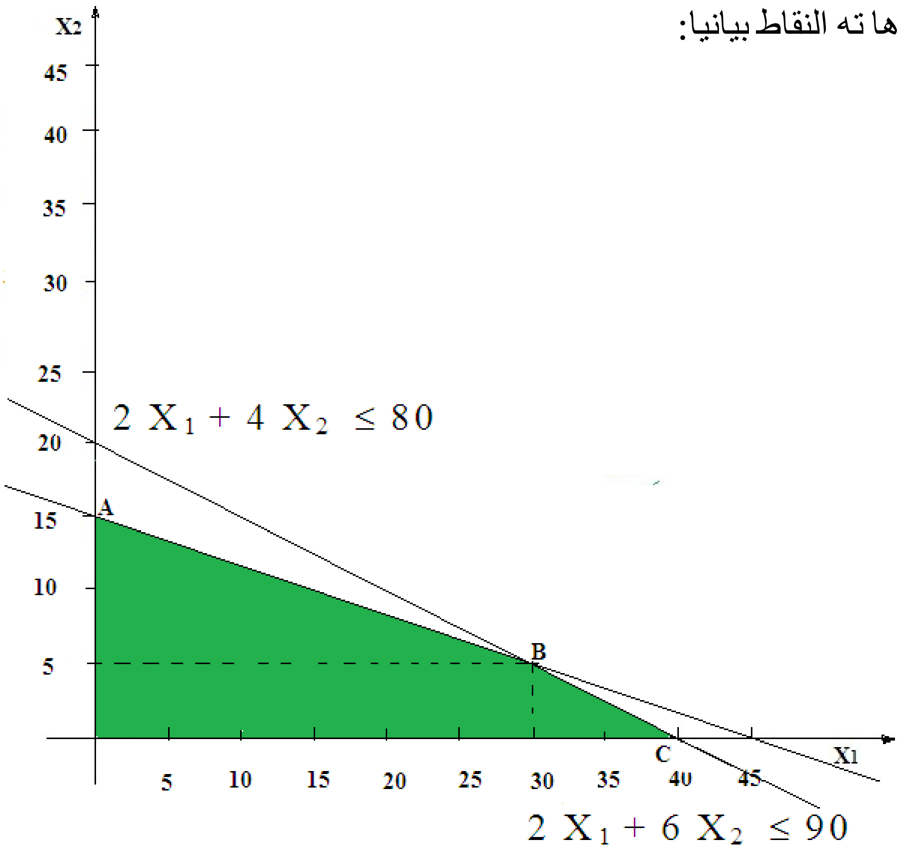
$$2\ X_1 + 4\ X_2 = 80\ \ldots\ \ldots.\ (1)$$

$$2\ X_1 + 6\ X_2 = 90\ \ ..\ \ldots.\ (2)$$

من (1) لما تكون $X_1 = 0$ فإن $X_2 = 20$, لما تكون $X_2 = 0$ فإن $X_1 = 40$.

من (2) لما تكون $X_1 = 0$ فإن $X_2 = 15$, لما تكون $X_2 = 0$ فإن $X_1 = 45$.

نمثل ها ته النقاط بيانيا:



بتعويض قيم X_2 و X_1 في دالة الهدف نجد : بالنسبة للنقاطة A تكون $Z = 90$

بالنسبة للنقاطة B تكون $Z = 600$;بالنسبة للنقاطة C تكون $Z = 600$

في ها ته الحالة نقول بوجود حلول مقبولة هي من B إلى C .

3.5.2 طريقة جداول السمبلكس

نظرا لمحدودية الطريقة البيانية (متغيرين) قام جورج دانتزيك عام 1947 بصياغة طريقة جديدة لحل مسائل الأمثلية عن طريق وضع لوغاريتم يسمح بتعظيم أو تدنية مسألة ما للوصول إلى الحل الأمثل : أين يتم إدراج أكثر من متغيرين بالإعتماد على جداول سميت جداول السمبلكس.

فالحياة الإقتصادية من عملية الإنتاج وصولا إلى عملية التسويق تعتمد على أكثر من عاملين متغيرين لبلوغ الأهداف المسطرة، من أجل هذا فإن هاته الطريقة سهلت عقبة كبيرة كانت تواجه متخذي القرار لرسم إستراتيجيتهم المستقبلية و تحديد كيفية الوصول إلى الأهداف الموجودة. فما هي هاته الجداول و كيفية إستعمالها و تفسير نتائحها ؟

جداول السمبلكس :

بإستخدام جداول أين نضع m عدد القيود، و n عدد المتغيرات حيث يفوق عددهما الإثنين أي $m \geq 2$ و n ، للإشارة إذا كان $m \leq 5$ و $n \leq 5$

فإن المسألة تحل يدويا أي ندرج الجداول و نقوم بحساب الحل يدويا لأنه بسيط، أما إذا تعدى إحداهما 5 ففي هاته الحالة يجب إستخدام الحاسوب لمعالجة المشكلة .

للوصول إلى الحل الأمثل بإستعمال هاته الطريقة يجب إتباع خطوات على الترتيب :

- الخطوة الأولى : الشكل القانوني للبرنامج الخطي و هو شكل رياضي معروف

$$\text{Max}(z) = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots\dots + C_nx_n$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \quad &\quad\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned}$$

حيث : $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; .... ; $x_n \geq 0$

– الخطوة الثانية :وضع البرنامج في شكل معياري

يتم تحويل عدم المساواة في القيود إلى مساواة أين يتم دمج متغير إضافي موجب أو معدوم نسميه متغير الفارق، فتصبح المتراجحات معادلات بطرف أيمن موجب :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots\dots + a_{in}xn \le b_i$$

تصبح $$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots\dots + a_{in}x_n + t_i = b_i$$

دالة الهدف يمكن تعظيمها Max أو تدنيتها Min ، لكن في هاته الحالة الأخيرة يجب تحويلها إلى Max عن طريق ضربها في (1-) و عوض من تدنية Z نقوم بتعظيم (Z -) إلى أقصى حد ممكن . بإدخال هذه الإجراءات يصبح لدينا الشكل المعياري للنموذج التالي :

$$Max (z) = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots\dots + C_nx_n +0\ t_1 +0\ t_2$$

و القيود :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n + t_1 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n + t_2 = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n + t_m = b_m$$

حيث :

$$x_1 \ge 0\ ,\ x_2 \ge 0, \dots\ x_m \ge 0\ ,\ t_1 \ge 0\ , \dots\ t_m \ge 0$$

الخطوة الثالثة : إدراج جداول الحلول

إذا كان الحل في الطريقة البيانية يجب أن يتواجد على حدود منطقة الحلول، و نختار أبعد نقطة تلامس بين المنطقة و محور دالة الهدف المسحوب، فالحل بطريقة السمبلكس يبتدأ بالحل الأولي و هو $x_n = 0\ ,\ x_2 = 0\ ,\ x_1 = 0$

وهذا بإفتراض عدم سلبية bi . طريقة السمبلكس المبنية على طريقة الإرتكاز لغوس (Pivot de Gauss) لحل نظام المعادلات الخطية يقدم على شكل جدول.

للشرح أكثر نأخذ المثال التالي :

ليكن لدينا برنامج خطي في شكله القانوني على النحو التالي:

$$\text{Max}(Z) = 1400\ x_1 + 1100\ x_2$$

تحت القيود الخطية :

$$2\ x_1 + 5\ x_2 \leq 140$$

$$3x_1 + 2\ x_2 \leq 150$$

$$x2 \geq 0; x1 \geq 0$$

نضعه في شكله المعياري وفق الشروط المذكورة سابقا فيصح :

$$\text{Max}(Z)\ Z = 1400\ x_1 + 1100\ x_2 + 0t1 + 0t2$$

$$2\ x_1 + 5\ x_2 + 1t_1 + 0t_2 = 140$$

$$3\ x_1 + 2\ x_2 + 0t_1 + 1t_2 = 150$$

$$x_1 \geq 0 \text{ ،} x2 \geq 0\ ,\ t_1 \geq 0 \text{ ،} t_2 \geq 0$$

في الجدول رقم -1- نحتفظ بمعاملات المعادلات السابقة فيكون لدينا الجدول الإبتدائي على الشكل التالي :

جدول 1 :

B	HB	x_1	x_2	t_1	t_2	C
t_1		2	5	1	0	140
t_2		3	2	0	1	150
Δ		1400	1100	0	0	0

هذا الجدول يعطينا الحل الأولي المقبول، بما أن المتغيرات الواقعة خارج القاعدة (HB) هي معدومة فهذا الحل هو : $x_1 = 0$ و $x_2 = 0$.

المتغيرات الواقعة في القاعدة (B) تقرأ نتائجها في العمود C .

و منه $t_1 = 140$ و $t_2 = 150$.

الخانة الأخيرة المتكونة من تقاطع C و Δ تعطينا قيمة z – إذا كان $0 = z$ – فإن $z = 0$.

بالنسبة للسطر Δ يمكن قراءة نتائجه على الشكل التالي :

في هذه المرحلة من الحل نقول بأن كل زيادة في x_1 بوحدة واحدة يؤدي إلى زيادة في دالة الهدف ب 1400، و أيضا كل زيادة في x_2 بوحدة واحدة يؤدي إلى زيادة في دالة الهدف ب 800 .

في المرحلة التالية لرسم الجدول رقم -2- نقوم بزيادة دالة الهدف بإدخال متغير داخل القاعدة ليأخذ مكان متغير آخر الذي ستتم إخراجه من القاعدة .

ملاحظة هامة:

يتم إختيار المتغير الداخل إلى القاعدة المتغير الذي ينتمي إلى HB و الذي لديه أكبر معامل موجب في السطر Δ .

و منه سيتم إختيار x1 من خارج القاعدة .

ليتم تحديد المتغير الخارج من القاعدة t_1 أو t_2 .... tn ، يجب علينا إضافة عمود جديد للجدول نسميه ب R . و ذلك بقسمة كل عنصر من العمود C بالترتيب على عناصر عمود المتغير الداخل، في حالتنا هذه x1 .

فيكون الجدول رقم 2 على الشكل:

B	HB	x_1	x_2	t_1	t_2	C	R
t_1		2	5	1	0	140	140/2 = 70
t_2		3	2	0	1	150	150/3 = 50
Δ		1400	1100	0	0	0	

ملاحظة هامة :

يتم إختيار المتغير الخارج من القاعدة بإختيار المتغير الواقع في القاعدة صاحب المعامل الإيجابي الأصغر في العمود R . وفقا لهذا الشرط، في حالتنا هذه t_2 يخرج من القاعدة

فيصبح الجدول رقم 2 على الشكل التالي:

الجدول رقم 3

B	HB	x_1	x_2	t_1	t_2	C	R
t_1		2	5	1	0	140	70
t_2		3	2	0	1	150	50 المتغير الخارج
	Δ	1400 المتغير الداخل	1100	0	0	0	

نسمي عنصر الإرتكاز (Pivot) العنصر الذي يتقاطع فيه المتغير الداخل مع الخارج في هذه الحالة عنصر الإرتكاز هو 3 .

نقطة هامة :

لإيجاد جدول الحلول رقم 1 يجب أن نطبق القواعد التالية :

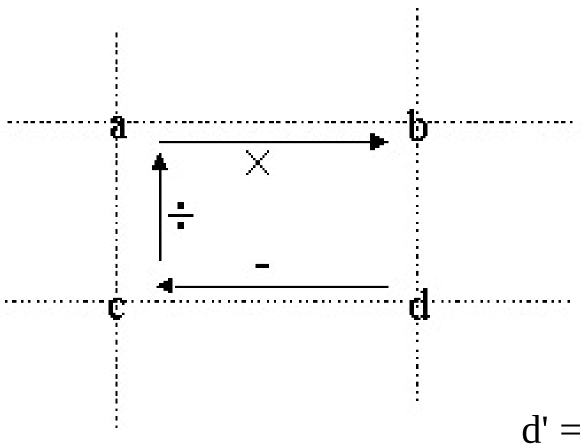
عنصر الإرتكاز يصبح مساوي ل 1 .

معاملات عناصر سطر الإرتكاز تقسم على عنصر الإرتكاز .

معاملات عمود الإرتكاز تصبح مساوية للصفر 0 بإستثناء خانة عنصر الإرتكاز .

معاملات العناصر الأخرى تطبق عليها قاعدة المثلث.

طريقة قاعدة المثلث تحسب على الشكل التالي :



$$d' = d - (c / a) \times b$$

حيث : d' تمثل العنصر الجديد المحسوب بالطريقة الثلاثية

d تمثل العنصر القديم

c تمثل العنصر على يسار d من نفس السطر

a تمثل العنصر المقابل ل c عموديا

بتطبيق القواعد نتحصل على جدول الحلول التالي :

جدول الحلول رقم 4 :

HB B	x_1	x_2	t_1	t_2	C
t_1	0	11/3	1	-2/3	40
x_1	1	2/3	0	1/3	50
Δ	0	500/3	0	-1400/3	-70000

هذا الجدول يعطينا حل أخر ممكنة و مقبولة و يقرأ على النحو التالي :

- المتغيرات خارج القاعدة HB هي معدومة أي $x_2 = 0$ و $t_2 = 0$

(في نفس السطر x_2 و t_2 ليسا خارجين على القاعدة، تركناهما للتذكير بأن الأمر يتعلق بأعمدة المعاملات للمتغيرين) .

- قيم المتغيرات في القاعدة B تقرأ في العمود C . أي $x_1= 50$ و $t_1= 40$.
- آخر خانة و التي تمثل نقطة التقاطع بين Δ و C . تعطينا القيمة :

$-Z = -70000$: $-Z$ أي أن : $Z = 70000$.

السطر Δ يعطينا القيم الهامشية التي تقرأ على الشكل التالي :

في هذه المرحلة من الحل نقول بأن الزيادة بوحدة واحدة من X_2 تؤدي إلى زيادة في دالة الهدف ب 500/3، و الزيادة بوحدة واحدة من t_2 تؤدي إلى نقصان في دالة الهدف ب **1400/3.**

(ملاحظة : الزيادة بوحدة واحدة من المتغير الفارق t_2 هي في الحقيقة نقصان في العنصر

الثاني من الدالة بوحدة واحدة) .

الجدول رقم 5

B \ HB	x_1	x_2	t_1	t_2	C	R
t_1	0	11/3	1	-2/3	40	120/11 المتغير الخارج
x_1	1	2/3	0	1/3	50	75
Δ	0	500/3 المتغير الداخل	0	-1400/3	-70000	

فيكون الجدول 6:

B \ HB	x_1	x_2	t_1	t_2	C
x_2	0	1	3/11	-3/11	120/11
x_1	1	0	-3/11	5/11	430/11
Δ	0	1	-500/11	-45200/33	-90000/11

هذا الجدول يعطينا الحل الثالث المقبول أين :

المتغيرات خارج القاعدة (HB) تكون معدومة $t_1 = 0$ و $t_2 = 0$.

(x1 و x2 لا يعتبران خارج القاعدة بل وجودهما للتذكير بأن هناك عمودين لمعاملات هاذين العنصرين).

قيم المتغيرات في القاعدة "B " تقرأ في العمود C فنجد $x_2 = 120/11$ و $x_1 = 430/11$

آخر خانة التي تمثل تقاطع Δ و C تعطينا قيمة Z -

$-Z = -90000/11$ ومنه : $Z = 90000/11$.

السطر Δ القيم الهامشية التي تفسر على الشكل التالي :

كل زيادة بوحدة واحدة من t_1 تؤدي إلى تناقص دالة الهدف ب 500/11 ، وكل زيادة بوحدة واحدة من t_2 تؤدي إلى تناقص دالة الهدف ب 45200/33 .

ملاحظة هامة :

متى ننهي العملية الحسابية ؟

لما تكون كل معاملات السطر Δ المقابلة للمتغيرات HB سلبية أو معدومة، فنقول أننا وصلنا إلى الحل الأمثل.

4.5.2 المسائل الثنائية

تعرضنا فيما سبق إلى طرق حل المسائل الأصلية، وقبل ذلك قمنا بإعطاء فكرة عامة في الجانب النظري عن المسألة الثنائية فقلنا هي عبارة عن عملية توليد أو إستنساخ برنامج خطي جديد من برنامج خطي أصلي أين تكون العلاقة بينهما متعاكسة فثنائية الثنائية هي البرنامج أو المسألة الأصلية. و عليه سوف نقوم بدراسة العلاقة التي تربط بين هذين البرنامجين آخذين بعين الإعتبار أن المسألة الثنائية تعتمد على نفس المعطيات الأصلية إلا أنها تعاود صياغتهابشكل آخر و كذا فيما يخص المعنى الإقتصادي لمتغيراتها.

يتم الحصول على المسألة الثنائية أو ثنائية البرنامج الأصلي وفقا للشروط الآتية :

البرنامج الأصلي	البرنامج الثنائي
- لدينا m من القيود من الشكل أصغر من أو تساوي $\leq$.	- لدينا n من القيود من الطبيعة أكبر من أو تساوي $\geq$.
- لدينا n متغير للنشاط .	- لدينا m متغير الفروق .
- لدينا m متغير فروق .	- لدينا n متغير نشاط .
- كتابة على السطور.	كتابة على الأعمدة .

بتطبيق ما ذكرناه نأخذ المثال التالي :

المسألة الأصلية :

$$\max Z = 1800\, x_1 + 1300\, x_2$$
$$5\, x_1 + 7\, x_2 \leq 210$$
$$8x_1 + 4\, x_2 \leq 260$$

حيث : $x_1 \geq 0$ ، $x_2 \geq 0$

تحول إلى ثنائية وفقا للشروط أعلاه فتصبح :

$$\min W = 210\, y_1 + 260\, y_2$$
$$5\, y_1 + 8\, y_2 \geq 1800$$
$$7\, y_1 + 4\, y_2 \geq 1300$$

في الأمثلية نجد أن البرنامج الأصلي و ثنائيته مترابطان بالقواعد التالية :

الدالة الهدف بالنسبة لكليهما Z و W لها نفس القيمة المثلى.

القيمة الهامشية لمتغير داخل البرنامج تساوي القيمة المثلى المعاكسة للمتغير المماثل في البرنامج الثنائي و العكس صحيح .

5.5.2 الحالات الخاصة للبرمجة الخطية

في الحالات العادية التي تم التطرق إليها من قبل يجب أن تتوفر في البرنامج الشروط التالية لإيجاد الحل الأمثل :

- العناصر الموجودة على يمين القيود و تشترط عدم السلبية أي $b_i \geq 0$.
- المتغيرات الموجودة على يسار القيود يجب أن لا تكون سلبية $x_i \geq 0$.
- القيود يجب أن تكون على الشكل " ≤ ".

السؤال الذي يطرح نفسه هو كيف نعالج مسألة إذا لم يلبي أحد أو كل هاته الشروط .

الحالة 1 : إذا كان bi سالب :

في هاته الحالة نقوم بضرب القيود في -1 و هو ما يغير في إتجاه المتراجحة .

الحالة 2 : متغير النشاط لا يلبي شرط عدم السلبية :

لإزالة هذا اللبس و إنطلاقا من الأمر البديهي أن كل عدد موجب كان أو سالب يمكن أن يكتب على شكل فرق بين عددين آخرين موجبين (مثلا : 5 - 3 = 2 -) .

الحالة 3 : واحد من القيود لا يلبي شرط " ≤ " :

و هنا يوجد صنفين إما القيد على شكل ≥ أو من الشكل = .

- بالنسبة للقيد من الشكل " ≥ " فيكفينا إضافة متغير الفرق موجب مثلا :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{in}x_n \geq b_i$$

تصبح :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots\dots + a_{in}x_n - t_i = b_i$$

- تتبع تقريبا نفس الطريقة فنقوم بإضافة متغير موجب نسميه متغير إصطناعي الذي سيمثل القيد في القاعبالنسبة للقيد من الشكل " = " : ندة .

مثلا :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{in}x_n = b_i$$

تصبح :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots\dots + a_{in}x_n + e_i = b_i$$

- و من الواضح من أجل أن تتحقق المساواة يجب أن يكون $ei = 0$.

أمثلة على معالجة الحالات الخاصة :

$$\max Z = 15\,x_1 + 12\,x_2 + 10\,x3$$

$$(1) \qquad 2\,x_1 + 3\,x_2 - x_3 \le 10$$

$$(2) \qquad 5\,x_1 + 2\,x_2 + 4x_3 = 20$$

$$(3) \qquad -3\,x_1 + 6\,x_2 - 5\,x_3 \le -6$$

$$(4) \qquad x_1 \ge 0\,,\; x_3 \ge 0$$

بالنسبة ل (1) : نضيف متغير الفرق t1 فتصبح

$$(1) \qquad 2\,x_1 + 3\,x_2 - x_3 + t_1 = 10$$

بالنسبة ل (2) : نضيف متغير إصطناعي e_2 فتصبح

$$(2) \quad 5\,x_1 + 2\,x_2 + 4x_3 + e_2 = 20$$

بالنسبة ل (3) : فإننا نضرب في -1 فتصبح

$$(3) \qquad 3\,x_1 - 6\,x_2 + 5\,x_3 \ge 6$$

ثم نقوم بإضافة متغير الفارق t_3 ، و متغير إصطناعي e_3 ، فتصبح على الشكل :

$$3\,x_1 - 6\,x_2 + 5\,x_3 - t_3 + e_3 = 3$$

بالنسبة ل (4) : فإن x 2 لا يلبي شرط عدم السلبية فتصبح :

$x_2 = x_2' - x_2''$ هذه الطريقة تسمح لنا الأخذ بعين الإعتبار المتغيرات الإصطناعية، ثم تعاقب بإعطائها معاملات عالية جدا في المعادلة الإقتصادية (M- بالنسبة لمسألة max، و M+ بالنسبة لمسأة min) .

فيعطينا الشكل النهائي للمسألة المصححة و تصبح في شكلها العام على النحو :

$$\max Z = 15\,x_1 + 12\,x'_2 + 12\,x_2'' + 10\,x_3$$

$$2\,x_1 + 3\,x_2 - x_3 + t_1 = 10$$

$$5x_1 + 2\,x_2 + 4x_3 + e_2 = 20$$

$$x_1 - 6\,x_2 + 5\,x_3 - t_3 + e_3 = 63$$

$$x_1 \ge 0\,;\; x_2' \ge 0\,;\; x_2'' \ge 0\,;\; x_3 \ge 0\,;\; t_1 \ge 0\,;\; t_3 \ge 0\,;\; e_2 \ge 0\,;\; e_3 \ge 0$$

6.5.2 طريقة العقوبات أو M الكبير

هاته العقوبات تهدف إلى إقصاء المتغيرات الإصطناعية عند المرور بمراحل الحساب، فإذا بقيت في القاعدة أثناء الوصول إلى الأمثلية بقيمة غير معدومة فنقول أن البرنامج ليس له حل .

مثال لنجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي :

$$\text{Min } z = 7x1 + 20x2$$

$$12x1 + 15x2 \geq 23$$

$$6x1 + 18x2 \geq 31$$

$$x1 \geq 0 \quad ; \quad x2 \geq 0$$

يصبح الشكل العام :

$$\text{Min } z = 7x_1 + 20x_2 + 0t_1 + 0t_2 + Me_1 + Me_2$$

$$12x_1 + 15x_2 - 1t1 + 0t2 + 1e1 + 0e2 = 23$$

$$6x_1 + 18x_2 + 0t1 - 1t2 + 0e1 + 1e2 = 31$$

$$x1 \geq 0 \quad ; \quad x2 \geq 0 ; t_1 \geq 0 ; \ t_2 \geq 0 , e1 \geq 0 ; \ e2 \geq 0$$

الجدول رقم 1 :

B \ HB	x_1	x_2	t_1	t_2	e_1	e_2	C
e_1	12	15	-1	0	1	0	23
e_2	6	18	0	-1	0	1	31
Δ'	7	20	0	0	M	M	O

السطر Δ' يعطينا معاملات الدالة الإقتصادية، دون أن يعطينا القيم الهامشية HB، أيضا القيم الإصطناعية موجودة داخل القاعدة و يجب أن تكون لديها قيم معدومة.

في جداول السمبلكس إذا وضعنا Ck معاملات الدالة الإقتصادية و a_ik معاملات الجدول

فإن:

– القيم الهامشية mj تكون معدومة بالنسبة لمتغيرات القاعدة، و مساوية ل :

بالنسبة للمتغيرات خارج القاعدة. c_j -□$\Sigma a_{ik}c_k$

– قيمة الدالة الإقتصادية تساوي $-\Sigma a_{ik}\, c_k$

و منه الجدول رقم 2 يكون على الشكل التالي :

Cj	7	20	0	0	M	M			aik c			
HB B	x_1	x_2	t_1	t_2	e_1	e_2	C		x_1	x_2	t_1	t_2
e_1	12	15	-1	0	1	0	23		12M	15M	-M	0
e_2	6	18	0	-1	0	1	31		6M	18M	0	-M
'Δ	7-18M	20-33M	M	M	0	0	-54M	Σ aik Ck	18M	33M	-M	-M

ما دمنا نبحث على min، فالمتغير الداخل هو المتغير الذي لديه أكبر معامل سالب في حالتنا هذه : x_2 فيكفينا أن ننظر فقط إلى معامل M لأنه كبير جدا، نلجأ إلى المعامل المستقل في حالة ما إذا تساوى معاملين أو أكثر ل : M .

فيصبح الجدول رقم 3 :

م . د

HB B	x_1	x_2	t_1	t_2	e_1	e_2	C
e_1	12	{15}	-1	0	1	0	23
e_2	6	18	0	-1	0	1	31
Δ	7-18M	20-33M	M	M	0	0	-54M

م .خ

Pv=15

المتغير الإصطناعي الخارج يتم حذفه نهائيا من القاعدة، في حالتنا هذه يتم شطب e1 ،

فيصبح الجدول رقم 3على الشكل التالي :

الجدول رقم 4 :

B \ HB	x_1	x_2	t_1	t_2	e_2	C
X_2	4/5	1	-1/15	0	0	23/15
e_2	-42/5	0	6/5	-1	1	17/5
Δ	9-42/518M	0	4/3-6/5M	M	0	-92/3-17/5M

بعدها نعيد نفس الإجراءات بإتباع نفس الخطوات.

الجدول رقم 5 :

	B \ HB	x_1	x_2	t_1	t_2	e_2	C
	X_2	4/5	1	-1/15	0	0	23/15
م.خ	e_2	-42/5	0	6/5	-1	1	17/5
	Δ	-9+42/518M	0	4/3-6/5M	M	0	-92/3-17/5M

وبعد خروج المتغير الإصطناعي الثاني e_2 و الأخير نتحصل على الجدول رقم 6

الجدول رقم 6 :

HB B	x_1	x_2	t_2	C
X_2	1/3	1	-1/18	31/18
t_1	-7	0	-1	5/6
Δ	39/5	0	10/9	-310/9

و بهذا نتحصل على الحل الأمثل و هو :

$$z = -\Delta \Rightarrow z = 310/9$$

لتحقيق الحل الأمثل المقدر ب : 310/9 وحدة يجب استخدام 31/18 وحدة من X_2 و0 وحدة من. X_1

7.5.2 نماذج النقل

تمهيد:

تعتبر مسائل النقل إحدى المواضيع الهامة في مجال البرمجة الخطية ، حيث تهتم بالبحث عن أقل تكلفة ممكنة لنقل بضائع أو أشخاص أو أي شيء آخر من مجموعة من الأماكن تعرف بمراكز العرض إلى أماكن أخرى تعرف بأماكن الطلب. و سنتطرق خلال هذه المحاضرة إلى العناصر التالية :

1- الشكل العام لجدول نموذج النقل.

2- مراحل حل نموذج النقل المتوازن.

3- حالات خاصة لنماذج النقل.

الشكل العام لجدول نموذج النقل :

إلى / من	D_1	D_2	D_n	العرض
S_1	X_{11} $\boxed{C_{11}}$	X_{12} $\boxed{C_{12}}$	X_{1m} $\boxed{C_{1m}}$	b_1
S_2	X_{21} $\boxed{C_{21}}$	X_{22} $\boxed{C_{22}}$	X_{2m} $\boxed{C_{2m}}$	b_2
S_m	X_{m1} $\boxed{C_{m1}}$	X_{m2} $\boxed{C_{m2}}$	X_{nm} $\boxed{C_{nm}}$	b_n
الطلب	a_1	a_2	a_n	إجمالي العرض = إجمالي الطلب

و يمكن التعبير عن نموذج النقل السابق بإستخدام النموذج التالي :

$$\text{Min }(Z) = X_{11}C_{11} + X_{12}C_{12} + \ldots\ldots\ldots\ldots + X_{nm}C_{nm}$$

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} + \ldots\ldots\ldots + X_{1m} = b_1 \\ X_{21} + X_{22} + \ldots\ldots\ldots + X_{2m} = b_2 \\ \vdots \\ X_{n1} + X_{n2} + \ldots\ldots\ldots + X_{nm} = b_m \\ X_{11} + X_{21} + \ldots\ldots\ldots + X_{n1} = a_1 \\ \vdots \\ X_{1m} + X_{2m} + \ldots\ldots + X_{nm} = a_n \end{cases}$$

شرط عدم السلبية $X_{ij} \geq 0$

مثال :

يمتلك مصنع 3 مستودعات هي A، B، C تمثل أماكن للعرض، و الطاقة الإستعابية لها هي على التوالي: 250، 350، 300 على الترتيب، إذا كان المصنع يورد (ينقل) منتجاته إلى ثلاث من كبار التجار يمثلون أماكن الطلب وهي: D ، E ،F و بطاقة إستعابية قدرها 200، 300، 400 وحدة على الترتيب، و الجدول التالي يبين تكاليف نقل الوحدة الواحدة بالدينار من مخزن المصنع إلى مخزن الجملة.

إلى من	D	E	F
A	5	4	3
B	7	5	6
C	5	6	9

المطلوب:

1- تشكيل جدول النقل للمصنع.

2- تشكيل البرنامج الخطي لجدول النقل.

الحل:

1- تشكيل جدول النقل للمصنع:

$$Min\ (Z) = 5\ X_{11} + 4X_{12} + 3X_{13} + 7X_{21} + 5X_{22} + 6X_{23} + 5X_{31} + 6X_{32} + 9X_{33}$$

من \ إلى	D	E	F	العرض
A	X_{11} 5	X_{12} 4	X_{13} 3	250
B	X_{21} 7	X_{22} 5	X_{23} 6	350
C	X_{31} 5	X_{32} 6	X_{33} 9	300
				900
الطلب	200	300	400	

2- تشكيل البرنامج الخطي لجدول النقل :

$$\begin{cases} 5X_{11} + 4X_{12} + 3X_{13} = 250 \\ 7X_{21} + 5X_{22} + 6X_{23} = 350 \\ 5X_{31} + 6X_{32} + 9X_{33} = 300 \\ 5X_{11} + 7X_{21} + 5X_{31} = 200 \\ 4X_{12} + 5X_{22} + 6X_{32} = 300 \\ 3X_{13} + 6X_{23} + 9X_{33} = 400 \end{cases}$$

$$X_{ij} \geq 0$$

مراحل حل مسائل (نموذج) النقل المتوازنة :

كغيرها من الأدوات المستخدمة في البرامج الخطية فإن نماذج النقل يمكن حلها وفق المراحل التالية :

أ. مرحلة تشكيل جدول الحل الأولي :

يمكن الحصول عليه بإستخدام الطرق التالية :

1. طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

2. طريقة أقل تكلفة.

3. طريقة فوجل " Vogel " التقريبية " VAM "

ب. إختبار مدى كون الحل الأولي أساسي :

و يتحقق ذلك بتحقق التالي (n+m-1) من الخانات المملوءة حيث أن n عدد الأسطر و m عدد الأعمدة.

ج. في حالة كون الحل الأولي أساسي :

نقوم بإختيار مثلوية الحل بإستخدام طريقة التوزيع المعدل.

د. إذا كان الحل غير أمثل نقوم بتحسين الحل القائم.

ه. نعيد إختبار مثولية الحل الجديد حتى نتوصل إلى الحل الأمثل.

طريقة الزاوية الشمالية الغربية :

تعتمد هذه الطريقة على إختبار الخانة الواقعة في الزاوية الشمالية للجدول نقوم بملئ هذه الخانة بأقصى قيمة لها (هي أقل قيمة بين العرض و الطلب في تلك الخانة) ثم نقوم بشطب بقية الخانات الفارغة داخل السطر أو العمود الممتلئ و ننتقل بإتجاه السطر أو العمود الغير ممتلئ و نختلر الخانة الموالية للخانة السابقة ثم نملئ هذه الخانة الجديدة بأقصى قيمة لها، و نستمر في هذه العملية حتى نكمل الجدول.

من \ إلى	D	E	F	العرض
A	$\boxed{5}$ 200	$\boxed{4}$ 50	$\boxed{3}$ /	250
B	$\boxed{7}$ /	$\boxed{5}$ 250	$\boxed{6}$ 100	350
C	$\boxed{5}$ /	$\boxed{6}$ /	$\boxed{9}$ 300	300
الطلب	200	300	400	900

m= 3,n = 3, n+m-1 3+3-1 = 5

إذا الحل أساسي.

إجمالي التكلفة. CT = 200*5 + 50*4 + 250*5 + 100*6 + 300*9 = 5750

طريقة أقل تكلفة :

أقل تكلفة ممكنة

من \ إلى	D	E	F	العرض
A	$\boxed{5}$ /	$\boxed{4}$ /	$\boxed{3}$ 250	250
B	$\boxed{7}$ /	$\boxed{5}$ 300	$\boxed{6}$ 50	350
C	$\boxed{5}$ 200	$\boxed{6}$ /	$\boxed{9}$ 100	300
الطلب	200	300	400	900

CT = 250*3 + 300*5 + 50*6 * 200*5 + 100*9 = 4450

* تعتمد هذه الطريقة على إختيار الخانة التي تحتوي على أقل تكلفة و نقوم بملئ هذه الخانة بأقصى قيمة لها والتي تمثل أقل قيمة بين العرض و الطلب مع شطب بقية الخانات الفارغة

داخل السطر أو العمود ثم نختار الخانة الموالية التي بها أقل تكلفة.
ملاحظة : في حالة تساوي التكلفة الدنيا لخانتين فإننا نختار الخانة التي يمكن أن تحملها بأكبر كمية من السلع.

طريقة فوجل التقريبية :

تتم هذه الطريقة حسب المنهاجية التالية :

1/ نحسب الفرق بين أدنى تكلفة و التكلفة الموالية لها في كل سطر أو عمود و يسمى هذا الفرق بأرقام فوجل.

2/ نبحث عن أكبر رقم من أرقام فوجل المحسوبة في الخطوة السابقة و نختار السطر أو العمود الذي له أكبر قيمة.

3/ في السطر أو العمود الذي تم إختيار بداخله الخانة التي بها أقل تكلفة و تضع بها أقصى كمية ممكنة (أقل قيمة بين العرض و الطلب) لتلك الخانة.

نعيد الخطوة الأولى و الثانية مع إلغاء السطر أو العمود الممتلئ و نستمر في هذه العملية حتى نملئ الجدول.

ملاحظة : في حالة وجود قيمتين عظمتين متساويتين بأرقام فوجل فإننا نقارن بين التكلفتين الدنيويتين لذلك السطر أو العمد و نختار السطر أو العمود صاحب ادنى تكلفة و في حالة تساوي تلك التكلفتين الدنيويتين فإننا نختار السطر أو العمود الذي يحتوي على أكبر كمية ممكنة من السلع.

أكبر قيمة

	2	0	1	3	
من \ إلى	D		E	F	العرض
A	5 /		4 /	3 (250)	250
B	7 /		5 (200)	6 (150)	350
C	5 (200)		6 (100)	9 /	300
الطلب	200		300	400	$\Sigma a_j = \Sigma b_i$ 900

أكبر كمية ممكنة من السلع

$$CT = 250*3 + 200*5 + 150*6 + 200*5 + 100*6 = 4250$$

- **إختبار مثلوية الحل بإستعمال طريقة الحل المعدل :**

تعتمد هذه الطريقة على تقييم التكلفة الهامشية للخانات الخالية وكلما كانت هناك مربعات خالية ذات تكاليف هامشية سالبة و إذا وجد مربع واحد على الأقل يحمل تكلفة هامشية سالبة فإن هذا يدل على عدم مثلوية الحل ويتم حساب التكلفة الهامشيةفإن هذا يدل على عدم مثلوية الحل ويتم حساب التكلفة الهامشية للمربعات المثالية عبر المراحل التالية :

ـ إيجاد منظومة المعادلات للمربعات المملوءة و التي تتعلق بقيم الأسطر و الأعمدة حيث يتم إعطاء لكل سطر قيمة R ولكل عمود قيمة K وتكون المعادلات من الشكل التالي :

$$R_i + K_j = C_{ij}$$

ـ حل منظومة المعادلات السابقة من أجل إيجاد قيم R_i و K_j لكل سطر و عمود وهذا بإفتراض أن $R_1 = 0$.

ـ حساب التكلفة الهامشية للمربعات الخالية وفق القاعدة التالية :

$\delta_{ij} = C_{ij} - R_i - K_j$

ـ في حالة وجود مربع واحد فارغ على الاقل يحمل تكلفة هامشية سالبة نقول ان الحل ليس الأمثل اما إذا كانت δ_{ij} لكل الخانات الفارغة أكبر من أو يساوي $\delta_{ij} \geq 0$ نقول أن الحل أمثلا ويقبل حلول بديلة. أما إذا كانت $\delta_{ij} \geq 0$ أي أكبر تماما من الصفر فإن الحل أمثلا.

تحسين الحل القائم

يمكن تحسين الحل السابق من خلال إختيار الخانة الخالي الذي يحمل تكلفة هامشيةδ سالبة وكبيرة من حيث القيمة المطلقة من أجل إستخدامها في تحسين الحل مثل : |2-| و |3-| و |4-| .

ننشئ مسار مغلق خاص بتلك الخانة الخالية ينطلق هذا المسار من تلك الخانة الخالية ويتميز المسار بالخصائص التالية :

ـ المسار مغلق (يبدأ منها وينتهي إليها)

ـ أن يحتوي على مربع خالي واحد فقط وهو الذي إخترته.

ـ يحتوي المسار على عدد زوجي من الخانات.

ـ مربعات المسار تكون متتابعة أفقية أو عمودية (مسار غير منقطع أو غير مستمر).

ـ يتحرك المسار عكس عقارب الساعة (من اليمين إلى الشمال) وفق زوايا قائمة و لا يسمح بالحركة القطرية.

ـ الزوايا القائمة تكون في مربعات مملوءة.

$\Leftarrow$ و يتم تحسين الحل من خلال تأشير الزوايا القائمة للمسار بإشارات (+ و -) متناوبة من خلال الإنطلاق من الخانة الفارغة و نعطي له قيمة (إشارة +)، و الخانة التي بعده تأخذ (إشارة -) و هكذا حتى نكمل المسار، نختار من بين الخانات ذات الإشارة السالبة الخانة التي تحمل أقل كمية ثم نقوم بنقل تلك الكمية عبر مربعات المسار بحيث نضيفها إلى كمية في الخانات ذات الإشارة الموجبة و نطرحها من الكمية في الخانات ذات الإشارة السالبة.

مثال :

	من \ إلى	D (K_1)	E (K_2)	F (K_3)	العرض
R_1	A	/ 5	/ 4	250 — 3	250
R_2	B	/ 7	300 - 5	50 + 6	350
R_3	C	200 — 5	+ 6	100 - 9	300
	الطلب	200	300	400	$\Sigma a_j = \Sigma b_i$ 900

$$n + m - 1 = 5$$

$$3 + 3 - 1 = 5$$

إذا الحل أساسي $CT = 4450$

$R_i + K_j = C_{ij}$1

$$\delta_{ij} = C_{ij} - R_i - K_j \text{ و} R_i + K_j = C_{ij}$$

$$\begin{cases} R_1 + K_3 = 3 \\ R_2 + K_2 = 5 \\ R_3 + K_1 = 5 \\ R_3 + K_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} R_1 = 0 & K_1 = -1 \\ R_2 = 3 & K_2 = 2 \\ R_3 = 6 & K_3 = 3 \end{matrix}$$

$$\delta_{ij} = C_{ij} - R_i - K_j$$

$$\delta_{AO} = 5 - R_1 - K_1 = 5-0-(-1) = 6$$

$$\delta_{AE} = 4 - R_1 - K_2 = 4 - 0 - 2 = 2$$

$$\delta_{BO} = 7 - R_2 - K_1 = 7 - 3 - (-1) = 5$$

$$\delta_{CE} = 6 - R_3 - K_2 = 6 - 6 - 2 = -2$$

نعيد الإختبار مدى كون الحل أساسيا ومدى كون الحل أمثلا و نستمر بنفس الخطوات حتى

نتوصل إلى الحل الأمثل.

		K_1	K_2	K_3	
	إلى / من	D	E	F	العرض
R_1	A	/ $\boxed{5}$	/ $\boxed{4}$	250 $\boxed{3}$	250
R_2	B	/ $\boxed{7}$	200 $\boxed{5}$	150 $\boxed{6}$	350
R_3	C	200 $\boxed{5}$	100 $\boxed{6}$	/ $\boxed{9}$	300
	الطلب	200	300	400	$\Sigma a_j = \Sigma b_i$ 900

$$CE \longrightarrow CF \longrightarrow BF \longrightarrow BE$$

$$CT = 250 \times 3 + 150 \times 6 + 200 \times 5 + 200 \times 5 + 100 \times 6 = 4250$$

$R_i + K_j = C_{ij}$ و $\delta_{ij} = C_{ij} - R_i - K_j$

"الفصل الثالث البرمجة اللاخطية"

1.3الاطار العام للبرمجة اللاخطية

كما رأينا في السابق فإن هناك مسائل برمجة رياضية لا تخضع إلى البرمجة الخطية ولذا فهي تحل بطرق البرمجة اللاخطية.

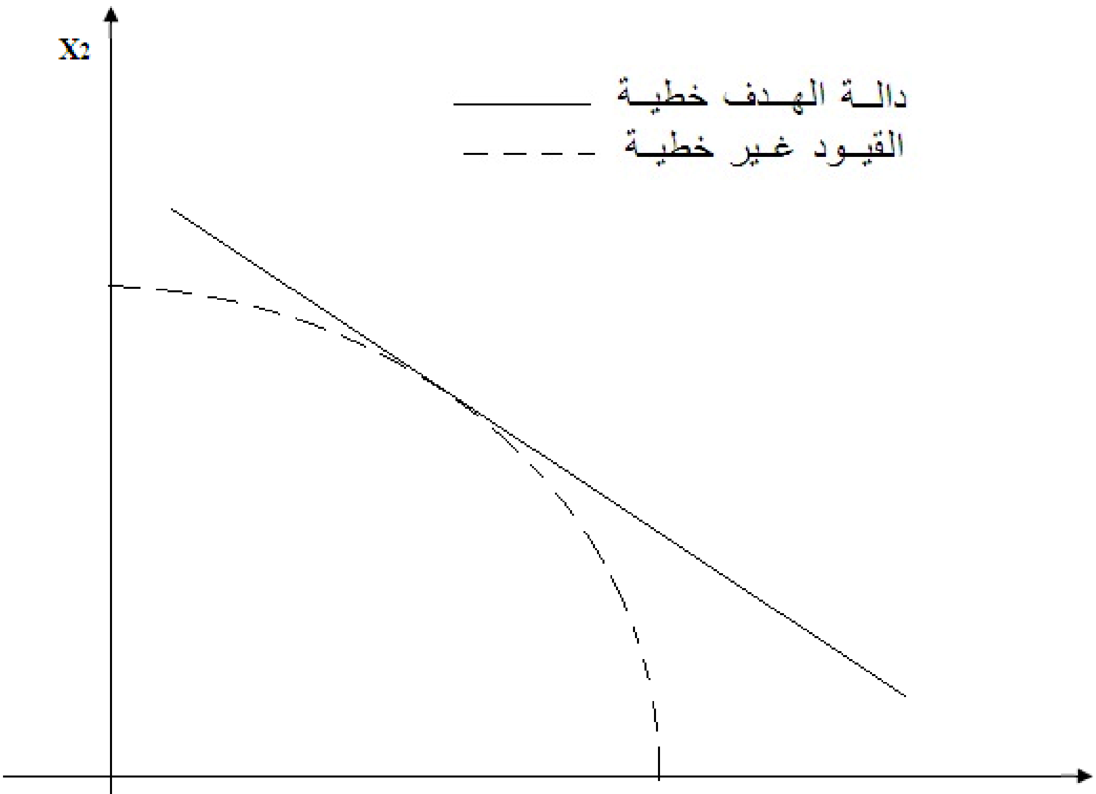
في حقيقة الأمر البرمجة الخطية لا تمثل إلا حالة خاصة من المسائل الأمثلية الموجودة. و أنه في كثير من الحالات نجد أنفسنا مجبرين على التعامل مع دوال إقتصادية أو قيود لهاته الدوال أو الإثنين معا تكون غير خطية.

للتذكير فإن نموذج لمسألة خطية يكون ممثل بيانيا بمحاور تتقاطع في نقاط عظمى التي تمثل الحل الأمثل.

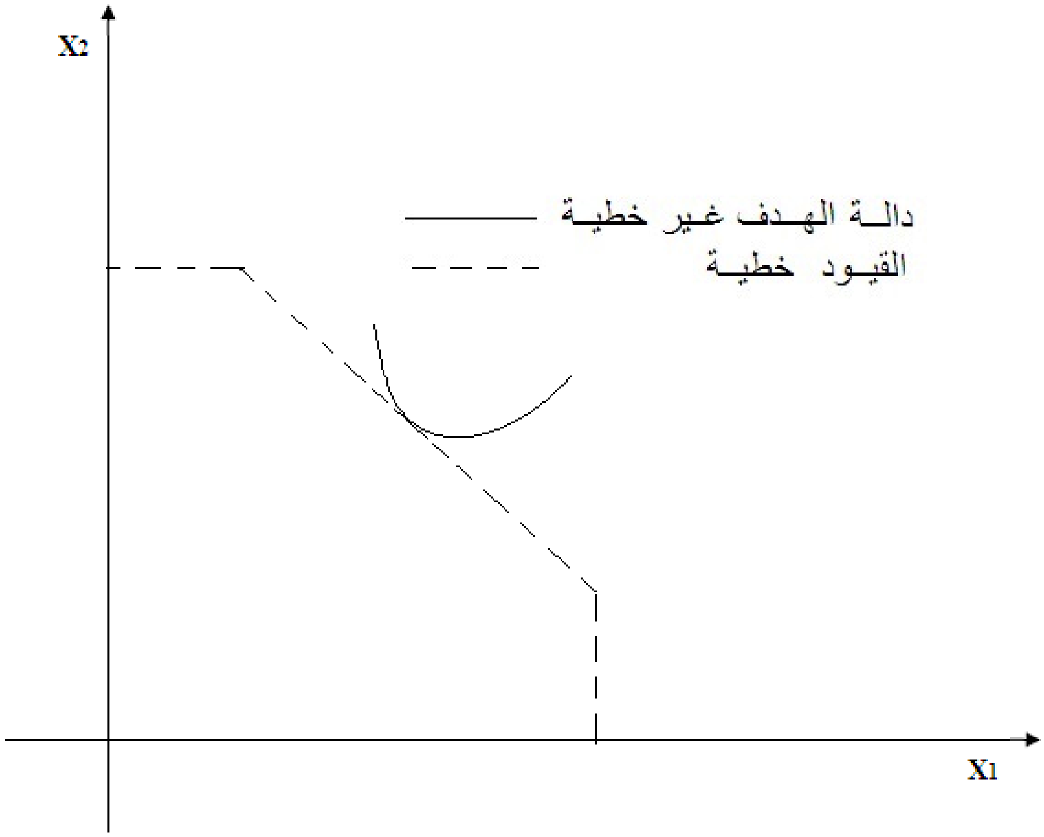
على العكس من هذا فإن حل مسائل البرمجة اللاخطية هو أصعب من هذا بكثير و طريقة السمبلكس لا يمكن إستخدامها هنا.

لتبيين هاته الصعوبة في إيجاد الحل للمسائل اللاخطية سوف نعطي حالتين خاصتين

الحالة 1 : أين تكون دالة الهدف خطية و الشروط (القيود) غير خطية



الحالة 2 : دالة الهدف غير خطية و القيود خطية



في هاتين الحالتين من الواضح أن البحث عن الحل الأمثل أصعب بكثير من حالة المسألة الخطية. إضافة إلى ذلك فالحل مطلوب كاملا و لذلك فالتعقيد يكون أكبر.

و من سوء الحظ فإنه لا توجد في المسائل اللاخطية طريقة مماثلة لطريقة سمبلكس (هاته الطريقة البسيطة و الفعالة لإيجاد الحلول).

سنرى الآن البرمجة التربيعية وهي الحالة الأكثر شيوعا من بين حالات المسائل اللاخطية.

إن نموذج البرمجة اللاخطية يمكن أن يأخذ الشكل :

$$\max F (x_1 , x_2 , \ldots\ldots , x_n)$$

$$i = 1, 2 , \ldots\ldots , m$$

$$g_i (x_1 , x_2 , \ldots\ldots , x_n) \leq b_i$$

لنعتبر أن دالة الهدف F أو القيود g_i تأخذ على شكل غير خطي .

لنأخذ المثال التالي :

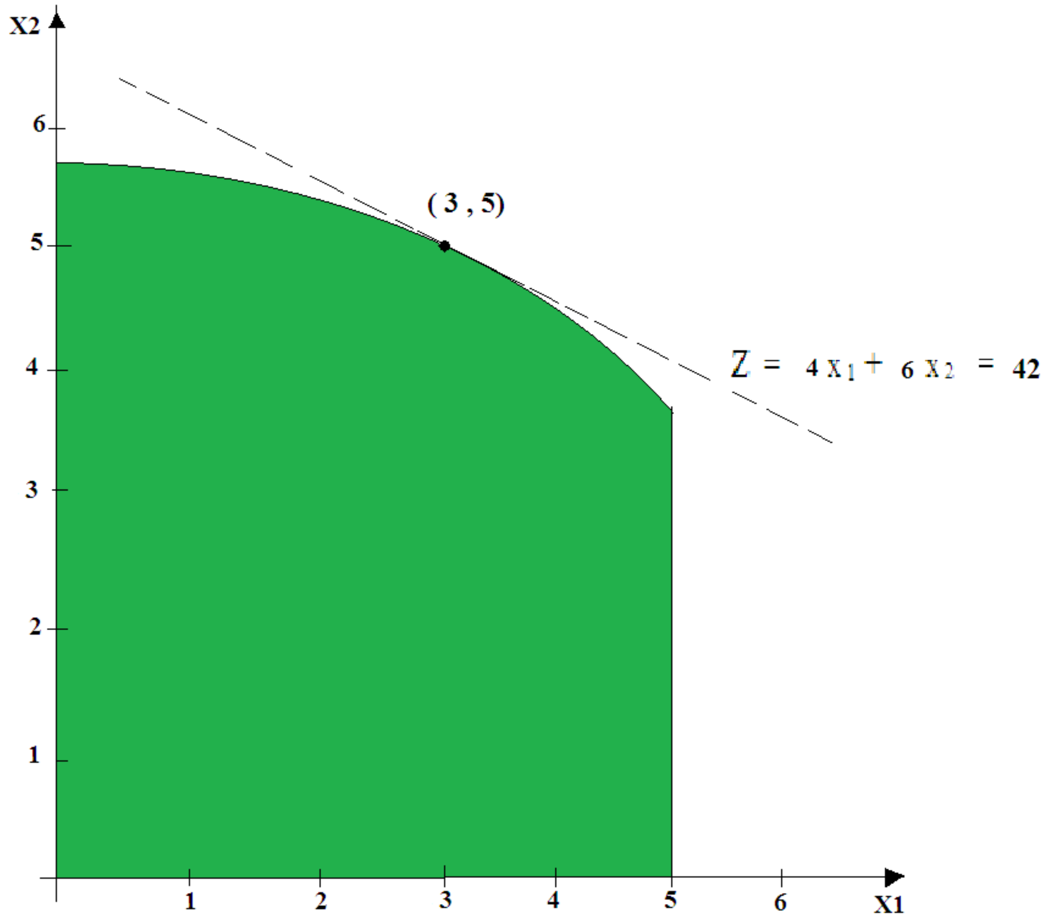
$$\max\ Z = 4\ x_1 + 6\ x_2$$

$$x1 \leq 5$$

$$10\ x_1^2 + 8\ x_2^2 \leq 260$$

$$x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0$$

فإذا حاولنا تمثيلها بيانيا نتحصل على الشكل :



من الشكل نلاحظ أن الهدف خطي أما القيود فهي محدبة مما يعطينا عدة نقاط حلول مقعرة

نسبة إلى دالة الهدف . هاته الحلول تقع على أطراف منطقة الحلول لكنها لا تتقاطع في نقطة واحدة كما رأينا سابقا مع البرمجة الخطية .

لنأخذ المثال التالي :

$$\max Z = 213\, x_1 - 28\, x_1^2 + 98\, x_2 - 25\, x_2^2$$

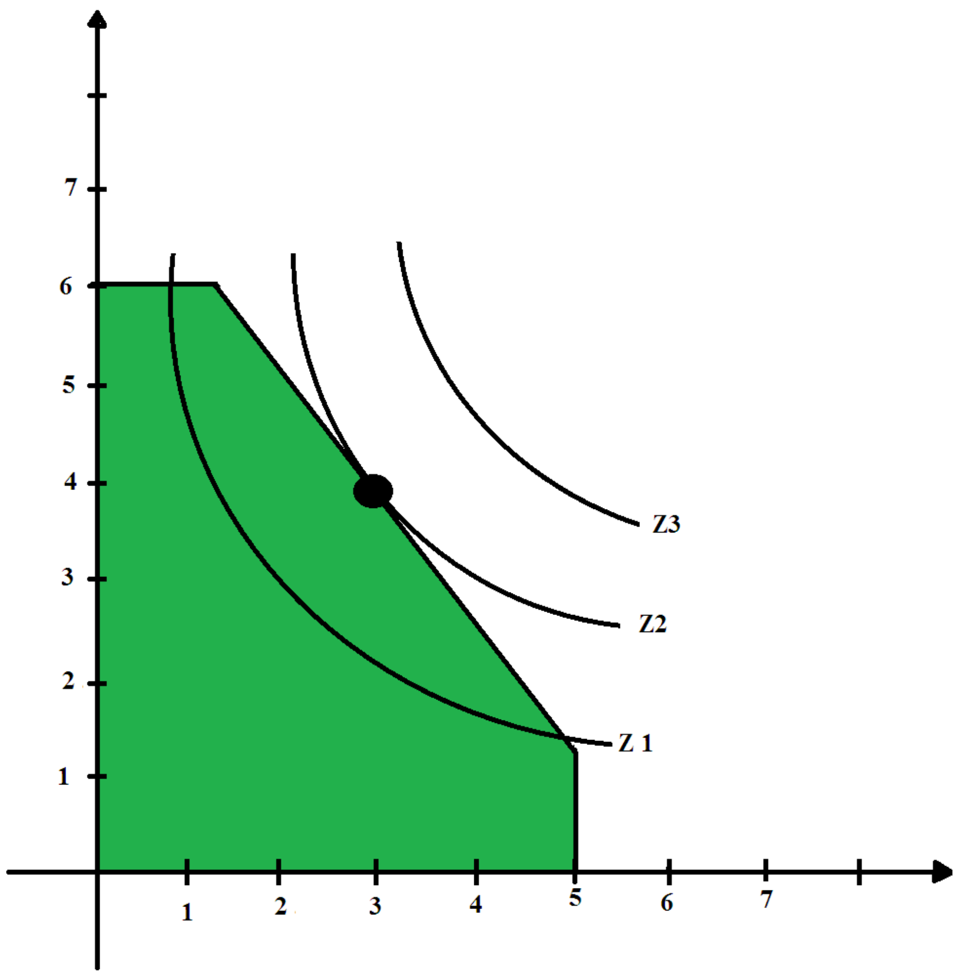
$$3x_1 \leq 15$$

$$4\, x_2 \leq 24$$

$$5\, x_1 + 4\, x_2 \leq 30$$

$$x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0$$

في هاته الحالة الهدف غير خطي و القيود خطية، فإذا أردنا تمثيلها بيانيا نحصل على الشكل:



في هاته الحالة نجد عكس ما وجدنا سابقا، القيود خطية و دالة الهدف مقعرة نسبة لمنطقة

الحلول .

هنا نقطة التلاقي لا تمثل أبعد نقطة للحل و بالضرورة هي ليست الحل الأمثل .

و هناك بعض الحالات أين تكون دالة الهدف و قيودهما غير خطية .

مشكلة عدم خطية البرامج الرياضية كانت محل إهتمام العديد من الباحثين أين نجد الصيغة العامة لكتابة هاته المشكلة مشتركة فيما بينهم على الشكل :

$$\min f(x)$$

$$g_i(x) \leq b_i$$

أين $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$

تمثل كل من f و g_i دوال لها قيم حقيقية في R^n و تمثل x مجموعة محددة في Z^n .

و قد صنف LINSEN البرمجة اللاخطية إلى 3 أصناف :

- البرمجة العددية اللاخطية غير مقيدة :

في حالة عدم وجود قيود للمسألة أو فقدانها فإن هذا النوع من البرمجة يسمى إما : مسائل أمثلية متعددة الحدود و غير مقيدة أو مسائل الأمثلية التربيعيةالغير مقيدة .

- البرمجة العددية اللاخطية أحادية القيد : وهي برمجة مقيدة بقيد واحد أي أن $n=1$ أو $i = 1$. وهنا إما أن تكون دالة الهدف غير خطية أو القيد، أو كلاهما .
- البرمجة الخطية متعددة القيود :

أين يكون لدينا برنامج مقيد بأكثر من قيد أي أن $i \geq 2$.

لحل هاته المسائل يوجد العديد من الطرق سنتطرق لبعض منها.

2.3 حل المسائل اللاخطية بطريقة مضروب لاغرانج

يمكن الإعتماد على هاته الطريقة لحل المسائل اللاخطية ذات القيود في شكل مساواة، و شكلها العام يكون على النحو :

$$Cx = 0 \quad \text{مع القيد} \quad \min f(x)$$

$$x \in R^n \quad F: R^n \longrightarrow R\ ,\ C: R^n \longrightarrow R^m$$

$$\text{أين}\ m \leq n$$

نقول بأن النقطة x^* من الشكل $C(x^*) = 0$ تسمى نقطة نظامية للقيود إذا كان $J(x^*) = m$

فقيد المساواة $C(x) = 0$ يمثل منطقة في R^n فيكون :

$$S = \{ x \in R^n \mid C(x) = 0 \}$$

إذا كانت النقاط ل : S منتظمة فإن S يكون من البعد (n -m) فالمنحنى C على الفضاء S هي مجموعة نقاط $\{ x(t) \in S\}$ مستمرة محدودة ب $t \in R$.

المنحنى C يمر من نقطة x^* إذا كان هناك t^* من الشكل :

$$x(t^*) = x^*$$

فالشعاع :

$$d(x) / (dt \mid t) = t^*$$

هو ظل المنحنى C عند النقطة x^* فتصبح :

$$[\, C(x^*)\ dx / (dt \mid t) = t^* \,] = 0$$

فضاء الظل :

$$T(x^*)$$

هي نقطة x^* في الفضاء S والتي تعرف كمجموع :

$$T(x^*) = \{ y \in R^n \mid C(x^*)\ y = 0 \}$$

لما يكون x^* منتظم فإن$T(x^*)$ يكون من البعد (n -m) فإذا كان المنحنى C الواقع في

الفضاء S والذي يمر بالنقطة x^* فيكون ظل هذا المنحنى :

$$(dx / dt \mid t = t^*) = T(x^*)$$

أما في الفضاء العادي المسمى $N(x^*)$ فالنقطة x^* الواقعة على الفضاء S هي معرفة على أساس مجموع :

$$N(x^*) = \{y \in R^n \mid y = C^T(x^*)Z \text{ مع } Z \in R^m\}$$

لما يكون x^* منتظم فإن $N(x^*)$ هو من البعد m .

مثال تطبيقي :

لتكن المسألة اللاخطية التالية:

$$\min F(x) = x_1^2 + x_2^2$$

مع القيد:

$$C(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 2 = 0$$

بتطبيق مضروب لاغرانج نحولها إلى مسألة من الدرجة الأولى فتصبح على الشكل :

$$x_1^2 + x_2^2 \Leftrightarrow x_1^* + \lambda^* x_1^* = 0$$

إما : $x_1^*=0$ أو $\lambda^*=-1$

$$x_1^2 + 3x_2^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_2^* + 3\lambda^* x^* = 0$$

إما : $\lambda^*=-1/3$ أو $x_2^* = 0$

$$(x_1^*)^2 + 3(x_2^*)^2 - 2 = 0$$

لما $x_1^* = 0$ ، $x2^* = \sqrt{2/3}$ ، $\lambda^*=-1/3$

لما $x_2^* = 0$ ، $x_1^* = \sqrt{2}$ ، $\lambda^*=-1$

مثال 2 :

أوجد الحل للمشكلة التالية :

$$Z = x_1 + 3x_1 . X_2$$

$$x_1 + 2x_2 - 8 = 0$$

فتصبح :

$$L(X_1, X_2, \lambda) = x_1 + 3x_1 . X_2 + \lambda(8 - x_1 - 2x_2)$$

$$\partial L / \partial X_1 = 3X_2 + 1 - \lambda = 0$$

$$\partial L / \partial X_2 = 3X_1 - 2\lambda = 0$$

$$\partial L / \partial \lambda = 8 - x_1 - 2x_2$$

ومنه: $3X_2 + 1 - \lambda = 0$

$$3X_2 + 1 = \lambda$$

بالتعويض في 2 نجد:

$$3X_1 - 6X_2 - 2 = 0$$

$$3X_1 = 6X_2 + 2$$

$$X_1 = 2X_2 + 2/3$$

بالتعويض في 3 نجد:

$$8 - 2x_2 - 2/3 - 2x_2 = 0$$

$$8 - 2/3 = 2x_2 + 2x_2$$

$$11/6 = x_2$$

$$13/3 = x_1$$

3.3 طريقة دوال الجزاء

هاته الطريقة تعتمد على تحويل البرنامج من شكله الطبيعي إلى برنامج بدون قيود [2].

مثال : ليكن لدينا المسألة ذات قيد واحد و نريد تدنيتها

$$\min f(x)$$

$$Cx \leq 0 \quad \text{قيد}$$

هاته المسألة تحول إلى مسأة من دون قيد و تكتب على الشكل :

$$\min g(x,\alpha_k) = f(x)+\alpha_k \sum_{i=1}^{P} P(c_i(x))$$

أين يكون : متواصل $P(c_i(x))$

$$P(c(x)) \geq 0 \ \forall x$$

$$\alpha k > 0$$

و طريقة دوال الجزاء تنقسم إلى قسمين :

1.3.3 طريقة دوال الجزاء الداخلية

إذا كان لدينا القيد $Cx \geq 0$ هو مجموع مقبول فإن دوال الجزاء تكون قريبة من الصفر و بعيدة عن القيود و تتجه إلى مالانهاية ... و عند حدود القيود.

مثال :

$$P(x)= -1/c(x)$$

$$P(x)= 1/c(x^2)$$

$$P(x)= \ln[1- (1/cx)]$$

و كان ينتمي إلى الفضاء المقبولة **.**

$$f(x)= 2x$$

$$C(x)=1-x\leq 0$$

---

[2] Robert Faure et Bernard; Précis de recherche opérationnelle **P 210-215**

$$P(x) = -1/cx = 1/x-1$$

ومنه:

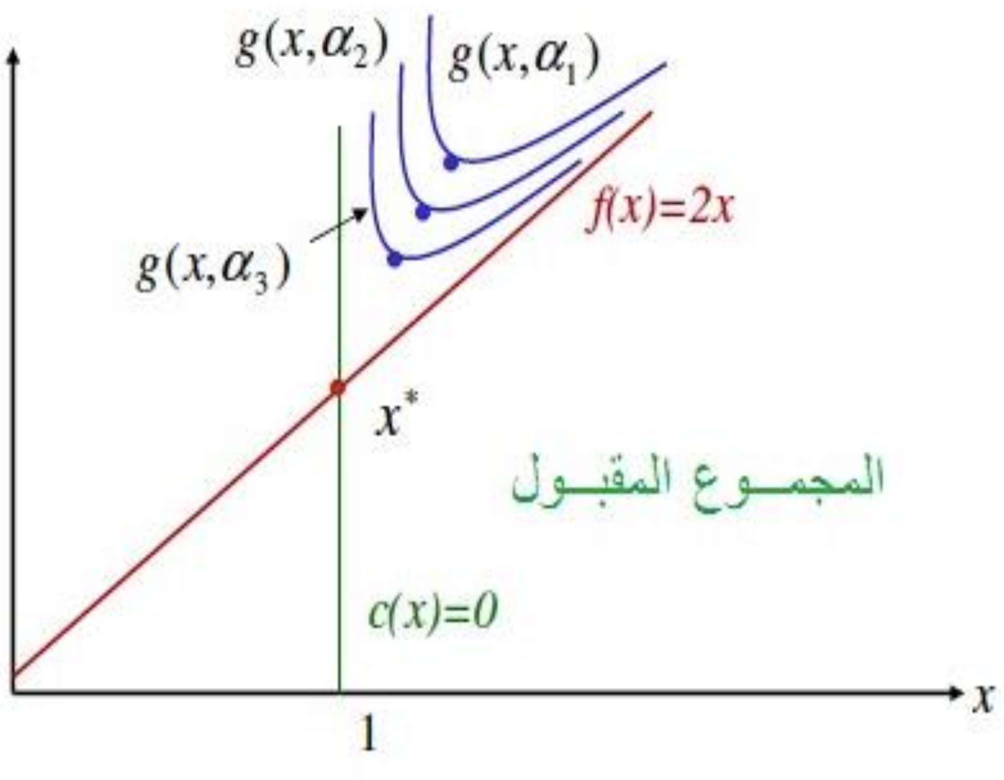
$$g(x+\alpha_k) = 2x + \alpha_k (1/x-1)$$

حيث:

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$$

$$\alpha_{k+1} = C_\alpha \alpha_k \quad 0 < C_\alpha < 1$$

ويكون الشكل البياني :



***المصدر** Robert Faure et Bernard; Précis de recherche opérationnelle **ص213**

2.3.3 طريقة دوال الجزاء الخارجية

ليكن لدينا $Cx \leq 0$ مجموع مقبول، دوال الجزاء تكون معدومة في الفضاء أو منطقة القبول و تكون موجبة في حالة عدم تلبية القيود .

مثال : $P(C(x)) = C(x)^q$ إذا/1 $C(x) > 0$

$P(C(x)) = 0$ إذا $C(x) \leq 0$

$$= \max\,(C(x),0)^q$$

$$P(C(x))= a^{C(x)}-1 \quad \text{إذا} \quad C(x) > 0 \qquad /2$$

$$P(C(x))= 0 \quad \text{إذا} \quad C(x) \le 0$$

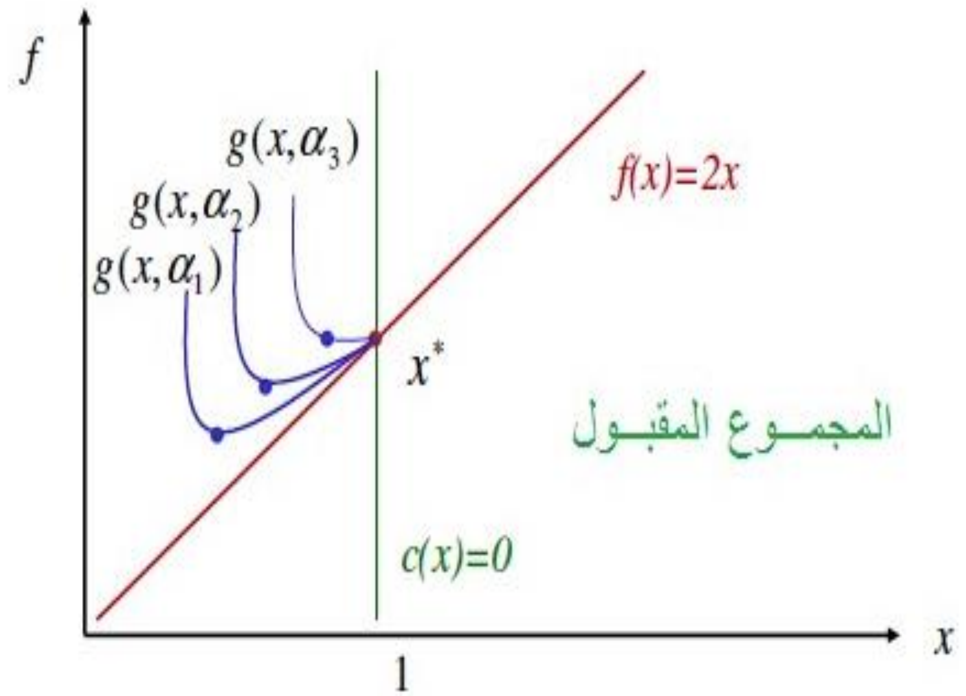
ومنه:

$$f(x) = 2\,x\,0 \quad \text{و} \quad C(x)= 1- x \le 0$$

$$P(x) = \max\,(1-x,\, 0)^2$$

$$g(x, \alpha_k)= 2x +\alpha_k \max\,(1-x,\, 0)^2$$

ويكون الشكل البياني :



المصدر Robert Faure et Bernard; Précis de recherche opérationnelle **ص221**

كان هذا حل المسائل اللاخطية عن طريق دوال الجزاء .

تناولنا في هذا الفصل موضوع الأمثلية للمسائل اللاخطية. هاته الأخيرة يمكن أن تكون ذات دالة غير خطية و قيود خطية أو العكس أو حتى كلاهما معا. أين رأينا الطرق الأكثر شيوعا في معالجة المشاكل اللاخطية (لاغرنج و الجزاء).

بعد معالجة هذا النوع من المسائل يكون بمقتدرنا معالجة مسائل البرمجة الرياضية بشقيها.

2.3 البرمجة الديناميكية

البرمجة الديناميكية هي فرع من فروع البرمجة الرياضية، تهدف إلى الوصول إلى الأمثلية، تختص بحل المسائل ذات حلول متشعبة و الحل الأمثل يتم عبر المرور بعدة نقاط من الحلول تكون مترابطة فيما بينها

في المجال الإقتصادي عرض مصطلح البرمجة الديناميكية لأول مرة من طرف الفرنسي Pierre Massé خلال الفترة مابين الحربين العالميتين وبالضبط سنة 1935 حينما طبق الإحتمالات وفقا لتسلسل معين على إحصائيات المخزونات في كتاب Hydrodynamique fluviale, régime variables. بعد ذلك قام عالم الرياضيات الأمريكي Richard Bellman بشرح و عرض هذه الطريقة بشكل واضح سنة 1952 في كتاب The theory of dynamic programing و عدله في كتاب آخر سنة 1963 Dynamic programing .

إن البرمجة الديناميكية هي فرع من فروع البرمجة الرياضية، و هي أسلوب رياضي قائم على الأمثليات، إذ يوضع هذا البرنامج لرفع قدرة البحث عن الحل الأمثل للعديد من المسائل الكبيرة الحجم ذات حلول متشبعة عن طريق تجزئتها إلى مسائل جزئية أصغر حجما وبالتالي أقل صعوبة. و بعد ذلك يتم إيجاد حل لكل من هاته الأجزاء للمسألة الأصلية. والحل الأمثل لهاته الأخيرة يتم إيجاده عند حساب الحلول الجزئية.

دالة الهدف هنا تكون أعظمية (أكبر عائد) أو أصغرية (أقصر طريق).

و في حالة المسائل الممتدة لفترة زمنية طويلة فإن البرمجة الديناميكية تقوم بتجزئة السلسلة لأجزاء ثابتة و كل منها يعتبر مرحلة من مراحل الحل.

و عند تحقق بعض الشروط فإن البرمجة الديناميكية تأخذ شكل قاعدة تحقيق الحل المتفائل و خاصة في مجال الشبكات. و فيها نعتبر أن كل إستراتيجية جزئية من الإستراتيجية المتفائلة هي بدورها متفائلة. و حسب طريقة البرمجة الديناميكية فإن الوصول إلى الإستراتيجية المتفائلة يحتم علينا تقسيم الشبكة إلى مراحل متتالية يتم فيها تحديد الإستراتيجيات الجزئية و جمعها حتى الحصول في النهاية على إستراتيجية متفائلة.

لحل مسائل البرمجة الديناميكية عدة طرق، سنتطرق لأهمها و هما طريقتين :

- الطريقة الشبكية : هاته الطريقة مبنية على وضع مخطط شبكي نمثل فيه المسألة الأصلية و المسائل الجزئية التابعة لها. بعدها يتم حل المسائل الجزئية كل منها على

حدى ثم صياغة الحلول في تسلسل حتى الوصول إلى الحل النهائي الأمثل.

- الطريقة الجدولية

في كثير من الأحيان و أثناء محاولتنا لتجزئة المسألة لإيجاد الحلول نلاحظ أن التحليل و التجزئي يقودنا أو يعطينا مسائل جزئية متماثلة (نفسها)، و إذا حاولنا حل هاته المسائل الجزئية كل منها على حدى من غير الأخذ بعين الإعتبار هذا التماثل نتحصل على لوغاريتم أو برنامج غير مجدي أو نافع.

على العكس إذا أخذنا في الحسبان أثناء الحل هذا التماثل و حله مرة واحدة يعني أن نخزن نتائج البرنامج أو المسائل الجزئية المتماثلة مرة واحدة فإننا نجتنب الخطأ و نتوصل إلى لوغاريتم جدي.

إذا فالفكرة الرئيسية هي إستبعاد حساب مرتين نفس الشيء. و من المفروض أن نستعمل جدول نتائج أو شبكة نتائج للنتائج المحسوبة سابقا مملوءة ترتيبيا خلال حسابنا لحلول المسائل الجزئية.

ملاحظة : هذه الطريقة هي طريقة تصاعدية أين نبدأ بالمسألة الجزئية الصغرى ثم نصعد حتى الوصول لأكبر مسآلة جزئية أو أصعب مسألة جزئية.

طريقة البرمجة الديناميكية تستعمل عادة لحل مسائل الأمثلية التي تراعي خصوصية الأمثلية " في حل مسألة أمثلية (خيارات، قرارت) يجب أن تكون المسائل الجزئية ملبية لشرط الأمثلية هي الأخرى ".

و ليكن المثال التالي :

نفترض أن طالبا ما يسكن بعيدا عن الجامعة و في كل صباح و هو يقصد الجامعة لديه عدة شوارع يمكنه المرور عبرها للوصول إلى النقطة النهائية (القسم أو المدرج)، فإذا كان يبحث على أقصر طريق ممكن للوصول إلى هدفه فيجب عليه إتخاذ عدة قرارات للشوارع التي يجب أن يختارها.

ليلتحق الطالب بالجامعة يمكنه المرور بعدة طرق على النحو التالي :

x_0 : عدد نقاط الإنطلاق (منزل الطالب) في حالتنا هاته نقطة واحدة A.

x_1 : تمثل عدد الشوارع التي تربط بين منزله و الطرق الرئيسية، في حالتنا هاته 3 شوارع نسميها B1 ، B2 ،B3.

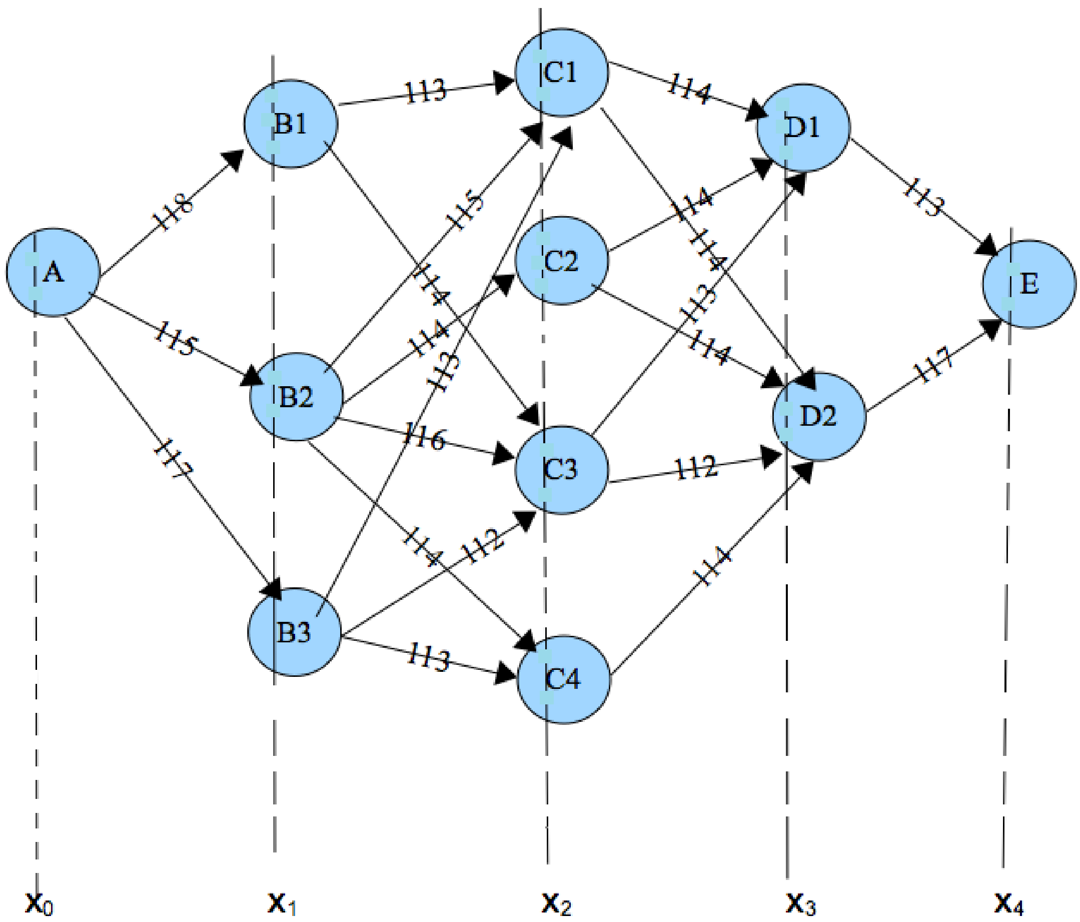
x_2 : تمثل الطرق الرئيسية التي تؤدي إلى بابي الجامعة في هذه الحالة 4 طرق نسميه ;C1

C2،C3; C4

x_3 : تمثل عدد أبواب الجامعة و هو 2، و نسميها D1; D2.

x_4 : هو المدرج الذي يمتحن فيه الطالب و نسميه E.

فيكون رسم الشبكة البيانية على الشكل :



الأرقام الموجودة بين الأسهم تمثل عدد الأمتار التي تفصل بين نقطة إنطلاق السهم و نقطة وصوله، أي الروابط الموجودة بين المسائل الجزئية. (فمن النقطة A إلى النقطة B1 هي مسألة جزئية وقس على ذلك).

و[3] بفرض أن $V^*_k\ (x_k)$

هي القيمة المثلى للطرق الواصلة بين المنطلق A و كل واحدة من النقاط x_k من الصف X_k،

3 Jean Francois Roseau, exercices et problémes résolus de recherche opérationnelle, Ed DUNOD 2005.

و أن $V_{k+1}(x_k, x_{k+1})$

قيمة القوس بين النقطتين (x_k, x_{k+1}) فمن أجل جميع النقاط :

$x_{k+1} \in X_{K+1}$

يكون لدينا :

$$V^*_{k+1}(x_{k+1}) = \text{opt}_{xk \in Xk}[V_{k+1}(x_k, x_{k+1}) + V^*_k(x_k)]$$

إذن opt يمكن أن تكون Max أو Min حسب طبيعة المسألة .

و بالعودة إلى الشبكة نجد في المرحلة الأولى أن العمليات الحسابية الضرورية بسيطة على الشكل:

$$V^*_1(B1) = 118 \text{ , } V^*_1(B2) = 115 \text{ , } V^*_1(B3) = 117$$

بعدها ننتقل إلى المرحلة الثانية :

$$x_2 \in [\text{ C1,C2; C3,C4 }]$$

في هذه المرحلة إن القيم المثلى هي $V^*_2(x_2)$ فيصبح لدينا :

بالنسبة للنقطة العبور C1 :

$$V^*_2(C1) = \text{opt}_{x1 \in X1}[V_2(x_1, C1) + V^*_1(x_1)]$$

$$= \text{opt}_{B1.B2.B3}[V_2(B1; C1) + V^*_1(B1), V_2(B2; C1) + V^*_1(B2), V_2(B3; C1) + V^*_1(B3)]$$

$$= \text{opt}[113 + 118;\ 115 + 115;\ 113 + 117]$$

$$= \text{opt}[231; 230; 230]$$

$$= 230$$

أقصر طريق جزئي مثالي يؤدي من المنزل إلى الشارع الرئيسي C1 في هاته الحالة يتمثل في الإستراتيجية الجزئية الصغرى A, B2, C1 أو A,B3, C1 و أن قيمة هذه الإستراتيجية هي 230 متر.

أما بالنسبة للنقطة F يكون : $V^*_2(F) = \text{opt}$

بالنسبة للنقطة العبور C2 :

$$V^*_2(C2) = \text{opt}_{x1 \in X1}[V_2(x_1, C2) + V^*_1(x_1)]$$

$$= \text{opt}_{B1.B2.B3}[V_2(B2; C2) + V^*_1(B2)]$$

$$= \text{opt}[114 + 115] = 229$$

بالنسبة للنقطة العبور C3 :

$V^*_2(C3) = opt_{x1 \in X1} [V_2(x_1 , C3) + V^*_1(x_1)]$

$= opt_{B1.B2.B3} [V_2(B1 ; C3) + V^*_1(B1) , V_2(B2 ; C3) + V^*_1(B2) , V_2(B3; C3) + V^*_1(B3)]$

$= opt [114 + 118; 114 + 115; 112 + 117]$

$= opt [232; 229; 229]$

$= 229$

أقصر طريق جزئي مثالي يؤدي من المنزل إلى الشارع الرئيسي C3 في هاته الحالة يتمثل في الإستراتيجية الجزئية الصغرى A, B2, C3 أو A,B3, C3 و أن قيمة هذه الإستراتيجية هي 229 متر.

بالنسبة للنقطة العبور C4 :

$V^*_2(C4) = opt_{x1 \in X1} [V_2(x_1 , C4) + V^*_1(x_1)]$

$= opt_{B1.B2.B3} [, V_2(B2 ; C4) + V^*_1(B2) , V_2(B3; C4) + V^*_1(B3)]$

$= opt [112 + 115; 114 + 117]$

$= opt [227; 231]$

$= 227$

أقصر طريق جزئي مثالي يؤدي من المنزل إلى الشارع الرئيسي C4 في هاته الحالة يتمثل في الإستراتيجية الجزئية الصغرى A, B2, C4 و أن قيمة هذه الإستراتيجية هي 227 متر.

بالنسبة للنقطة العبور D1 :

$V^*_3(D1) = opt_{x2 \in X2} [V_3(x_2 , D1) + V^*_2(x_2)]$

$= opt_{C1.C2.C3} , V_3(C1,D1) + V_2^*(C1); V_3(C2 ;D1) + V^*_2(C2); V_3(C3 ;D1) + V^*_2(C3)]$

$= opt [114+ 230; 114 + 229; 113+229]$

$= opt\ [\ 344; 343; 342\ ]$

$= 342$

أقصر طريق جزئي مثالي يؤدي من المنزل إلى الباب الاول للجامعة D1 في هاته الحالة يتمثل في الإستراتيجية الجزئية الصغرى A, B3,C3، D1 , و أن قيمة هذه الإستراتيجية هي 342 متر.

بالنسبة للنقطة العبور D2 :

$V^*_3(D2) = opt_{\,x2 \in X2} [\ V_3(\ x_2\ , D2) + V^*_2(x_2)]$

$= opt_{\ C1.C2.C3}\ ,\ V_3(\ C1,D2) + V_2^*(C1);\ V_3(\ C2\ ;D2) + V^*_2(C2);\ V_3(\ C3\ ;D1) + V^*_2(C3);\ V_3(\ C4\ ;D2) + V^*_2(C4)]$

$= opt\ [\ 114+ 230;\ 114 + 229;\ 112+229;\ 114+229]$

$= opt\ [\ 344; 343; 341; 343\ ]$

$= 341$

أقصر طريق جزئي مثالي يؤدي من المنزل إلى الباب الثاني للجامعة D2 في هاته الحالة يتمثل في الإستراتيجية الجزئية الصغرى A, B3,C3، D2 , و أن قيمة هذه الإستراتيجية هي 341 متر.

في المرحلة الأخيرة من الحل وبعد أن تم إيجاد الحلول الجزئية السابقة سيتم حساب الطريق الأمثل للوصول إلى المدرج أي النقطةِ E

$= opt_{\ D1.D2}\ ,\ [\ V_4(\ D1,E) + V_3^*(D1);\ V_4(\ D2\ ;E) + V^*_3(D2)]$

$= opt\ \ [\ 113 + 342\ ;\ 117 + 341]$

$= opt\ \ [\ 455;\ \ 458] = \ 455$

الحل النهائي الأمثل للطالب هو في إتخاذه المسلك الأمثل وهو A,B3, C3, D1,E هذا الحل تم على أساس الحلول الجزئية وهو مايدل على نجاعة هذه الطريقة في حل المشاكل المركبة عن طريق تقسيمها إلى مشاكل صغيرة وبعدها يتم حلها من الاصغر تعقيد إلى الأكثر صعوبة مع حل المشاكل الجزئية المتماثلة مرة واحدة.

الخاتمه العامة

يجب أن تأخذ بعين الاعتبار أن الظروف تتغير بسرعة و أن التاريخ لا يعيد نفسه دائما بالضرورة، فكان لا بد من تطوير تقنيات تراعي عامل الزمن فتم ادماج التقنيات الرياضية الكمية في علم الاقتصاد. فأصبحت عملية اتخاذ القرار أكثر دقة حيث تم تسجيل نقلة نوعية من اتخاذ قرارات عشوائية ناتجة عن التجربة و الخطة الى قرارات استراتيجية أكثر قرب من الواقع و ذات فعالية كبيرة.

هاته التقنيات أثبتت فاعليتها فبالاضافة الى دقتها فهي توفر وقت كبير مقارنة بالطرق التقليدية. باتباع هاته التقنيات يتم الفصل بين المتغيرات المؤثرة على المشكلة و اثبات العلاقة القوية التي تربطهما، و فصل الظاهرة عن المتغيرات ذات التأثير المحدود و منه اتخاذ القرار الأمثل.

للبرمجة الرياضية كما رأينا طرق عديدة للوصول الى الحل الأمثل. هاته الطرق تنطبق حسب نوعية المشكلة و المتغيرات المؤثرة فيها (التي ندعوها قيود) ،و فرقنا بين الفرعين الأساسيين للبرمجة الرياضية و هما: الخطية و اللاخطية (غير خطية) فلكل منهما عدة طرق للحل.

تمارين محلولة

تمرين رقم 1

تقوم الشركة الوطنية للصناعة الميكانيكية بإنتاج نوعين من الرافعات : رافعات ثابتة ، ورافعات متحركة، وللقيام بالعملية الإنتاجية ؛ لابد من استخدام آلة، وعدد معين من ساعات العمل، والوقت المتوفر للآلة هو 24 ساعة، بينما الوقت المتوفر من عنصر العمل هو 16ساعة ، تحتاج كل وحدة منتجة من الرافعات الثابتة إلى 6 ساعات من الآلة، و 7ساعات من العمل، بينما تحتاج كل وحدة من الرافعات المتحركة إلى 8 ساعات من الآلة و 4 ساعات من العمل .ويبلغ سعر كل وحدة مباعة من الرافعات الثابتة 16مليون دينار، ومن الرافعات المتحركة21 مليون دينار، علما بأن الشركة تستطيع أن تبيع عشر وحدات فقط من المنتج الأول، وثمانية وحدات من المنتج الثاني. وفي هذه الحالة يحتاج رئيس الشركة إلى أن يحدد كمية الإنتاج من الرافعتين التي تدر على الشركة أكبر عائد.

- ضع الشكل الأساسي والشكل المعياري لهذه المسألة ؟ حولها إلى مسألة ثنائية وضع شكلها العام؟

الجواب

الشكل الأساسي

$$\text{Max } z = 160*10^6\ x1 + 168*10^6\ x2$$

$$6\ x_1 + 8\ x_2 \leq 24$$

$$7\ x_1 + 4\ x_2 \leq 16$$

$$x_1 \geq 0 \quad ; \quad x_2 \geq 0$$

الشكل المعياري

$$\text{Max } z = 160*10^6\ x_1 + 168*10^6\ x_2 + 0t_1 + 0t_2$$

$$6\ x_1 + 8\ x_2 + 1t_1 + 0t_2 = 24$$

$$7\ x_1 + 4\ x_2 + 0t_1 + t_2 = 16$$

$$x_1 \geq 0 \quad ; \quad x2 \geq 0\ ;\ t_1 \geq 0\ ;\ t_2 \geq 0$$

تحويلها إلى مسألة ثنائية

$$\text{Min } w = 24\ Y_1 + 16\ Y_2$$

$$6\ Y_1 + 7\ Y_2 \geq 160*10^6$$

$$8\ Y_1 + 4\ Y_2 \geq 168*10^6$$

$$Y_1 \geq 0 \quad ; \quad Y_2 \geq 0$$

الشكل المعياري

$$Min\ w = 24\,Y_1 + 16\,Y_2 - 0S_1 - 0S_2$$

$$6\,Y_1 + 7\,Y_2 - S_1 + 0S_2 = 160*10^6$$

$$8\,Y_1 + 4\,Y_2 - 0S_1 + S_2 = 168*10^6$$

$$Y_1 \geq 0\ ;\ Y_2 \geq 0\ ;\ S_1 \geq 0\ ;\ S_2 \geq 0$$

تمرين رقم 2

$$Min : W = 5Y_1 + 4Y_2$$

$$2Y_1 + 4\,Y_2 \geq 8$$

$$5Y_1 + 2\,Y_2 \geq 10$$

$$Y_1 \geq 0;\ \ Y_2 \geq 0$$

المطلوب:

حل البرنامج السابق بطريقة M.

- **الحل**

الشكل القياسي:

$$Min : W = 5Y_1 + 4Y_2 + 0S_1 + 0S_2 + Ma_1 + Ma_2$$

$$2Y_1 + 4Y_2 - S_1 + 0S_2 + a_1 + 0a_2 = 8$$

$$5Y_1 + 2Y_2 + 0S_1 - S_2 + 0a_1 + a_2 = 10$$

$$Y_1 \geq 0;\ \ Y_2 \geq 0$$

HB B	Y_1	Y_2	S_1	S_2	e_1	e_2	C	
e_1	2	4	-1	0	1	0	8	4
e_2	5	2	0	-1	0	1	10	2
W_j	7M	6M	-M	-M	M	M	18M	
Δ	5-7M	4-6M	M	M	0	0		

HB B	Y_1	Y_2	S_1	S_2	a_1	a_2	C	R
e_1	0	16/5	-1	2/5	1	-2/5	4	20/16
Y_1	1	2/5	0	-1/5	0	1/5	2	5

W_j	5	2+16M/5	-M	-1+2M/5	M	1-2M/5	10+4M	
Δ	0	2-16M/5	M	1-2M/5	0	-1+7M/5		

HB B	Y_1	Y_2	S_1	S_2	e_1	e_2	C
Y_2	0	1	-5/16	1/8	5/16	-1/8	5/4
Y_1	1	0	1/8	-1/4	-1/8	¼	3/2
W_j	5	4	-10/16	-3/4	10/16	¾	25/2
Δ	0	0	10/16	3/4	M-10/16	M-3/4	

و عليه فان الجدول الاخير يمثل جدول الحل الأمثل و تتمثل قيم المتغيرات القاعدية فيما يلي:

$Y_1=3/2$، $Y_2=5/4$،

$W= 25/2$

<u>تمرين رقم 3</u> أوجد النماذج الثنائية للنماذج الأولية التالية :

$\text{Min} : W= 24y_1 + 16y_2$ $4y_1 + 8y_2 \leq 100$ $5y_1 + 3y_2 = 50$ $y_2 \geq 30$ y_1:غير محدد الاشارة; $y_2 \leq 0$	$\text{Max} : Z= 3X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 3X_4$ $4X_1 + 5X_2 + 3X_3 + 2X_4 = 60$ $2X_1 + 6X_3 \geq 24$ $7X_1 + 3X_2 + 4X_4 \leq 70$ $X_1 \geq 0$; X_2:غير محدد الاشارة; $X_3 \leq 0$; $X_4 \geq 0$

<u>الحل</u>

النماذج الثنائية

$\text{Max}: Z = 100X_1 + 50X_2 + 30X_3$ $4X_1 + 5X_2 = 24$ $8X_1 + 3X_2 + X_3 \geq 16$ $X_1 \leq 0$; X_2 غير محدد الاشارة; $X_3 \geq 0$	$\text{Min}: W = 60y_1 + 24y_2 + 70y_3$ $4y_1 + 2y_2 + 7y_3 \geq 3$ $5y_1 + 3y_3 = 2$ $3y_1 + 6y_2 \leq 4$ $2y_1 + 4y_3 \geq 3$ $y_2 \leq 0$; $y_3 \geq 0$; غير محدد الاشارة : y_1

<u>تمرين رقم 4</u> الجدول التالي يمثل جدول السمبلكس الاول لبرنامج خطي:

		10	12	0	0	-M	-M	قيم الحل
		X_1	X_2	S_1	S_2	a_1	a_2	C
……	….	2	3	1	0	0	0	80
……	….	1	2	0	0	1	0	30
……	….	0	1	0	-1	0	1	15
Z_j		-M	-3M	0	M	-M	-M	…….
$C_j - Z_j$		10+12M	12+3M	0	-M	0	0	

<u>المطلوب</u>:

- أكمل المعطيات الناقصة في الجدول الأول.
- اوجد البرنامج الخطي على أساس معطيات الجدول الأول.

1. اكمال المعطيات الناقصة في الجدول

HB B	X_1	X_2	S_1	S_2	e_1	e_2	قيم الحل C
S_1	2	3	1	0	0	0	80
e_1	1	2	0	0	1	0	30
e_2	0	1	0	-1	0	1	15
	-M	-3M	0	M	-M	-M	-45M
	10+M	12+3M	0	-M	0	0	

2. البرنامج الخطي الخاص بالجدول الاول

$$Max : Z= 10X_1 + 12X_2$$
$$2X_1 + 3X_2 \leq 80$$
$$X_1 + 2X_2 = 30$$
$$X_2 \geq 15$$
$$X_{1,} X_2 \geq 0$$

تمرين رقم 5

اذا علمت ان كل X_1 و X_2 غير سالبة، أوجد النموذج الثنائي للنموذج الخطي التالي :

$$Max : Z= 10X_1 + 12X_2$$
$$2X_1 + 3X_2 \leq 80$$
$$X_1 + 2X_2 = 30$$
$$X_2 \geq 15$$
$$X_{1,} X_2 \geq 0$$

النموذج المرافق للنموذج السابق:

$$Min : W= 80Y_1 + 30Y_2 + 15Y_3$$
$$2Y_1 + Y_2 \geq 10$$
$$3Y_1 + 2Y_2 + Y_3 \geq 12$$

$Y_1 \geq 0;\ Y_2 :$ غ م إ $;\ Y_3 \leq 0$

<u>تمرين رقم 6</u>

تقوم إحدى شركات السجاد بإنتاج نوعين من السجاد هما A.B و يمر كل نوع من السجاد بثلاث مراحل هي :

1 . مرحلة تقطيع أطوال السجاد بعد إنتاجها في قسم آخر من الشركة.

2. مرحلة طي الأطوال على شكل لفات .

3.مرحلة التغليف بمواد معينة لغرض بيعها في الأسواق .

والجدول التالي يوضح البيانات الخاصة بالمسألة:

مراحل الانتاج		التقطيع	الطي	التغليف
نوع السجاد	A	8	4	1
	B	6	4	2
الوقت المتاح (دقيقة)		2200	1800	400

تمثل البيانات في الجدول أعلاه التفصيلات الفنية للمنتجين.A، B فمثلا لإنتاج وحدة واحدة من المنتج A نحتاج إلى 8 دقائق لإجراء عملية التقطيع 4 دقائق لإجراء عملية الطي، دقيقة واحدة لإجراء عملية التغليف. أما الوقت المتاح في عمليات التقطيع هو 2200 دقيقة وفي عمليات الطي 1800 دقيقة وفي عمليات التغليف 400 دقيقة إذا علمت أن الربح المتوقع عند بيع وحدة واحدة من النوع A يساوي 12 دينار ومن النوع B يساوي 8 دنانير .

المطلوب: كتابة البرنامج الخطي الذي يعظم الارباح التي تحصل عليها الشركة.

تمرين رقم 7

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$Min : W= 12Y_1 + 6Y_2 + 10Y_3$$

$$1Y_1 + 2Y_2 + 1Y_3 \geq 3$$

$$Y_1 + 3Y_2 \geq 5$$

$$Y_1 \leq 0;\ Y_2 \geq 0;\ Y_3 \geq 0$$

المطلوب:

- حول البرنامج الخطي الى شكله الثنائي؛
- حل البرنامج الثنائي بطريقة السمبلكس؛
- استخرج حلول البرنامج الأصلي من جدول السمبلكس للبرنامج الثنائي.

1. النموذج المرافق

$$Min : W= 15Y_1 + 8Y_2 + 4Y_3$$

$$5Y_1 + 2Y_2 + Y_3 \geq 10$$

$$-3Y_1 - 4Y_2 - Y_3 \leq -20$$

$$Y_1 \geq 0;\ Y_2 \geq 0;\ Y_3 \geq 0$$

2. حل النموذج المرافق بطريقة السمبلكس

الشكل القياسي:

HB / B	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	e_1	e_2	C	R
e_1	5	2	1	-1	0	1	0	10	2
e_2	3	4	1	0	-1	0	1	20	6.66
W_j	8M	6M	2M	-M	-M	M	M	30M	
Δ	15-8M	8-6M	4-2M	M	M	0	0		

HB B	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	e_1	e_2	C	R
Y_1	1	2/5	1/5	-1/5	0	1/5	0	2	5
e_2	0	14/5	2/5	3/5	-1	-3/5	1	14	5
W_j	15	$\frac{30+14M}{5}$	$\frac{15+2M}{5}$	$\frac{-15+3M}{5}$	-M	$\frac{15-3M}{5}$	M	30+14M	
Δ	0	$\frac{10-14M}{5}$	$\frac{5-2M}{5}$	$\frac{15-3M}{5}$	M	$\frac{-15+8M}{5}$	0		

HB B	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	e_1	e_2	C	R
Y_1	1	0	1/7	-2/7	1/7	2/7	-1/7	0	
Y_2	0	1	1/7	3/14	-5/14	-3/14	5/14	5	
W_j	15	8	23/7	-36/14	-10/14	36/14	10/14	40	
Δ	0	0	5/7	18/7	5/7	M+18/7	M+5/7		

و عليه فان الجدول الاخير يمثل جدول الحل الأمثل و تتمثل قيم المتغيرات القاعدية فيما يلي:

$Y_1=0$ ، $Y_2=5$ ، $W= 40$

3. حلول النموذج الأصلي: $X_1=18/7$ ، $X_2=-5/7$ ، $Z= 40$

تمرين رقم 8

لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Min} : W= 5Y_1 + 4Y_2$$

$$2Y_1 + 4Y_2 \geq 8$$

$$5Y_1 + 2Y_2 \geq 10$$

$$Y_1 \geq 0; \quad Y_2 \geq 0$$

المطلوب:

- حل البرنامج السابق بالطريقة البيانية؛ حل البرنامج السابق بطريقة السمبلكس

تمرين رقم 9

مؤسسة منجمية تستغل 3 مناجم بإحدى الولايات، اذ تقوم بتصفية المعدن و فصله الى نوعين: معدن خام قليل الجودة و معدن خام عالي الجودة، إذا علمت ان الطاقة الانتاجية اليومية لكل منجم و تكلفته اليومية هي ثابتة لكل من النوعين الاثنين من المعادن و أن الطاقة الانتاجية اليومية و تكلفة الانتاج اليومية لكل منجم معروضة حسب الجدول التالي:

الطاقة الانتاجية / المنجم	معدن خام قليل الجودة (طن / يوم)	معدن خام عالي الجودة (طن / يوم)	التكلفة اليومية للمنجم (دج)
منجم 01	4	4	20 000
منجم 02	4	5	22 000
منجم 03	6	1	18 000

كما أن المؤسسة تعاقدت مع احد العملاء بتسليم 65 طن من النوع الأول و 54 طن من النوع الثاني عند نهاية كل أسبوع.

المطلوب: تحديد البرنامج الخطي الذي يسمح بتحديد كمية المعادن التي يجب ان ينتجها كل منجم من المناجم الثلاث خلال اسبوع واحد من اجل الوفاء بالتزامات المؤسسة بأقل تكلفة ممكنة؛

1. تكلفة انتاج المعادن في كل منجم من المناجم الثلاث في شكل جدول:

	معدن خام قليل الجودة	معدن خام عالي الجودة
منجم 01	(X_1) 5000	(X_4)5000
منجم 02	(X_2)5500	(X_5)4400
منجم 03	(X_3)3000	(X_6)18000

تمرين رقم 10

أوجد النموذج الثنائي للنموذج الأولي التالي:

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 3X_4$$

$$4X_1 + 5X_2 + 3X_3 + 2X_4 \geq 60$$

$$2X_1 + 6X_3 \leq 24$$

$$7X_1 + 3X_2 + 4X_4 = 70$$

$X_3 \leq 0$; $X_4 \geq 0$; غير محدد الاشارة X_2; $X_1 \geq 0$;

تشكيل النموذج الثنائي

$$\text{Min } W = 60Y_1 + 24Y_2 + 70Y_3$$

$$4Y_1 + 2Y_2 + Y_3 \geq 3$$

$$5Y_1 + 3Y_3 = 2$$

$$3Y_1 + 6Y_2 \leq 4$$

$$2Y_1 + 4Y_3 \geq 3$$

$Y_1 \leq 0$; $Y_2 \geq 0$; Y_3 : غير محدد الاشارة

تمرين رقم 11

$$\text{Max} : Z = 10X_1 + 8X_2$$

$$5X_1 + 3X_2 \leq 15$$

$$2X_1 + 4X_2 \leq 8$$

$$X_1 + X_2 \leq 4$$

$$X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0$$

المطلوب:

1. حل النموذج التالي بطريقة السمبلكس؛
2. استخرج النموذج المرافق للنموذج الاصلي السابق؛
3. من جدول الحل الامثل للنموذج الاصلي استخرج مزيج الحل(X_1; X_2) و مقدار الربح Z للنموذج المرافق

1- حل النموذج بطريقة السمبلكس
الشكل القياسي:

$$Max : Z= 10X_1 + 8X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$5X_1 + 3X_2 + S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 15$$

$$2X_1 + 4X_2 + 0S_1 + S_2 + 0S_3 = 8$$

$$1X_1 + 1X_2 + 0S_1 + 0S_2 + S_3 = 4$$

$$Y_1 \geq 0; \quad Y_2 \geq 0$$

HB B	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	C	R
S_1	5	3	1	0	0	15	3
S_2	2	4	0	1	0	8	4
S_3	1	1	0	0	1	4	4
Z_j	0	0	0	0	0	0	
Δ	10	8	0	0	0		

HB B	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	C	R
X_1	1	3/5	1/5	0	0	3	5
S_2	0	14/5	-2/5	1	0	2	10/14
S_3	0	2/5	-1/5	0	1	1	5/2
Z_j	10	6	2	0	0	30	
Δ	0	2	-2	0	0		

X_i	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	C
X_1	1	0	2/7	-3/14	0	18/7
X_2	0	1	-1/7	5/14	0	5/7

S_3	0	0	-1/7	-1/7	1	5/7
Z_j	10	8	12/7	5/7	0	220/7
Δ	0	0	-12/7	-5/7	0	

و عليه فان الجدول الاخير يمثل جدول الحل الأمثل و قيم الحلول هي: X_1=18/7، X_2=5/7، Z= 220/7

2 -النموذج المرافق

$$\text{Min} : W= 15Y_1 + 8Y_2 + 4Y_3$$

$$5\,Y_1 + 2\,Y_2 + 1\,Y_2 \geq 10$$

$$3\,Y_1 + 4\,Y_2 + 1\,Y_2 \geq 8$$

$$Y_1; Y_2; Y_3 \geq 0$$

حلول النموذج المرافق: Y_1=12/7، Y_2=5/7، Y_3=0 , W= 220/7

تمرين رقم 12

شركة السماد الوطنية تعمل على وضع خطط شهرية خاصة بإنتاج نوعين من السماد. الصنف الأول (5-5-10-80) والصنف الثاني (5-10-5-80)، السماد بنوعيه يتركب من 04 مواد، النسب المعبر عنها داخل الأقواس هي نسبة النترات ويعبر عنها الرقم الأول، نسبة الفوسفات ويعبر عنها الرقم الثاني، نسبة البوتاسيوم ويعبر عنها الرقم الثالث، أما النسبة الرابعة فهي مادة إضافية التراب مثلا.

الشركة لا تجد أي صعوبة في تسويق السماد، تبيع كل ما تنتج بسعر 71.5 دج للكيس الواحد من النوع الأول و69 دج للكيس الواحد من النوع الثاني. المواد الأولية المتوفرة في الشهر هي كالتالي: 1100 كيس من النترات بسعر 200 دج للكيس، و1800 كيس من الفوسفات بسعر 80 دج للكيس، 2000 كيس من البوتاسيوم بسعر 160 دج للكيس، أما المادة الرابعة فهي التراب ومتوفرة بشكل كامل ويكلف الكيس 10 دج. إضافة إلى كلفة المزج لهذه المواد والتي تعادل 15 دج للكيس الواحد. الشركة لا تجد أي صعوبة تذكر في الاستخدام والآلات.

المطلوب: ما هو عدد اكياس الاسمدة الواجب على المؤسسة انتاجه لتحقيق أكبر ربح ممكن ؟

1. حساب تكلفة و هامش الربح للكيس الواحد لكل نوع من النوعين A و B من الاسمدة في شكل جدول:

	A	B	الكميات المتوفرة	سعر الوحدة
تكلفة النترات	=200 x0.05 10	10 =200 x0.05	11	200
تكلفة الفوسفات	4 =80 x0.05	8 =80 x0.10	18	80
تكلفة البوتاسيوم	=160 x0.10 16	8 =160 x0.05	20	160
تكلفة التراب	8 =10 x0.80	8 =10 x0.80	متوفرة	10
تكلفة المزج	15	15		
تكلفة الوحدة	53	49		
السعر	61	69		
ربح الوحدة	8	20		

2. كتابة البرنامج الخطي الذي يسمح للمؤسسة من تحقيق اكبر ربح ممكن؛

و عليه فان البرنامج الخطي يكون من الشكل التالي:

$$\text{Max} : Z = 8X_1 + 20X_2$$

$$5X_1 + 5X_2 \leq 1100$$

$$5X_1 + 10X_2 \leq 1800$$

$$10X_1 + 5X_2 \leq 2000$$

$$X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0$$

3. عدد اكياس الاسمدة الواجب على المؤسسة انتاجه لتحقيق أكبر ربح ممكن .

من خلال حل البرنامج الخطي السابق يتبين ما يلي:

- عدد الاكياس من النوع A هو 0 (X1= 0)
- عدد الاكياس من النوع B هو 180 (X2= 180)
- الربح يساوي 3600 (Z= 3600)

تمرين رقم 13

اليك النموذج التالي:

$$Min : W= 2Y_1 + 2Y_2$$

$$8Y_1 + 4Y_2 \geq 120$$

$$6Y_1 + 9Y_2 \geq 150$$

$$Y_1 \geq 0; \quad Y_2 \geq 0$$

المطلوب:

1. حل النموذج التالي بطريقة السمبلكس؛
2. استخرج النموذج المرافق للنموذج الاصلي السابق؛
3. من جدول الحل الامثل للنموذج الاصلي استخرج مزيج الحل $X_1; X_2$ و مقدار الربح Z للنموذج المرافق

حل النموذج بطريقة السمبلكس

الشكل القياسي:

$$Min : W= 2Y_1 + 2Y_2 + 0S_1 + 0S_2 + Ma_1 + Ma_2$$

$$8Y_1 + 4Y_2 - S_1 + 0S_2 + a_1 + 0a_2 = 120$$

$$6Y_1 + 9Y_2 + 0S_1 - S_2 + 0a_1 + a_2 = 150$$

$$Y_1 \geq 0; \quad Y_2 \geq 0$$

HB B	Y_1	Y_2	S_1	S_2	e_1	e_2	C	R
e_1	8	4	-1	0	1	0	120	15
e_2	6	9	0	-1	0	1	150	25
W_j	14M	13M	-M	-M	M	M	270M	
Δ	2-14M	2-13M	M	M	0	0		

HB B	Y_1	Y_2	S_1	S_2	e_1	e_2	C	R
Y_1	1	1/2	-1/8	0	1/8	0	15	30
e_2	0	6	3/4	-1	-3/4	1	60	10
W_j	2	1+6M	-1/4+3M/4	-M	1/4-3M/4	M	60M+30	
Δ	0	1-6M	1/4-3M/4	M	-1/4+7M/4	0		

HB B	Y_1	Y_2	S_1	S_2	e_1	e_2	C	R
Y_1	1	0	-3/16	1/12	3/16	-1/12	10	
Y_2	0	1	1/8	-1/6	-1/8	1/6	10	
W_j	2	2	-1/8	-1/6	1/8	1/6	40	
Δ	0	0	1/8	1/6	M-1/8	M-1/6		

و عليه فان الجدول الاخير يمثل جدول الحل الأمثل و تتمثل قيم المتغيرات القاعدية فيما يلي:

$Y_1=10$ ، $Y_2=10$ ، W= 40

النموذج المرافق

$$\text{Max : } Z= 120X_1 + 150X_2$$

$$8X_1 + 6X_2 \leq 2$$

$$4X_1 + 9X_2 \leq 2$$

$$X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0$$

حلول النموذج المرافق: $X_1=1/8$، $X_2=1/6$، $Z= 40$

تمرين رقم 14

حول البرنامج الخطي التالي من صيغة مختلطة الى صيغة قياسية

$$Max : Z= 3X_1 + 2X_2 + 4X_3$$

$$4X_1 + 5X_2 + 3X_3 \geq 60$$

$$2X_1 + 6X_2 \leq 24$$

$$7X_1 + 3X_2 + 4X_3 = 70$$

$X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0; \quad X_3$: غير محدد الاشارة

تحويل البرنامج الخطي من صيغة مختلطة الى صيغة قياسية:

$$Max : Z= 3X_1 + 2X_2 + 4X_3^{+}-0S_1 + 0S_2 + 0S_3 - Me_1 - Me_2$$

$$4X_1 + 5X_2 + 3X_3^{+}-3X_3^{-} - S_1 + a_1 = 60$$

$$2X_1 + 6X_2 + S_2 = 24$$

$$-2X_1 - 6X_2 + S_3 = 24$$

$$7X_1 + 3X_2 + 4X_3^{+}-4X_3^{-} + e_2 = 70$$

$$X_1 ; X_2 ; X_3^{+} ;X_3^{-} \geq 0$$

تمرين رقم 15

ينتج مصنع لقطع غيار الشاحنات نوعان من قطع الغيار: النوع A والنوع B، من خلال الاعتماد على نوع واحد من المواد الأولية، ويتم معالجة هذه الأخيرة باستخدام ثلاث آلات مختلفة وهي: آلة الصنع، لآلة الثقب وآلة التلميع. والجدول التالي يوضح المعلومات الخاصة بالقدرة الإنتاجية لكل آلة وتكلفتها خلال ساعة واحدة:

الآلات	النوع A	النوع B	تكلفة الساعة الواحدة
آلة التصنيع	25 قطعة /سا	40 قطعة / سا	200
آلة الثقب	28 قطعة / سا	35 قطعة / سا	140
آلة التغليف	35 قطعة / سا	25 قطعة / سا	175

فإذا علمت أن:
تكلفة المادة الأولية للقطعة الواحدة من النوع A هي 20 دج وتباع بـ 50 دج للوحدة.

تكلفة المادة الأولية للقطعة الواحدة من النوع B هي 30 دج و تباع بـ 60 دج للوحدة.

آلة التصنيع ولأسباب تقنية فإنه لا يمكن استخدامها لمدة تقل عن 10 ساعات في اليوم.

آلة التغليف وآلة التلميع لا يمكن استخدامها لمدة تزيد عن 06 ساعات في اليوم.

كل الإنتاج الذي يتم إنتاجه من قطع الغيار في المصنع يتم بيعه كاملا.

المطلوب:

إعداد البرنامج الخطي الذي يسمح بتعظيم الأرباح اليومية للمصنع.

صياغة المسألة في شكل جدول:

	A	B	الكميات المتوفرة	سعر الوحدة
آلة التصنيع	8	5	10	200
آلة الثقب	5	4	6	140
آلة التغليف	5	7	6	175
تكلفة المواد الأولية	20	30		
تكلفة الوحدة	38	46		
السعر	50	60		
ربح الوحدة	12	14		

و عليه فان البرنامج الخطي يكون من الشكل التالي:

$$\text{Max: } Z = 12\, X_1 + 14\, X_2$$

$$1/25\, X_1 + \frac{1}{40}\, X_2 \geq 10$$

$$\frac{1}{28}X_1 + \frac{1}{35}X_2 \leq 6$$

$$\frac{1}{35}X_1 + \frac{1}{25}X_2 \leq 6$$

$$X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0$$

الفهرس

قائمة المراجع

- السعدي رجال، بحوث العمليات ، منشورات جامعة قسنطينة 2005 .

- بقجة جي، صباح الدين وآخرون، بحوث العمليات ، المركز العربي للتعريب والترجمة والتأليف والنشر، دمشق، سوريا 1998.

-جزاع عبد ذياب،" بحوث العمليات" ، الطبعة الثانية، وزارة التعليم العالي والبحث العلمي، جامعة بغداد،العراق1986 .

- حسن ياسين طعمة ومروان محمد النسور و إيمان حنوش ، بحوث العمليات نماذج و تطبيقات

- حسين محمود الجنابي ، الأحدث في بحوث العمليات، دار الحامد للنشر و التوزيع 2010

– خلف مطر الجراد ،البرمجة الديناميكية واستخدامها في توزيع الاستثمارات بين القطاعات الاقتصادية في سورية، مجلة جامعة دمشق للعلوم الاقتصادية والقانونية –المجلد – 22 العدد الأول- 2006.

- خليل حمدان و رشيق رفيق مرعي، مقدمه في بحوث العمليات ، دار وائل للنشر . الطبعة الثانية . 1999.

- زيد تميم البلخي، مقدمه في بحوث العمليات ،جامعة الملك سعود 2007

– صديق نصار ،البرمجة الخطية ، الجامعة الإسلامية ، غزة 2008

-عدنان ماجد عبد الرحمن بري ، طرق الحسابات في بحوث العمليات ، جامعة الملك سعود 2010

- فتحي خليل حمدان و رشيق رفيق مرعي، مقدمة في بحوث العمليات، دار وائل للنشر 2004

- لمياء جاسم محمد ,حل مسألة البرمجة التربيعية باستخدام طريقة Van De Panne تحت بيئة ضبابية ,2010

- مصباح جمعة عقل و محمد خليل ابوزلطة و زياد عبد الكريم القاضي، البرمجة الخطية، مكتبة المجتمع العربي للنشر و التوزيع 2009

- عاصم عبد الرحمن ، .بحوث العمليات واستخدام حزم البرمجيات برمجة الخوارزمي, دار المناهج للنشر والتوزيع1999

- Bernard Gendron, Modeles de recherché operationnelle, Montreal 2007
- David G Luenborger and Yinyu Ye , linear and nonlinear programine, 3Edition, Springer 2008.
- D.-H. Li and M. Fukushima. On the global convergence of the bfgs method for nonconvex unconstrained optimization problems. SIAM J. on Optimization, 11(4) :1054–1064,2000
- G Colletaz et Ch Hurlin, Modèles Non Linéaires et Prévisions, Laboratoire d'Economie d'Orléans2006
- G Fleury et Ph Lacomme Programmation linéaire avancée Elipses 2010
- J-C Moisdon et M Nakhia , Recherche opérationnelle; Méthodes d'optimisation en gestion, presses des mines 2010

- Michel Minoux ; Programmation mathématique : Théorie et algorithmes, Tec & Doc Lavoisier; Édition : 2e édition (14 décembre 2007)

- Richard Bellman, The theory of dynamic programing, Ed Rand Corporation 1954

- Richard Bellman, Dynamic programing, Ed Rand Corporation 1963

- Robert Faure et Bernard Lemaine , Précis de recherche opérationnelle Méthodes et exercices d'application, Dunod 2014

- Roseaux, Exercices et problèmes résolus de recherche opérationnelle - Volume 1, Dunod 2005

- Stéphane Mottelet , Optimisation non-linéaire, Université de Technologie de Compiègne 2003.
- Pierre Massé , Hydrodynamique fluviale, régime variables, Hermann & Cie 1935.
- Teghn dynamique. Graphes. Métaheuristiques, Références sciences 2012