UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI – OUM EL BOUAGHI

Département M.I 2020-2021

3ème Année Licence Maths(S5)

Matière : Espaces Vectoriels Normés

Série 03

Exercice1:

Muni du produit scalaire donné par $< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx$ *, l'espace :*

$$H = L^2([0,1],\mathbb{R}) = \left\{f: [0,1] \to \mathbb{R}\ ;\ \int_0^1 f^2(x)dx < +\infty\right\}$$ *est un espace de Hilbert.*

Soit F le sous-espace vectoriel de H défini par : $F = \left\{f \in H\ ;\ \int_0^1 f(x)dx = 0\right\}$.

1. Montrer que F est fermé.

2. Déterminer la projection de la fonction $g: x \mapsto e^x$ *sur* F.

3. En déduire la distance de la fonction g à F.

Exercice2:

Soit $H = L^2([-1,1],\mathbb{R})$ *et soit* T *la fonction définie par :*

$$T: H \to \mathbb{R}\ ; \qquad f \mapsto T(f) = \int_{-1}^0 f(t)dt - \int_0^1 f(t)dt.$$

1-Déterminer la fonction g *de* H *telle que* $T(f) = \langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$, $\forall f \in H$.

2- Demontrer que $\ker(T) = [g]^{\perp}$.

3- Trouver la projection de la fonction Id *sur* $\ker(T)$.

Exercice3:

Soit $= \ell^2_{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$ *, on pose* $F = \left\{X = (x_n) \in H\ /\ x_{2n} = -\frac{1}{2}x_{2n-1}\ ,\ n \geq 1\right\}$.

- *Montrer que F est un sous espace vectoriel fermé de H.*
- *Pour* $Y = (\frac{1}{n})_n$ *, déterminer* $P_F(Y)$.

Exercice4*:*

Montrer que dans l'espace vectoriel des fonctions réelles, continues et 2π-périodiques muni du produit scalaire : $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)g(t)dt$ *la famille :*

$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nt), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(mt)\ /\ (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\right\}$ *est orthonormée.*

Exercice5*:*

Trouver dans l'espace $H = L^2([0,\pi],\mathbb{R})$ *la meilleure approximation da la fonction :*

$f\ /\ f(x) = \cos(x)$ *par un polynome de degré inférieur ou égal à 2.*

Exercice6:

Dans l'espace $H = L^2([-1,1])$ *calculer:* $min_{a,b,c} \int_{-1}^{+1} |x^3 - ax^2 - bx - c|^2 dx$.