UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI – OUM EL BOUAGHI
Département M.I 2020-2021
3ème Année Licence Maths(S5)
Matière : Espaces Vectoriels Normés

Série 02

Exercice1:

Dans l'espace $H = L^2([0,1],\mathbb{C})$ *montrer que l'application :*

$\langle .,. \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$, $(f,g) \mapsto \langle f,g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$ *est un produit scalaire sur H.*

Trouver deux réels a et b tels que la fonction $x \in [0,1] \mapsto ax + b$ *soit de norme 1 et orthogonale à la fonction constante 1.*

Exercice2:

Soit H *un espace de Hilbert réel de produit scalaire* $\langle .,. \rangle$ *et de norme associée* $\|.\|$.

Montrer que pour tout $x, y, a \in H$ *on a :*

- $\langle x,y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$ *Identité de polaraisation.*
- $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ *Identité de parallélogramme.*
- $\|x-a\|^2 + \|y-a\|^2 = 2\left\|\frac{1}{2}(x+y) \quad -a\right\|^2 + \frac{1}{2}\|x-y\|^2$ *Identité de la médiane..*

Exercice3:

- *Montrer que l'espace* $\ell^2(\mathbb{N})$ *muni du produit scalaire usuel est un espace de Hilbert.*
- *Considérons dans l'espace* $C[-1,1]$ *la forme hermitienne qui à deux fonctions f*

et g continues sur [−1, 1], associe : $\langle f,g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)\overline{g(x)}dx$. *Montrer que c'est un produit scalaire sur* H, *mais l'espace* $(C([-1,1],\langle .,. \rangle)$ *n'est pas de Hilbert.(Utiliser la*

suite(f_n) :$f_n(x) = \begin{cases} 0 & si \ -1 \le x \le -\frac{1}{n} \\ nx+1 & si -\frac{1}{n} \le x \le 0 \\ 1 & si \ 0 \le x \le 1 \end{cases}$ *).*

Exercice4:

Soit H *un espace vectoriel sur*$\mathbb{C}$, *muni d'une norme qui vérifie l'identité* du parallélogramme.

Pou $x, y \in H$ *on pose :* $\varphi(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$.

(a) Montrer que $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$ *et que* $\varphi(x,x) = \|x\|^2$.

(b) Montrer que $\varphi(x+z,y) = \varphi(x,y) + \varphi(z,y)$

(c) Montrer que $\varphi(\lambda x,y) = \lambda\varphi(x,y)$, *pour tout* $\lambda \in C$.

(d) En déduire que toute norme qui satisfait l'identité du parallélogramme est induite par un *produit scalaire.*

Exercice5:

Soit H *un espace de Hilbert et* F *un sous-ensemble de* H. *Montrer que l'orthogonal de* F *est un sous-espace fermé de* H *et on a :*

$F \cap F^{\perp} = \{0\}$, $F^{\perp} = (\bar{F})^{\perp}$, *et* $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$.