Introduction :

Les espaces de Hilbert généralisent de façon algébrique et topologique à la dimension infinie la notions d'espace euclidien (ou hermitien dans le cas complexe). Il s'agit d'espace de Banach dont la norme est associée à un produit scalaire. On peut donc garder (avec quelques précautions) les mêmes notions, définitions, propriétés ...etc, vus dans le cadre d'espaces vectoriels normés.

La théorie des espaces de Hilbert permet de résoudre de nombreux problèmes concrets, notamment certains problèmes variationnels. De plus, c'est le cadre naturel pour la mécanique quantique.

Ce cours est principalement extrait du document de référence de L. Daniel, il est destiné aux étudiants de $3^{ième}$ année Licence maths, semestre S5 pour l'année universitaire 2020-2021.

Bon travail

Chapitre 2
Espaces de Hilbert

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1.1 *Soit H un espace vectoriel réel, resp. complexe. On appelle* **produit scalaire** *sur H toute* forme bilinéaire symétrique, *resp.* hermitienne, définie positive.

On notera $(x \mid y)$ le produit scalaire des vecteurs $x, y \in H$.

Cela signifie que l'application :

$$\begin{array}{rccl} (\,.\mid .\,): & H \times H & \longrightarrow & \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbf{C} \\ & (x, y) & \longmapsto & (x \mid y) \end{array}$$

vérifie :

1) pour tout $y \in H$, l'application $x \in H \mapsto (x \mid y) \in \mathbb{K}$ est une forme linéaire ;

2) pour tous $x, y \in H$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (y \mid x) = \underline{(x \mid y)} & \text{si l'espace est réel} \\ (y \mid x) = \overline{(x \mid y)} & \text{si l'espace est complexe ;} \end{array} \right.$$

3) pour tout $x \in H$, on a $(x \mid x) \geqslant 0$ et $(x \mid x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Remarque. Notons que dans le cas complexe, on a donc, pour $x, y \in H$ et $\lambda \in \mathbf{C}$:

$$(x \mid \lambda y) = \bar{\lambda}\,(x \mid y)\,.$$

Définition 1.2 *Si l'espace H est muni d'un produit scalaire, on dit que c'est un* **espace préhilbertien.**

Exemples.

1) a) Le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ est défini par :

$$\boxed{(x \mid y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n}$$

pour $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Le produit scalaire usuel de $\mathbb{C}^n$ est défini par :

$$\boxed{(x \mid y) = x_1 \overline{y}_1 + \cdots + x_n \overline{y}_n}$$

pour $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$.

b) On peut définir d'autres produits scalaires sur $\mathbb{K}^n$ en se donnant des *poids*, c'est-à-dire des nombres $a_1, \ldots, a_n > 0$, et en posant :

$$\begin{cases} (x \mid y) = \sum_{k=1}^n a_k x_k y_k\,, & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R}; \\ (x \mid y) = \sum_{k=1}^n a_k x_k \overline{y}_k\,, & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

2) Si $(S, \mathscr{T}, m)$ est un espace mesuré, on munit $H = L^2(m)$ d'un produit scalaire en posant, pour $f, g \in L^2(m)$:

$$\boxed{(f \mid g) = \int_S f g \, dm},$$

respectivement :

$$\boxed{(f \mid g) = \int_S f \overline{g} \, dm}.$$

En particulier, sur ℓ_2, on a un produit scalaire défini par :

$$\boxed{(x \mid y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n},$$

respectivement :

$$\boxed{(x \mid y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n},$$

pour $x = (x_n)_{n \geqslant 1}, y = (y_n)_{n \geqslant 1} \in \ell_2$.

1.2 Propriétés élémentaires

Puisque $(x \mid x) \geqslant 0$, on peut poser :

$$\boxed{\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}}.$$

Proposition 1.3 *Pour tous $x, y \in H$:*

a) $\boxed{\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x \mid y)}$, *(cas réel) ;*

b) $\boxed{\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(x \mid y)}$, *(cas complexe).*

Preuve. Il suffit de développer :

$$\|x+y\|^2 = (x+y \mid x+y) = (x \mid x) + (y \mid y) + (x \mid y) + (y \mid x),$$

et utiliser le fait que $(x \mid y) + (y \mid x) = (x \mid y) + \overline{(x \mid y)} = 2(x \mid y)$ dans le cas réel, et $= 2\mathrm{Re}\,(x \mid y)$ dans le cas complexe. □

Théorème 1.4 (inégalité de Cauchy-Schwarz) *Pour tous $x, y \in H$:*

$$\boxed{|(x \mid y)| \leqslant \|x\|\,\|y\|}.$$

Exemple. Dans le cas où $H = L^2(m)$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales :

$$\left| \int_S fg\,dm \right| \leqslant \int_S |fg|\,dm \leqslant \left(\int_S |f|^2\,dm \right)^{1/2} \left(\int_S |g|^2\,dm \right)^{1/2}.$$

Preuve. On ne la fera que dans le cas complexe ; c'est un peu plus facile dans le cas réel.

Lorsque $(x \mid y) = 0$, l'inégalité est évidente. Supposons donc $(x \mid y) \neq 0$. Alors, nécessairement, $y \neq 0$, et donc $\|y\| \neq 0$. Soit θ l'arguement du nombre complexe $(x \mid y)$; on a :

$$(\mathrm{e}^{-i\theta} x \mid y) = \mathrm{e}^{-i\theta}(x \mid y) \in \mathbb{R}_+ .$$

Posons $x' = \mathrm{e}^{-i\theta} x$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a, par la Proposition 1.3 :

$$\|x'\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(x' \mid y)\,t + \|y\|^2\,t^2 = \|x' + ty\|^2 \geqslant 0.$$

Le trinôme du second degré en t étant toujours positif ou nul, son discriminant doit être négatif ou nul :

$$\mathrm{Re}\,(x' \mid y) - \|x'\|^2 \|y\|^2 \leqslant 0.$$

Comme :

$$(x' \mid y) = \mathrm{e}^{-i\theta}(x \mid y) = |(x \mid y)| \in \mathbb{R}_+ ,$$

on a :

$$\mathrm{Re}\,(x' \mid y) = (x' \mid y) = |(x \mid y)|.$$

Comme, de plus, $\|x'\| = \|x\|$, on obtient l'inégalité annoncée. □

Corollaire 1.5 *L'expression* $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$ *définit une* <u>*norme*</u> *sur* H, *appelée* **norme hilbertienne**.

Preuve. Il suffit de vérifier l'inégalité triangulaire :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(x \mid y) \leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

Corollaire 1.6 *Pour chaque* $y \in H$, *la forme linéaire :*

$$\boxed{\begin{array}{llll} \Phi_y : & H & \longrightarrow & \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & (x \mid y) \end{array}}$$

est <u>*continue*</u>. *Sa norme dans* H^* *est* $\boxed{\|\Phi_y\| = \|y\|}$.

Preuve. On peut supposer $y \neq 0$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz dit que :

$$|\Phi_y(x)| = |(x \mid y)| \leqslant \|y\|\,\|x\|\,;$$

cela prouve que Φ_y est continue et que $\|\Phi_y\| \leqslant \|y\|$.

Comme $\Phi_y(y) = \|y\|^2$, on a $\|\Phi_y\| \geqslant \dfrac{|\Phi_y(y)|}{\|y\|} = \|y\|$. □

Remarque importante. *Cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Lorsque l'on regarde la preuve de l'inégalité, on voit, dans le cas où $(x \mid y) \neq 0$ que l'on a :

$$|(x \mid y)| = \|x\|\,\|y\|$$

si et seulement si le discriminant du trinôme du second degré en t est nul ; cela signifie que ce trinôme possède une racine (double) : il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\|x' + t_0 y\| = 0$; autrement dit $\mathrm{e}^{-i\theta}x + t_0 y = 0$: les vecteurs x et y sont **linéairement liés**.

Notons que lorsque $(x \mid y) = 0$, il ne peut y avoir égalité que si $\|x\| = 0$ ou $\|y\| = 0$, c'est-à-dire $x = 0$ ou $y = 0$, de sorte que, là aussi, x et y sont linéairement dépendants.

1.3 Orthogonalité

Définition 1.7 *On dit que deux vecteurs* x *et* y *d'un espace préhilbertien* H *sont* orthogonaux *si* $(x \mid y) = 0$. *On note* $\boxed{x \perp y}$.

Exemple. Dans $H = \mathbb{R}^2$, pour le produit scalaire usuel, on a $(-1,1) \perp (1,1)$.

Notons que la relation d'orthogonalité est symétrique : si $x \perp y$, alors $y \perp x$.

D'après la Proposition 1.3, on a, **dans le ca réel** :

$$\boxed{x \perp y \quad \Longleftrightarrow \quad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2},$$

ce que l'on peut appeler le "*Théorème de Pythagore*".

Dans le **cas complexe** :

$$x \perp y \iff \Big[\ \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \text{et} \quad \|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2\ \Big].$$

Des parties $A, B \subseteq H$ sont dites **orthogonales** si tout $x \in A$ est orthogonal à tout $y \in B$:

$$x \perp y\,, \qquad \forall x \in A,\ \forall y \in B.$$

On dit aussi que l'une est orthogonale à l'autre.

Définition 1.8 *L'***orthogonal** *d'une partie $A \subseteq H$ est l'ensemble :*

$$\boxed{A^{\perp} = \{y \in H\,;\ y \perp x\,,\ \forall x \in A\}}.$$

On a $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$ si $A \subseteq B$; donc en particulier $\big(\overline{A}\big)^{\perp} \subseteq A^{\perp}$; mais la continuité des applications $\Phi_y \colon x \mapsto (x \mid y)$ entraîne que $\big(\overline{A}\big)^{\perp} = A^{\perp}$.

Proposition 1.9 *Pour toute partie A de H, $A^{\perp}$ est orthogonal à A ; c'est la plus grande partie orthogonale à A.*

De plus $A^{\perp}$ est un **sous-espace vectoriel <u>fermé</u>** *de H.*

Preuve. Le début est clair. Pour le reste, remarquons que :

$$\boxed{A^{\perp} = \bigcap_{x \in A} \ker \Phi_x}$$

et que chaque sous-espace vectoriel $\ker \Phi_x = \Phi_x^{-1}(\{0\})$ est fermé puisque Φ_x est continue. □

1.4 Espaces de Hilbert

Définition 1.10 *Si un espace préhilbertien est* complet, *pour sa norme hilbertienne, on dit que c'est un* **espace de Hilbert**.

C'est donc un cas particulier d'espace de Banach.

Exemples. 1) Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert. Lorsque le corps de base est réel, on dit que c'est un *espace euclidien*, et que c'est un *espace hermitien* lorsque le corps de base est complexe.

2) Pour toute mesure positive m, $L^2(m)$ est un espace de Hilbert, en vertu du Théorème de Riesz-Fisher, puisque la norme $\|\,.\,\|_2$:

$$\|f\|_2 = \left(\int_S |f(t)|^2\, dm(t)\right)^{1/2}$$

est la norme hilbertienne associée au produit scalaire :

$$(f \mid g) = \int_S f(t)\overline{g(t)}\, dm(t).$$

En particulier, ℓ_2 est un espace de Hilbert.

2 Le Théorème de projection et ses conséquences

2.1 Le Théorème de projection

C'est grâce à ce théorème que l'on obtient toutes les "*bonnes*" propiétés des espaces de Hilbert.

Rappelons d'abord qu'une partie C d'un espace vectoriel est dite **convexe** si le segment $[x, y]$ est contenu dans C dès lors que $x, y \in C$:

$$x, y \in C \quad \Longrightarrow \quad [x, y] \subseteq C\,,$$

où $[x, y] = \{tx + (1-t)y\,;\ t \in [0, 1]\}$.

Tout sous-espace vectoriel est convexe ; toute boule est convexe.

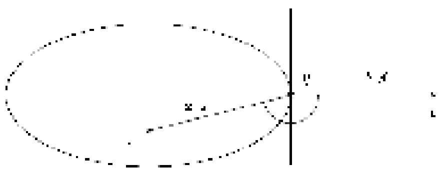
Théorème 2.1 (Théorème de projection) *Soit H un espace de* **Hilbert** *et soit C une partie* **convexe** *et* **fermée**, *non vide, de H. Alors, pour tout $x \in H$, il existe un* <u>*unique*</u> *$y \in C$ tel que :*

$$\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, C).$$

On dit que $y = P_C(x)$ est la projection de x sur C. *Il est caractérisé par la propriété :*

$$y \in C \quad \textit{et} \quad \operatorname{Re}(x - y \mid z - y) \leqslant 0\,,\ \forall z \in C. \qquad (*)$$

Dans le cas réel, l'inégalité dans la caractérisation $(*)$ signifie que l'angle $\alpha = (\widehat{y - x, y - z})$ est obtus.



Notons que la complétude de H n'est pas absolument indispensable : on peut la supprimer, mais en supposant que c'est C qui est complet.

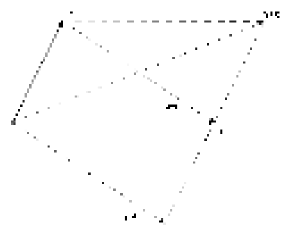
Preuve.

1) *Existence.* On aura besoin du lemme suivant, dont la preuve est immédiate, avec la Proposition 1.3.

Lemme 2.2 (identité du parallélogramme) *Pour tous $u, v \in H$:*

$$\boxed{\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\big(\|u\|^2 + \|v\|^2\big)}\,.$$

Cela signifie que la somme des carrés des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des quatre côtés.



Soit $d = \operatorname{dist}(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\|$.

Si $d = 0$, alors $x \in C$ (car C est fermé), et $y = x$ est l'unique point de C tel que $\|x - y\| = d$. On supposera donc $d > 0$.

Pour tout $n \geqslant 1$, il existe $z_n \in C$ tel que :

$$\|x - z_n\|^2 \leqslant d^2 + \frac{1}{n} \cdot$$

Appliquons alors, pour $n, p \geqslant 1$, l'identité du parallélogramme à $u = x - z_n$ et $v = x - z_p$; on obtient :

$$4\left\|x - \frac{z_n + z_p}{2}\right\|^2 + \|z_n - z_p\|^2 = 2\big(\|x - z_n\|^2 + \|x - z_p\|^2\big)\,.$$

Mais, C étant *convexe*, on a $\dfrac{z_n + z_p}{2} \in C$; donc :

$$\left\|x - \frac{z_n + z_p}{2}\right\| \geqslant d;$$

de sorte que l'on obtient :

$$\|z_n - z_p\|^2 \leqslant 2\left(d^2 + \frac{1}{n} + d^2 + \frac{1}{p}\right) - 4d^2 = 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right) \cdot$$

La suite $(z_n)_n$ est par conséquent une suite de Cauchy. Comme H est complet, elle converge donc vers un élément $y \in H$. Mais comme C est fermé, on a en fait, puisque les z_n sont dans C, $y \in C$.

De plus, le fait que $\|x - z_n\|^2 \leqslant d^2 + 1/n$ entraîne, en passant à la limite, que $\|x - y\| \leqslant d$. On a donc $\|x - y\| = d$, puisque $y \in C$.

2) *Unicité.* Si $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = d$, avec $y_1, y_2 \in C$, alors, comme ci-dessus, l' identité du parallélogramme donne :

$$\begin{aligned} 4d^2 + \|y_1 - y_2\|^2 &\leqslant 4\left\|x - \frac{y_1 + y_2}{2}\right\|^2 + \|y_1 - y_2\|^2 \\ &= 2\left(\|x - y_1\|^2 + \|x - y_2\|^2\right) = 2\left(d^2 + d^2\right); \end{aligned}$$

d'où $\|y_1 - y_2\|^2 \leqslant 0$, ce qui n'est possible que si $y_1 = y_2$.

3) *Preuve de* $(*)$.

a) Si $z \in C$, on a $(1 - t)y + tz \in C$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, par la convexité de C ; donc :

$$\|x - (1 - t)y - tz\|^2 \geqslant \|x - y\|^2 ,$$

soit en développant avec la Proposition 1.3 :

$$t^2 \|y - z\|^2 + 2t \operatorname{Re}(x - y \mid y - z) \geqslant 0.$$

Pour $t \neq 0$, divisons par t, puis faisons ensuite tendre t vers 0 ; il vient $\operatorname{Re}(x - y \mid y - z) \geqslant 0$, soit :

$$\operatorname{Re}(x - y \mid z - y) \leqslant 0 .$$

b) Réciproquement, si y vérifie $(*)$, on a, pour tout $z \in C$:

$$\begin{aligned} \|x - z\|^2 = \|(x - y + (y - z)\|^2 &= \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 + 2\operatorname{Re}(x - y \mid y - z) \\ &\geqslant \|x - y\|^2 ; \end{aligned}$$

donc $y = P_C(x)$, par unicité. □

2.2 Conséquences

Proposition 2.3 *L'application $P_C : H \to C$ est continue ; plus précisément, on a, pour tous $x_1, x_2 \in H$:*

$$\|P_C(x_1) - P_C(x_2)\| \leqslant \|x_1 - x_2\| .$$

Preuve. Posons $y_1 = P_C(x_1)$ et $y_2 = P_C(x_2)$; la condition $(*)$ donne :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(x_1 - y_1 \mid z - y_1) \leqslant 0 & \forall z \in C; \\ \operatorname{Re}(x_2 - y_2 \mid z' - y_2) \leqslant 0 & \forall z' \in C. \end{cases}$$

En prenant $z = y_2$ et $z' = y_1$, et en additionnant, il vient :

$$\operatorname{Re}\big((x_1 - y_1) - (x_2 - y_2) \mid y_2 - y_1\big) \leqslant 0.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\|y_1 - y_2\|^2 &= \operatorname{Re}\|y_1 - y_2\|^2 = \operatorname{Re}\big((y_2 - x_2) + (x_2 - x_1) + (x_1 - y_1) \mid y_2 - y_1\big) \\
&= \operatorname{Re}\big((x_1 - y_1) - (x_2 - y_2) \mid y_2 - y_1\big) + \operatorname{Re}(x_2 - x_1 \mid y_2 - y_1) \\
&\leqslant \operatorname{Re}(x_2 - x_1 \mid y_2 - y_1) \leqslant |(x_2 - x_1 \mid y_2 - y_1)| \\
&\leqslant \|x_2 - x_1\| \, \|y_2 - y_1\|
\end{aligned}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il en résulte, en divisant par $\|y_2 - y_1\|$ (que l'on peut supposer non nul, car sinon le résultat est évident), que l'on a bien $\|y_1 - y_2\| \leqslant \|x_2 - x_1\|$. □

Dans le cas où le convexe C est un sous-espace vectoriel, on a de meilleures propriétés.

Théorème 2.4 *Si F est un* **sous-espace vectoriel fermé** *de l'espace de* **Hilbert** *H, alors l'application $P_F \colon H \to F$ est une application* **linéaire continue**, *et $P_F(x)$ est l'unique point $y \in F$ tel que :*

$$\boxed{y \in F \quad \text{et} \quad x - y \in F^\perp}.$$

Preuve. D'abord, si $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$, on a :

$$\operatorname{dist}(x, F)^2 = \inf_{z \in F} \|x - z\|^2 = \inf_{z \in F} \big[\|x - y\|^2 + \|y - z\|^2\big] = [\|x - y\|^2;$$

donc $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, F)$ et $y = P_F(x)$.

La réciproque résulte de la condition $(*)$:

$$\operatorname{Re}(x - y \mid z - y) \leqslant, \quad \forall z \in F\,;$$

en effet, comme F est un sous-espace vectoriel, on a :

$$z = y + \lambda w \in F\,, \quad \forall w \in F \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}\,.$$

Lorsque H est réel, on a donc :

$$\lambda(x - y \mid w) = \big(\lambda(x - y) \mid w\big) \leqslant 0\,, \quad \forall w \in F\,,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\,,$$

ce qui n'est possible que si $(x - y \mid w) = 0$ pour tout $w \in F$.

Lorsque l'espace H est complexe, on a :

$$\lambda \operatorname{Re}(x - y \mid w) = \operatorname{Re}\big(\lambda(x - y) \mid w\big) \leqslant 0\,, \quad \forall w \in F\,,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\,,$$

et :

$$\lambda \operatorname{Im}(x - y \mid w) = \operatorname{Re}\big(-i\lambda(x - y) \mid w\big) \leqslant 0\,, \quad \forall w \in F\,,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\,,$$

ce qui, de nouveau, n'est possible que si $(x - y \mid w) = 0$ pour tout $w \in F$.

La linéarité de P_F est alors facile à voir, grâce à l'unicité ; en effet, si $y_1 = P_F(x_1)$, $y_2 = P_F(x_2)$, alors $(x_1 - y_1), (x_2 - y_2) \in F^\perp$; donc, pour $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$, $(a_1 x_1 + a_2 x_2) - (a_1 y_1 + a_2 y_2) \in F^\perp$; donc $P_F(a_1 x_1 + a_2 x_2) = a_1 y_1 + a_2 y_2$. $\square$

Notons que la continuité a été vue à la Proposition 2.3, et qu'en prenant $x_2 = 0$ dans cette proposition, on a : $\|P_F(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in H$; la norme de P_F est donc $\leqslant 1$. Mais comme $P_F(x) = x$ pour tout $x \in F$, on obtient, si $F \neq \{0\}$, que $\boxed{\|P_F\| = 1}$.

A titre d'exercice, on pourra montrer que, pour un convexe fermé C, P_C est linéaire si et seulement si C est un sous-espace vectoriel.

Théorème 2.5 *Si H est un espace de* **Hilbert**, *alors, pour tout sous-espace vectoriel* **fermé**, *on a :*

$$\boxed{H = F \oplus F^\perp},$$

et la projection sur F parallèlement à $F^\perp$ associée est P_F. Elle est donc continue, de sorte que la somme directe est une somme directe topologique.

On dit que P_F est la **projection orthogonale** *sur F.*

Le fait que H soit la somme directe de F et $F^\perp$ signifie que tout $x \in H$ s'écrit, de façon unique, $\boxed{x = y + z}$, avec $\boxed{y \in F, z \in F^\perp}$. Notons que, puisque F et $F^\perp$ sont orthogonaux, on a : $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$; en d'autres termes :

$$\boxed{\|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|x - P_F(x)\|^2}.$$

On retrouve le fait que P_F est continue et de norme 1, si $F \neq \{0\}$. On voit aussi que $\|Id_E - P_F\| = 1$, si $F^\perp \neq \{0\}$; mais on verra juste après qu'en fait $Id_E - P_F$ est la projection orthogonale sur $F^\perp$.

Preuve. On a $x = P_F(x) + \big(x - P_F(x)\big)$, avec $x - P_F(x) \in F^\perp$, par le Théorème 2.4. D'autre part, si $x \in F \cap F^\perp$, on a, en particulier, $(x \mid x) = 0$; donc $x = 0$. $\square$

Remarque. Le Théorème 2.5 est vraiment spécifique aux espaces de Hilbert ; en effet, J. Lindenstraus et L. Tzafriri ont montré en 1971 que si E est un espace de Banach dans lequel tout sous-espace vectoriel fermé est l'image d'une projection continue, alors cet espace est isomorphe à un espace de Hilbert. La preuve repose sur le Théorème de Dvoretzky, disant que tout sous-espace vectoriel de dimension finie n d'un espace normé contient un sous-espace vectoriel, de dimension "*assez grande*", de l'ordre de $\log n$, qui est très proche d'un espace de Hilbert (voir le Chapitre 8 du livre : D. Li – H. Queffélec, *Introduction à l'étude des espaces de Banach – Analyse et Probabilités*, Cours Spécialisés 12, Société Mathématique de France, 2004).

Le résultat suivant peut être montré directement, mais il est facilement obtenu à partir du Théorème 2.5.

Corollaire 2.6 *On a $F^{\perp\perp} = \overline{F}$ pour tout sous-espace vectoriel F de l'espace de Hilbert H.*

Preuve. $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé, par la Proposition 1.9 ; on peut lui appliquer le Théorème 2.5 : $H = F^{\perp} \oplus F^{\perp\perp}$, que l'on peut aussi écrire : $H = F^{\perp\perp} \oplus F^{\perp}$.

D'autre part, on peut aussi appliquer ce théorème au sous-espace vectoriel fermé $\overline{F}$: $H = \overline{F} \oplus (\overline{F})^{\perp} = \overline{F} \oplus F^{\perp}$.

Il en résulte, puisque $F \subseteq \overline{F}$, que $F^{\perp\perp} = \overline{F}$. □

On en déduit, puisque $H^{\perp} = \{0\}$ et $\{0\}^{\perp} = H$, le critère **très pratique** suivant de densité.

Corollaire 2.7 *Soit H un espace de Hilbert, et F un sous-espace vectoriel de H. Alors F est* **dense** *dans H si et seulement si $F^{\perp} = \{0\}$.*

Ainsi, pour montrer qu'un sous-espace vectoriel est **dense** dans H, il suffit de vérifier que :

$$\boxed{\big[(x \mid y) = 0\,, \quad \forall x \in F\big] \quad \Longrightarrow \quad y = 0}\,.$$

Voyons un exemple d'application.

Théorème 2.8 *L'espace $\mathscr{K}(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à support compact est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.*

Ce théorème a déjà été vu, sous une forme plus générale d'ailleurs, dans le cours d'Intégration ; mais il s'agit ici, même si le résultat est important par lui-même, de voir comment appliquer le Corollaire 2.7.

Notons que $\mathscr{K}(\mathbb{R})$ n'est pas réellement contenu dans $L^2(\mathbb{R})$, puisque ce dernier est un espace de classes d'équivalence de fonctions, mais, comme deux applications continues qui sont égales presque partout, pour la mesure de Lebesgue, le sont en fait partout, l'application canonique $j \colon \mathscr{K}(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, qui associe à chaque fonction sa classe d'équivalence, est *injective* ; on peut donc identifier chaque $f \in \mathscr{K}(\mathbb{R})$ à sa classe d'équivalence $j(f)$, c'est-à-dire $\mathscr{K}(\mathbb{R})$ à $J\big[\mathscr{K}(\mathbb{R})\big]$.

Preuve. Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$ telle que :

$$(f \mid g) = \int_{\mathbb{R}} f\overline{g}\, d\lambda = 0\,, \quad \forall f \in \mathscr{K}(\mathbb{R}).$$

On veut montrer que $g = 0$.

En prenant les parties réelles et imaginaires, on peut supposer que g est à veleurs réelles, et l'on écrit $g = g^+ - g^-$. On a, pour toute $f \in \mathscr{K}(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) g^+(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) g^-(t)\, dt\,.$$

Soit $a < b$. Il existe des $f_n \in \mathscr{K}(\mathbb{R})$ telles que $0 \leqslant f_n \leqslant \mathbb{1}_{[a,b]}$, $f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{1}]a,b[(t)$ pour $t \neq a, b$, et telles que la suite $(f_n)_n$ soit croissante.

Le Théorème de convergence monotone donne :

$$\int_a^b g^+(t)\, dt = \lim_{n\to\infty}\uparrow \int_{\mathbb{R}} f_n(t) g^+(t)\, dt = \lim_{n\to\infty}\uparrow \int_{\mathbb{R}} f_n(t) g^-(t)\, dt = \int_a^b g^-(t)\, dt.$$

Cela veut dire que les mesures positives $\mu = g^+.\lambda$ et $\nu = g^-.\lambda$ sont égales sur tous les intervalles $[a,b]$ et y prennent des valeurs finies :

$$\int_a^b g^+(t)\, dt \leqslant \int_a^b |g(t)|\, dt = \int_{\mathbb{R}} |g(t)|\, \mathbb{1}_{[a,b]}(t)\, dt \leqslant \sqrt{b-a}\, \|g\|_2 < +\infty\,,$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Le Théorème d'unicité des mesures dit alors que $\mu = \nu$. Cela signifie que $g^+ = g^-$ presque partout, c'est-à-dire $g = 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$. □

Corollaire 2.9 *$\mathscr{C}([0,1])$ est dense dans $L^2(0,1)$.*

Preuve. Soit $f \in L^2(0,1)$. Prolongeons-la en $\tilde{f}$ sur $\mathbb{R}$ par 0 en dehors de $[0,1]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\|\tilde{f} - g\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \varepsilon$. Soit $h = g_{|[0,1]}$ la restriction de g à $[0,1]$. On a $h \in \mathscr{C}([0,1])$ et $\|f - h\|_{L^2(0,1)} \leqslant \|\tilde{f} - g\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \varepsilon$. □

2.3 Représentation du dual

Rappelons que le dual est :

$$H^* = \{\Phi\colon H \to \mathbb{K}\,;\ \Phi \text{ linéaire continue}\}\,,$$

où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est le corps de base.

Savoir donner une représentation "*concrète*" du dual d'un espace fonctionnel permet souvent de résoudre des problèmes sur l'espace lui-même. Dans le cas des espaces de Hilbert, c'est particulièrement simple.

Rappelons d'abord que nous avons vu que, pour tout $y \in H$, la forme linéaire $\Phi_y : x \in H \mapsto (x \mid y)$ est continue, c'est-à-dire est un élément du dual H^*. Il s'avère que *tous* les éléments du dual sont de cette forme.

Théorème 2.10 (Théorème de Fréchet-Riesz) *L'application :*

$$J: \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & H^* \\ y & \longmapsto & \Phi_y \end{array}$$

est une isométrie **surjective**.

Ce théorème a été prouvé, de façon indépendante, par M. Fréchet et F. Riesz en 1907, pour $H = L^2(0,1)$; les deux articles ont été publié, par coïncidence, dans le même numéro des Notes aux Compte-rendus de l'Académie des Sciences.

Ce théorème signifie que :

Pour toute $\Phi \in H^*$, il **existe** un, unique, $y \in H$ tel que $\Phi(x) = (x \mid y)$, pour tout $x \in H$.

Notons que dans le cas réel, J est linéaire, mais que dans le cas complexe, elle n'est que *semi-linéaire*.

Preuve. Nous savons déjà que J est une isométrie : $\|\Phi_y\| = \|y\|$. Ce qu'il faut voir, c'est la surjectivité.

Soit $\Phi \in H^*$, non nulle. Comme Φ est continue, le sous-espace vectoriel $F = \ker \Phi$ est fermé. Donc :

$$H = (\ker \Phi) \oplus (\ker \Phi)^{\perp}.$$

Mais comme Φ est une forme linéaire non nulle, $\ker \Phi$ est de codimension 1 ; donc $(\ker \Phi)^{\perp}$ est de dimension 1.

Soit $u \in (\ker \Phi)^{\perp}$, de norme 1, et posons $y = \overline{\Phi(u)}\, u$.

Alors, comme $y \in (\ker \Phi)^{\perp}$, Φ_y est nulle sur $\ker \Phi$; mais, d'autre part :

$$\Phi_y(u) = (u \mid y) = \Phi(u)\,(u \mid u) = \Phi(u)\,\|u\|^2 = \Phi(u).$$

Ainsi l'on a bien $\Phi = \Phi_y$. $\square$

2.4 Adjoint d'un opérateur

On appelle *opérateur* sur H toute application linéaire continue $T : H \to H$.

Proposition 2.11 *Soit H un espace de Hilbert. Pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$, il existe un autre opérateur, noté T^* tel que :*

$$\boxed{(Tx \mid y) = (x \mid T^*y)}, \quad \forall x, y \in H.$$

De plus $\|T^*\| = \|T\|$.

Preuve. Soit $y \in H$. L'application :

$$\begin{array}{rccc} \Phi_y \circ T: & H & \longrightarrow & H \\ & x & \longmapsto & (Tx \mid y) \end{array}$$

est une forme linéaire continue sur H ; il existe donc, par le Théorème de Fréchet-Riesz, un unique élément de H, que l'on notera T^*y, tel que :

$$(x \mid T^*y) = (Tx \mid y)\,, \quad \forall x \in H.$$

A cause de l'unicité, l'application $T^* \colon y \in H \leftrightarrow T^*y \in H$ est clairement linéaire : si $y_1, y_2 \in H$ et $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$, on a, pour tout $x \in H$:

$$\begin{aligned}\big(x \mid T^*(a_1y_+a_2y_2)\big) &= (Tx \mid a_1y_+a_2y_2) = \overline{a}_1(Tx \mid y_1) + \overline{a}_2(Tx \mid y_2) \\ &= \overline{a}_1(x \mid T^*y_1) + \overline{a}_2(x \mid T^*y_2) = (x \mid a_1T^*y_1 + a_2T^*y_2).\end{aligned}$$

D'autre part, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$|(\Phi_y \circ T)(x)| = (Tx \mid y)| \leqslant \|Tx\|\,\|y\| \leqslant \|T\|\,\|x\|\,\|y\|\,;$$

donc $\|T^*y\| = \|\Phi_y \circ T\| \leqslant \|T\|\,\|y\|$. Cela prove que l'application linéaire $T^"st$ est continue et que $\|T^*\| \leqslant \|T\|$.

Pour voir que $\|T\| \leqslant \|T^*\|$, écrivons :

$$\|Tx\|^2 = (Tx \mid Tx) = (x \mid T^*Tx) \leqslant \|x\|\,\|T^*Tx\| \leqslant \|x\|\,\|T\|ast\|\,\|T\|\,,$$

ce qui donne, en divisant par $\|Tx\|$ (lorsque $|Tx\| \neq 0$) : $\|Tx\| \leqslant \|T^*\,\|x\|$; mais cette inégalité étant encore bien sûr vraie si $\|Tx\| = 0$, elle est vraie pour tout $x \in H$; cela veut dire que $\|T\| \leqslant \|T^*\|$. □

3 Bases orthonormées

Pour éviter de parler de familles sommables, on se restreindra aux espaces **séparables**. Pour le cas général, on pourra se reporter, par exemple, au livre de G. Choquet, *Cours d'Analyse*, Masson.

3.1 Espaces séparables

Définition 3.1 *Un espace topologique E est dit* séparable *s'il existe une partie $D \subseteq E$ qui est dénombrable et dense dans E : $\overline{D} = E$.*

Dans le cas des espaces normés, on a une notion équivalente.

Proposition 3.2 *Soit E un espace vectoriel normé. Pour que E soit séparable, il faut et il suffit qu'il existe dans E une partie Δ qui soit dénombrable et* **totale** *dans E.*

On dit qu'une partie Δ d'un espace vectoriel normé E est *totale* lorsque le *sous-espace vectoriel* $\mathrm{vect}\,(\Delta)$ *engendré* par cette partie est dense.

Preuve. Le $\mathbb{Q}$- sous-espace vectoriel (respectivement le $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$- sous-espace vectoriel) engendré par Δ est dénombrable et son adhérence est la même que celle de $\mathrm{vect}\,(\Delta)$. $\square$

Exemples. 1) Tout espace vectoriel de dimension finie est séparable.

2) Les espaces c_0 et ℓ_p, pour $\underline{1 \leqslant p < \infty}$, sont séparables, car si

$$e_n = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n^{\text{ième}}\ \text{place}}}{1}, 0, \ldots),$$

alors $\Delta = \{e_n\,;\ n \geqslant 1\}$ est totale, puisque, pour tout $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in \ell_p$, on a :

$$\|x - (\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n)\|^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,;$$

et lorsque $x \in c_0$:

$$\|x - (\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n)\|_\infty = \sup_{k \geqslant n+1} |\xi_k| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On peut montrer (*exercice*) que ℓ_∞ n'est *pas* séparable.

Proposition 3.3 *Tout sous-espace d'un espace* métrique *séparable est séparable.*

Preuve. Soit E un espace métrique séparable, $D = \{x_n\,;\ n \geqslant 1\}$ une partie de E dénombrable dense, et $F \subseteq E$. Pour couple d'entiers $n, k \geqslant$ tels que $F \cap B(x_n, 1/k)$ ne soit pas vide, choisissons un élément $y_{n,k} \in F$; sinon, prenons pour $y_{n,k}$ un élément fixe donné y_0 de F. Alors $D_F = \{y_{n,k}\,;\ n, k \geqslant 1\}$ est une partie dénombrable de F, et elle est dense dans F : si $y \in F$, il existe $n, k \geqslant 1$ tels que $y \in B(x_n, 1/k)$; donc $F \cap B(x_n, 1/k) \neq \emptyset$, et $d(y, y_{n,k}) \leqslant d(y, x_n) + d(x_n, y_{n,k}) \leqslant 2/k$. $\square$

3.2 Systèmes orthonormés

Nous supposerons dans la suite que H est un espace préhilbertien, de **dimension infinie**.

Définition 3.4 *Soit* $(u_i)_{i \in I}$ *une famille d'éléments de* H, *indexée par un ensemble arbitraire* I, *non vide. On dit que c'est une* **famille orthonormée**, *ou un* **systèmes orthonormés**, *si :*

1) $\|u_i\| = 1\,,\ \forall i \in I$;

2) $u_i \perp u_j\,,\ \forall i \neq j$.

Notons que tout sous-système d'un système orthonormé est encore orthonormé.

Exemples. 1) Dans ℓ_2, la suite $(e_n)_{n\geqslant 1}$ est orthonormée.

2) Dans $L^2(0,1)$, on pose :

$$e_n(t) = \mathrm{e}^{2\pi i n t}, \quad n \in \mathbb{Z};$$

le système $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormé ; on dit que c'est le **système trigonométrique**.

Proposition 3.5 *Si le système fini $(u_1, \ldots, u_n)$ est orthonormé, alors, pour tous $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$:*

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} a_k u_k \Big\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2.$$

Preuve. Il suffit de développer en utilisant la Proposition 1.3 :

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} a_k u_k \Big\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|a_k u_k\|^2 + \sum_{k\neq j} (a_k u_k \mid a_j u_j),$$

et d'utiliser que $\|a_k u_k\| = |a_k|\,\|u_k\| = |a_k|$ et que, pour $k \neq j$, $(a_k u_k \mid a_j u_j) = a_k \overline{a}_j (u_k \mid u_j) = 0$. □

Corollaire 3.6 *Toute famille orthonormée est libre (c'est-à-dire que les vecteurs la composant sont linéairement indépendants).*

Proposition 3.7 (inégalité de Bessel) *Soit H un espace préhilbertien. Pour toute famille orthonormée $(u_i)_{i\in I}$ dans H, on a, pour tout $x \in H$:*

$$\boxed{\sum_{i\in I} |(x \mid u_i)|^2 \leqslant \|x\|^2}.$$

Dans l'inégalité ci-dessus, la somme au premier membre est définie de la façon suivante : si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de nombres réels **positifs**, alors :

$$\sum_{i\in I} a_i \overset{\text{déf}}{=} \sup_{J\subseteq I,\ J \text{ finie}} \sum_{i\in J} a_i .$$

Si $\ell_2(I) = \{(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I\,; \sum_{i\in I} a_i < +\infty\}$, l'inégalité de Bessel entraîne que l'on a une application :

$$\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \ell_2(I) \\ x & \longmapsto & \big((x \mid u_i)\big)_{i\in I}. \end{array}$$

Preuve. Si $\xi_i = (x \mid u_i)$, on a, puisque la famille est orthonormée, pour toute partie finie J de I :

$$0 \leqslant \Big\| x - \sum_{i\in J} \xi_i u_i \Big\|^2 = \|x\|^2 - 2 \sum_{i\in J} \mathrm{Re}\,(x \mid \xi_i u_i) + \sum_{i\in J} |\xi_i|^2,$$

ce qui donne le résultat car $(x \mid \xi_i u_i) = \overline{\xi}_i (x \mid u_i) = \overline{\xi}_i \xi_i = |\xi_i|^2$. □

Proposition 3.8 *Soit H un espace préhilbertien et soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une* **suite** *othonormée dans H. Si un vecteur $x \in H$ peut s'écrire $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n$, alors on a forcément $\boxed{\xi_n = (x \mid u_n)}$ pour tout $n \geqslant 1$.*

Ici "*suite*" signifie "famille dénombrable".

Preuve. Pour chaque $k \geqslant 1$, la forme linéaire Φ_{u_k} est continue ; donc :

$$(x \mid u_k) = \Phi_{u_k}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{u_k}(\xi_n u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n (u_n \mid u_k) = \xi_k \,. \qquad \square$$

Proposition 3.9 *Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une* **suite** *othonormée et $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n$. Soit F_n le sous-espace vectoriel engendré par $u_1, \ldots, u_n$. Alors :*

$$P_{F_n}(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k u_k \,.$$

Preuve. Comme $\xi_k = (x \mid u_k)$, par la proposition précédente, on a $(x - \sum_{k=1}^{n} \xi_k u_k \mid u_j) = 0$ pour tout $j \leqslant n$; donc $y_n = (x - \sum_{k=1}^{n} \xi_k u_k) \in F_n^{\perp}$, et donc $P_{F_n}(y_n) = 0$. Cela donne le résultat, puisque $P_{F_n}(u_k) = u_k$ pour tout $k \leqslant n$. $\square$

Proposition 3.10 *Si H est un espace de* **<u>Hilbert</u>**, *et $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite orthonormée dans H, alors, pour* **toute** *suite $(\xi_n)_{n\geqslant 1} \in \ell_2$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n$ converge dans H.*

En d'autres termes, l'application :

$$\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \ell_2 \\ x & \longmapsto & \big((x \mid u_n)\big)_{n\geqslant 1} \end{array}$$

est **<u>surjective</u>**.

Preuve. Il suffit de remarquer que la série est *de Cauchy*, car la Proposition 3.5 donne :

$$\Big\| \sum_{k=n}^{n+p} \xi_k u_k \Big\|^2 = \sum_{k=n}^{n+p} |\xi_n|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \,,$$

uniformément en p. $\square$

3.3 Bases orthonormées

Définition 3.11 *On dit qu'une suite orthonormée $(u_n)_{n\geqslant 1}$ dans un espace préhilbertien H est une* **base orthonormée** *de H si l'ensemble $\{u_n \,;\, n \geqslant 1\}$ est <u>total</u> dans H.*

Notons que, comme on s'est restreint à prendre des familles dénombrables, l'espace H sera forcément séparable.

D'autre part, il faut noter que cette notion de *base orthonormée* est, en dimension infinie, différente de la notion de base, au sens algébrique du terme : une famille de vecteurs d'un espace vectoriel est une base si tout vecteur peut s'écrire, de façon unique, comme combinaison linéaire d'un nombre fini de termes de la famille ; or le théorème qui suit dit que, pour une base orthonormée, tout élément s'écrit comme la somme d'une série, qui fait intervenir *tous* les termes de la base orthonormée.

Théorème 3.12 *Soit H un espace préhilbertien et soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une base orthonormée de H. Alors, tout élément $x \in H$ s'écrit :*

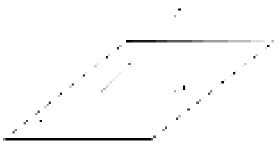
$$\boxed{x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n}\,, \qquad \textit{avec} \quad \boxed{\xi_n = (x \mid u_n)}\,.$$

De plus, pour tous $x, y \in H$, on a les **identités de Parseval** *:*

1) $\boxed{\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x \mid u_n)|^2}$;

2) $\boxed{(x \mid y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x \mid u_n)\,\overline{(y \mid u_n)}}$.

Preuve. Notons F_n le sous-espace vectoriel engendré par $u_1, \ldots, u_n$, et posons $x_n = P_{F_n}(x)$.



Comme l'ensemble $\{u_n\,;\ n \geqslant 1\}$ est total, on a :

$$\|x - x_n\| = \operatorname{dist}(x, F_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

D'autre part, d'après le Corollaire 3.6, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une base, au sens usuel, de F_n ; et, par la Proposition 3.8, on a donc :

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} (x_n \mid u_k)\, u_k\,.$$

Mais $(x - x_n) \in F_n^\perp$; donc, pour $k \leqslant n$, $(x_n \mid u_k) = (x \mid u_k) = \xi_k$ ne dépend pas de n . On a donc bien :

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \xi_k u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k u_k .$$

De plus, si $\xi_k = (x \mid u_k)$ et $\zeta_k = (y \mid u_k)$:

$$(x \mid y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_k \overline{\zeta}_n \, (u_k \mid u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \overline{\zeta}_n ,$$

qui donne l'autre identité lorsque $y = x$. □

Il résulte du Théorème 3.12 et de la Proposition 3.10 que l'on a :

Corollaire 3.13 *Soit H un espace de* **Hilbert**, *séparable, et soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une base orthonormée de H. Alors l'application :*

$$S: \begin{array}{ccc} \ell_2 & \longrightarrow & H \\ (\xi_n)_{n\geqslant 1} & \longmapsto & \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n \end{array}$$

est un **isomorphisme** *d'espaces de Hilbert, c'est-à-dire un isomorphisme conservant le produit scalaire : $\big(S(\xi) \mid S(\zeta)\big) = (\xi \mid \zeta)$ pour tous $\xi, \zeta \in \ell_2$.*

Nous allons voir qu'en fait *tout* espace de Hilbert séparable possède des bases orthonormées, et donc le corollaire précédent s'applique à tous les espaces de Hilbert séparables.

3.4 Existence des bases orthonormées

Théorème 3.14 *Tout espace de Hilbert séparable possède des bases orthonormées.*

En fait la complétude ne sert pas ici (car on utilisera une projection sur des sous-espaces vectoriels de dimension finie, donc complets).

On obtient, comme conséquence du Théorème 3.14 et du Corollaire 3.13, le résultat essentiel suivant, dans lequel, cette fois-ci l'hypothèse de complétude ne peut être omise.

Théorème 3.15 *Tous les espaces de* **Hilbert** *séparables, de dimension infinie, sont* *isomorphes* *entre-eux, et en particulier à ℓ_2.*

Preuve du Théorème 3.14 . On utilise tout simplement le **procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt**.

Prenons une partie dénombrable $\{v_n\,;\ n \geqslant 1\}$ totale. On peut supposer que les v_n, $n \geqslant 1$, sont linéairement indépendant (en supprimant ceux qui sont combinaison linéaire des précédents).

Soit F_n le sous-espace vectoriel engendré par $v_1, \ldots, v_n$. On pose $u_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$, et

$$u'_{n+1} = P_{F_n^\perp}(v_{n+1})\,, \quad u_{n+1} = \frac{u'_{n+1}}{\|u'_{n+1}\|}\,.$$

Alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est orthonormée, et l'ensemble $\{u_n\,;\ n \geqslant 1\}$ est total car le sous-espace vectoriel engendré par $u_1, \ldots, u_n$ est F_n. □