1. 2 Modélisation d'un programme linéaire noté PL et Problèmes

Dans cette section des exemples concrets de problèmes qui se modélisent par la programmation linéaire.

Problème 1 : Un problème de fabrication:

Une firme a le projet de construire deux produits nécessitant l'utilisation de 3 machines. La machine A ne peut travailler que 150 heures par mois, la machine B, 210 heures, et la machine C, 180 heures. Le premier produit P1 nécessite 1 heure de la machine A et 1 heure de la machine B et il est vendu 300 euros à l'unité. Le second produit P2 nécessite une heure de la machine A, trois heures de la machineB et 3 heures de la machine C et il est vendu 500 euros à l'unité. La firme cherche à définir le programme de fabrication lui permettant de rendre maximal son prix de revient.

Réponse 1 :

Une modélisation mathématique conduit à appeler$x$le nombre de produits P1 à fabriquer et y le nombre de produits P2 et M le point de coordonnées (x, y).Les contraintes de fabrication s'expriment à l'aide des inégalités suivantes :

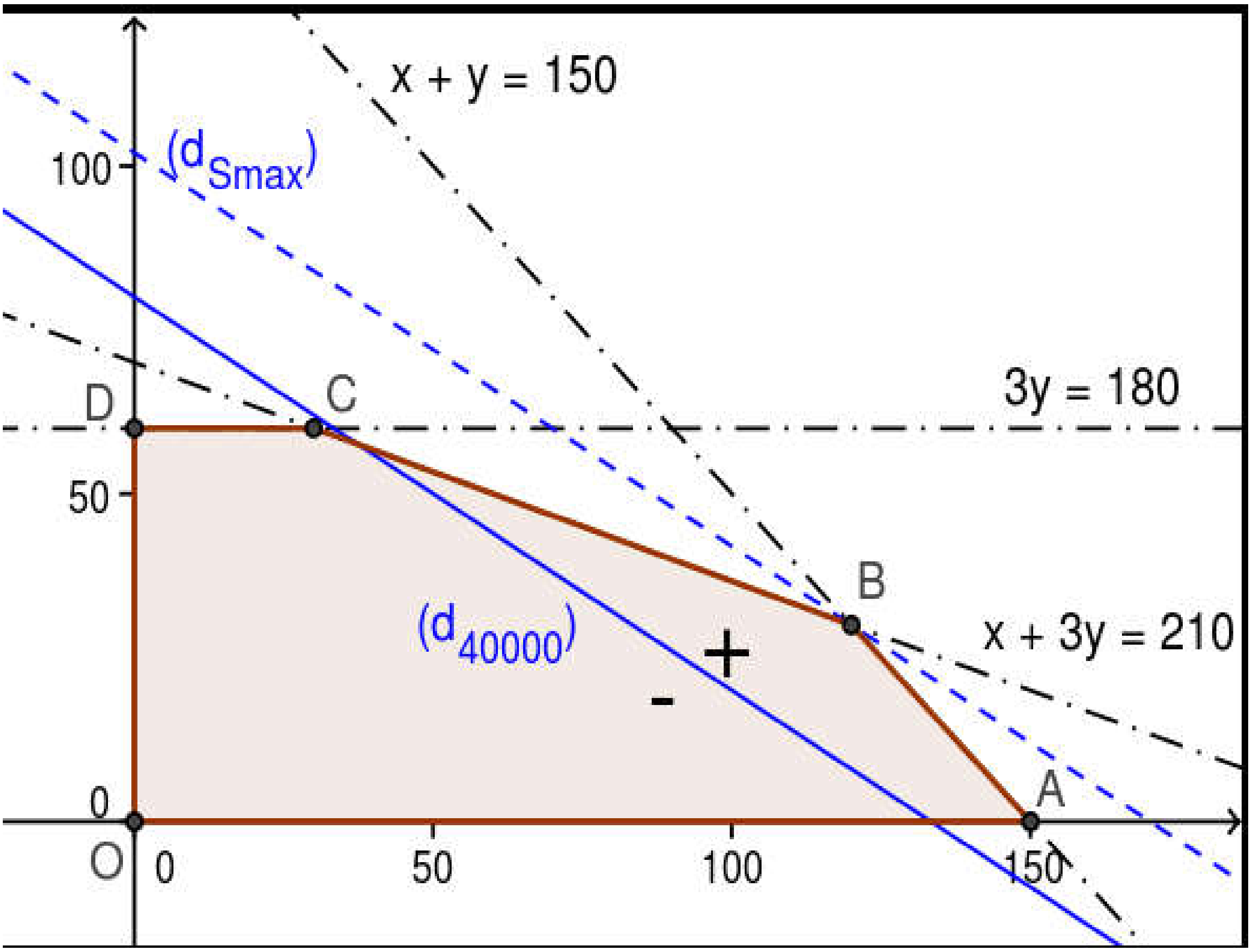
$$\begin{cases} x+y \leq 150 \\ x+3y \leq 210 \\ 3y \leq 180 \\ x \geq 0 ; y \geq 0 \end{cases}$$

Chacune de ces contraintes définit un demi-plan auquel M doit appartenir. L'intersection de ces demi-plans dessine un polygone convexe (OABCD) appelé ensemble admissible.Sur cet ensemble admissible, on définit la fonction revenu net :

$$Z=300x+500y.$$

Que l'on cherche à rendre maximale.

Alors le problème est de maximiser la fonction $Z=300x+500y$



Problème 2 : Un problème de restauration :

Un restaurateur peut offrir deux types de plats indifféremment. Des assiettes à 80 DA, contenant 05 sardines, 2 merlans et 01 rouget. Des assiettes à 120 DA, contenant 03 sardines, 03 merlans et 03 rougets. Il dispose de 30 sardines, 24 merlans et 18 rougets. Comment doit-il disposer pour réaliser la recette maximale ?

Réponse 2 :

Soit x et y respectivement le nombre d'assiettes de type 1 et du type 2 à offrir. Le problème est de maximiser la fonction $80x+120y$ sous les contraintes :

$$\begin{cases} 5x+3y\leq 30 \\ 2x+3y\leq 24 \\ x+3y\leq 18 \\ x\geq 0 ; y\geq 0 \end{cases}$$

Problème 3 :

Le jardinier K. Roth dispose d'une surface de 90 m^2 dans le potager du château pour y cultiver ses propres légumes qu'il vend dans leur totalité au marché du village.
Il a décidé cette année de ne planter sur ce lopin de terre que des oignons et des poireaux dont les plants sont produits par ses soins.
Pour planter les oignons, il a le choix entre deux variétés. Dans le cas des oignons d'hiver, il les plante profondément et accorde à chaque plant une superficie au sol de 2dm^2 ; dans le cas des oignons d'été, il les plante en surface en leur laissant une superficie de 4dm^2. Les oignons plantés en profondeur ont un taux de survie de 81% et se vendent 0,25€/pièce tandis que les autres sont 90% à survivre et se vendent 0,19€/pièce.
Il peut également planter des poireaux : soit d'été, soit d'hiver. Les poireaux d'hiver ont un taux de survie de 84% et ceux d'été de 75%. La botte de 5 poireaux d'hiver se vend 2,4€ tandis que la botte de 10 poireaux d'été se vend 1,82€.
Un poireau d'hiver occupe 0,6dm^2 contre 0,3dm^2 pour un poireau d'été.
Pour être présent sur le marché toutes les semaines sans interruption, il faut qu'un tiers de la production (en nombre de pièces produites) soit assuré tant pour l'hiver que pour l'été. Il faut également que le nombre de bottes de poireaux produites n'excède pas la moitié du nombre d'oignons produits.
K. Roth dispose de suffisamment de plants de chaque type de légume pour occuper sa partie de potager.
Quel est l'assortiment de plants qui maximisera les recettes de jardinier sur le marché du village au cours de l'année à venir ?

Formulez le problème comme un programme linéaire.

Réponse 3 :

(N.B. Après un rapide survol des copies, 4 formulations alternatives différentes acceptables ont été proposées par les étudiants lors de l'examen, celle qui suit est la plus proche littéralement de l'énoncé, mais il en est de plus compactes.)

Variables de décision :

$XOH, XOE, XPH, XPE \geq 0$ représentent respectivement le nombre de plants d'oignons d'hiver, d'oignons d'été, de poireaux d'hiver et de poireaux d'été qui seront plantés par K. Roth.

Objectif :
MAX Z, avec Z, les recettes totales exprimées en € perçues par K. Roth sur le marché du village au cours de l'année prochaine. Il ne peut évidemment vendre que les plants arrivés à maturité qui ont survécu.

$$Z = (0{,}25.0{,}81)XOH + (0{,}19.0{,}9)XOE + (0{,}48.0{,}84)XPH + (0{,}182.0{,}75)XPE$$

Contraintes :

Occupation du sol :

$$2XOH + 4XOE + 0{,}6XPH + 0{,}3XPE \leq 9000 \text{ dm}^2$$

3 contraintes de gamme :

Sur la production d'été :

$0,9XOE + 0,75XPE \geq 1/3(0,81XOH + 0,9XOE + 0,84XPH + 0,75XPE)$

ou

$0,27\ XOH - 0,6\ XOE + 0,28\ XPH - 0,5\ XPE \leq 0$

Sur la production d'hiver :

$0,81XOH + 0,84XPH \geq 1/3(0,81XOH + 0,9XOE + 0,84XPH + 0,75XPE)$

ou

$-\ 0,54\ XOH + 0,3\ XOE - 0,56\ XPH + 0,25\ XPE \leq 0$

Générale entre oignons et poireaux :

$\frac{1}{2}.(0,81XOH + 0,9XOE) \geq 0,84/5\ XPH + 0,75/10XPE$

ou

$-0,405XOH - 0,45XOE + 0,168XPH + 0,075\ XPE \leq 0$

Le programme linéaire : (résumé)

MAX Z

$Z = 0,2025XOH + 0,171XOE + 0,4082XPH + 0,1365XPE$

s.c.q.

$2XOH + 4XOE + 0,6XPH + 0,3XPE \leq 9000$

$0,27\ XOH - 0,6\ XOE + 0,28\ XPH - 0,5\ XPE \leq 0$

$-\ 0,54\ XOH + 0,3\ XOE - 0,56\ XPH + 0,25\ XPE \leq 0$

$-\ 0,405XOH - 0,45XOE + 0,168XPH + 0,075\ XPE \leq 0$

Problème 4 : Un problème de Production de pièces :

Une usine possède trois tours, qui au cours d'un mois, peuvent être utilisléspendant les temps indiqués dans le tableau ci-dessous. Quatre pièces peuvent êtreusinées sur ces machines. Les quantités de chaque pièce à fabriquer au cours de la moisson fixées de façon impérative et sont indiquées dans le tableau. Le temps d'usinageen heures par pièce figurentégalement.

Ecrire un programme linéaire pour réduire au minimum l'utilisation des machines. Quel sera le programme d'affectation de diverses fabrications aux diverses machines.

Tours	**Temps d'usinage (heures par pièces)**				**Heures de disponibilité des machines (Tours)**
	Pièce1	**Pièce2**	**Pièce3**	**Pièce4**	
Machine A	**3**	**3**	**2**	**5**	**80**
Machine B	**4**	**1**	**1**	**2**	**30**
Machine C	**2**	**2**	**3**	**1**	**130**
Productions exigées (nombre au moins de pièces)	**10**	**40**	**50**	**20**	

Réponse 4 :

Soit x_{ij} le nombre de pièces i à fabriquer sur la machine j .On aura 12 variables.

Le problème s'écrit :

$$\text{Min } Z = 3x_{11} + 3x_{21} + 2x_{31} + 5x_{41} + 4x_{12} + x_{22} + x_{32} + 2x_{42} + 2x_{13} + 2x_{23} + 3x_{33} + x_{43}$$

Sous les contraintes :

$$\begin{cases} 3x_{11} + 3x_{21} + 2x_{31} + 5x_{41} \le 80 \\ 4x_{12} + x_{22} + x_{32} + 2x_{42} \le 30 \\ 2x_{13} + 2x_{23} + 3x_{33} + x_{43} \le 130 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 10 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 40 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 50 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} = 20 \\ x_{ij} \ge 0 ; i = \overline{1,4} ; j = \overline{1,3} \end{cases}$$

Problème 5 : Programme de de raffinerie

Une raffinerie peut traiter trois pétroles bruts appelés brut_1, brut_2 et brut_3 originaires de trois pays différents.Par distillation fractionnéedans les « toppings », ces pétroles bruts donnent des coupes qui sont des ensemblesd'hydrocarbures ayant des températures d'ébullition comprises entre des limitesfixées.Un « topping » permet d'obtenir : des gaz et gaz liquéfiés

Une gazoline ou coupe 0-80°c (hydrocarbures dont le point d'ébullition est compris

entre 0 et 80°c)

Une benzine ou coupe 80-130°c

Un naphta léger ou coupe 130-160°c

Un naphta lourd ou coupe 160-190°c

Un kérosène ou coupe 190-230°c

Un gasoil léger ou coupe 230-310°c

Un gasoil lourd ou coup 310-400°c

Un fuel-oil ou coupe > 400°c

Ces coupes subissent ensuite des traitements complémentaires (épuration, désulfuration, cracking, reforming catalytique) pour devenir des bases qui, convenablement mélangées, permettront d'obtenir les produits commerciaux désirés.

La raffinerie considérée fabrique cinq catégories de produits finis : des gaz et gaz liquéfiés, des essences, du pétrole, du gasoil et du fuel-oil. Les rendements des pétroles bruts traités sont précisés par le tableau ci-après (qui explicite les quantités produites à partir de 100 tonnes de brut) :

Matière première Production	**Brut_1 (tonnes)**	**Brut_1 (tonnes)**	**Brut_1 (tonnes)**
Gaz et gaz liquéfiés	**2**	**0**	**6**
Essences	**20**	**25**	**30**
Pétroles	**8**	**0**	**4**
Gasoil	**40**	**25**	**30**
Fuel-oil	**30**	**50**	**30**
Total	**100**	**100**	**100**

La raffinerie peut produire au maximum, au cours d'une année : 300 000 tonnes de gaz et gaz liquéfiés, 1 050 000 tonnes t d'essences, 180 000 tonnesde pétrole, 1 350 000 tonnes de gasoil et 1 800 000 tonnes de fuel-oil. Elle réalise un bénéfice de 4000 DA par tonne de brut_1 mise en œuvre, 5000 DA partonne de brut_2 et 6000 DA par tonne de brut_3 mise en œuvre. Quelle quantité dechacun des bruts devra-t-elle traiter pour réaliser le bénéfice total maximal ? Ecrirele programme correspondant.

Réponse 5 :

Appelons respectivement x_1 , x_2 et x_3 les quantités de brut, en en millions de tonnes, traitées annuellement par la raffinerie. Le tableau des rendements ci-dessusmontre que la production de gaz et gaz liquéfiés correspondant à 1 million de tonnesde pétrole brut atteint :

0.02 million de tonnes quand on traite du brut n°1

0.06 million de tonnes quand on traite du brut n°3

Comme la fabrication de cette catégorie de produit est limitée à 300 000 tonnes, soit0.3 million de tonnes,la contrainte correspondante s'écrit :

$$0.02x_1 + 0.06x_3 \leq 0.3$$

Soit encore : $x_1 + 3x_3 \leq 15$

On obtient de même, pour la limitation de production d'essences :

$$0.20x_1 + 0.25x_2 + 0.30x_3 \leq 1.05$$

Soit encore : $4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 21$

Pour la limitation de production de pétrole : $0.08x_1 + 0.04x_3 \leq 0.18$

Soit encore : $4x_1 + 2x_3 \leq 9$

Pour la limitation de production de gasoil :

$$0.4x_1 + 0.25x_2 + 0.30x_3 \leq 1.35$$

Soit encore : $8x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 27$

Pour la limitation de production de fuel-oil :

$$0.3x_1 + 0.5x_2 + 0.3x_3 \leq 1.8$$

Soit encore : $3x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 18$

Le problème est de maximiser le bénéfice en millions de DA, qui s'écrit :

$$\text{Max}\, Z = 40x_1 + 50x_2 + 60x_3$$

Sous les contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 \leq 15 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 21 \\ 4x_1 + 2x_3 \leq 9 \\ 8x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 27 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 18 \\ x_1 ; x_2 ; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Problème 6 : Un problème de Transport:

Une entreprise possède trois usines situées respectivement à Boufarik, Blida et Médéa. Elle importe un métal, du cuivre, non disponible sur le marché interne qui lui est acheminé vers deux ports celui d'Alger et d'Oran.Les quantités de cuivrenécessaires aux usines respectives sont de 400, 500 et 600 tonnes tandis que lesquantités disponibles sont de 500 et 300 tonnes par semaine respectivement à Algeret Oran. Les coûts unitaires de transport en dinars sont donnés par le tableau suivant:

	Boufarik	Blida	Médéa
Alger	**500**	**600**	**700**
Oran	**1000**	**900**	**800**

L'unité étant la tonne de cuivre à transporter. Ecrire le programmelinéaire associé à un plan de transport à coût minimale.

Réponse 6 :

Soit x_{ij} le nombre de tonnes de métal qui sont acheminés chaque semaine depuis le port i vers l'usine j (i = 1, 2 et j = 1, 2, 3). Le programme s'écrit :

$$\text{Min } Z = 500x_{11} + 600x_{12} + 700x_{13} + 1000x_{21} + 900x_{22} + 800x_{23}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} \geq 400 \\ x_{12} + x_{22} \geq 500 \\ x_{13} + x_{23} \geq 600 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 500 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 300 \\ x_{ij} \geq 0 : (i = 1, 2 \; ; \; j = 1, 2, 3) \end{cases}$$

Problème 7 : Autre problème de Transport:

Une compagnie a besoin d'espace additionnel pour entreposer ses marchandises. Elle planifie la location d'espace pour les cinq prochains mois, sachant que l'espace additionnel requis pour chacun de ces mois est connu avec certitude, tel quereprésenté par le tableau suivant :

Mois	Espace additionnel requis (m2)
1	**30000**
2	**20000**
3	**40000**
4	**10000**

5	**50000**

Plusieurs options s'offrent à la compagnie : elle peut louer de l'espace un mois à la fois, mais aussi pour des périodes de deux mois ou plus. Les coûts de location correspondants sont donnés par le tableau suivant :

Période de location (mois)	**Coût de location ($/m²)**
1	**65**
2	**100**
3	**135**
4	**160**
5	**190**

L'objectif de la compagnie est de minimiser le coût total de location, tout en s'assurant que l'espace additionnel requis soit loué.

Comment Formulez ce problème à l'aide d'un modèle de programmation linéaire ?

Réponse 7 :

Variables:

Soit x_{ij} quantité d'espace loué pour une durée de j mois à compter du mois i mois (m²).

Objectif: minimiser le coût total de location (en dollars).

Le problème s'écrit :

$$MinZ = 65(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51})+100(x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42})$$
$$+135(x_{13}+x_{23}+x_{33})+160(x_{14}+x_{24})+190x_{15}$$

Sous les contraintes :

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15} \geq 30000 \\ x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} \geq 20000 \\ x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{31}+x_{32}+x_{33} \geq 40000 \\ x_{14}+x_{15}+x_{23}+x_{24}+x_{32}+x_{33}+x_{41}+x_{42} \geq 10000 \\ x_{15}+x_{24}+x_{33}+x_{42}+x_{51} \geq 50000 \\ x_{ij} \geq 0; i=\overline{1,5}; j=\overline{1,6-i} \end{cases}$$

Problème 8 : Un problème de Préparation de Gâteaux :

Un boulanger a la possibilité de faire 3 types de gâteaux G_1, G_2et G_3. Il utilise à cet effet de la farine (E_1), du beurre(E_2), des œufs(E_3), du sucre (E_4) et de la levure (E_5). Les quantités a_{ij} de l'élément$E_i$intervenant dans l'élaboration du gâteau$G_j$sont données dans le tableau ci-dessous :

	G_1	G_2	G_3
E_1	1	1	2
E_2	1	2	1
E_3	2	1	1
E_4	1	2	0
E_5	1	2	2

Le boulanger dispose de 20 unités de E_1, 10 de E_2, 20 de E_3, 20 de E_4et 10 deE_5.Les bénéfices unitaires valent respectivement 2 pour G_1, 5 pour G_2 et 7 pour G_3.

Ecrire le programme linéaire qui détermine le nombre de gâteaux à confectionner defaçon à maximiser le bénéfice total.

Réponse 8 :

Si on note x_i le nombre de gâteaux de type G_i, i= 1, 2, 3.

Le problème s'écrit : Max $Z=2x_1+5x_2+7x_3$ sous les contraintes :

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10 \\
2x_1 + x_2 + x_3 \leq 20 \\
x_1 + 2x_2 \leq 20 \\
x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 10 \\
x_1 ; x_2 ; x_3 \geq 0
\end{cases}
$$

Problème 9. Problème du flot de coût minimum:

Définition :

Le problème du flot de coût minimum est un problème algorithmique de théorie des graphes, qui consiste à trouver la manière la plus économe d'utiliser un réseau de transport tout en satisfaisant les contraintes de production et de demande des nœuds du réseau. Il permet de modéliser tout un ensemble de problèmes pratiques dans lesquels il s'agit de trouver une manière optimale d'acheminer une ressource (e.g. un fluide, de l'électricité) d'un ensemble de sources à un ensemble de puits.

Le problème du flot de coût minimum est fondamental dans la mesure où la plupart des autres problèmes de flots, comme par exemple le problème de flot maximum, peuvent en être vus comme des cas particuliers. De plus, il est possible de résoudre le problème dans certains cas de manière efficace en utilisant l'algorithme du simplexe pour les réseaux.

Données : Soit $G = (N, A)$ un graphe orienté avec

- b_i : offre / demande au noeud $i \in N$
  - $b_i > 0$: i est un noeud source (offre)
  - $b_i < 0$: i est un noeud puits (demande)
  - $b_i = 0$: i est un noeud de transit
- u_{ij}: capacité de l'arc $(i, j) \in A$
- c_{ij} : coût unitaire pour pousser du flot sur l'arc $(i, j) \in A$

Problème :
Établir un flot de coût minimal qui satisfasse à toutes les demandes aux noeuds puits à partir des approvisionnements aux noeuds sources, tout en respectant les capacités des arcs.

$$\text{minimiser } z(x) = \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

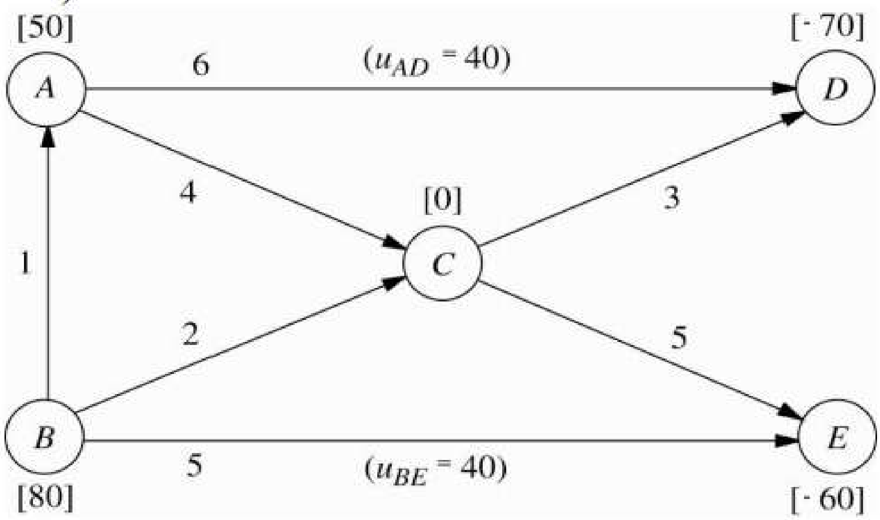
$$\sum_{(i,j)\in\delta^+(i)} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in\delta^-(i)} x_{ji} = b_i \quad \forall i \in N$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i,j) \in A$$

Le Problème:

Considérez le graphe orienté suivant, pour lequel :

- sur chaque arc *(i,j)* la valeur correspond au coût unitaire c_{ij};
- la valeur entre parenthèses sur deux des arcs, (A,D) et (B,E), correspond à la capacité u_{ij} (les autres arcs sont à capacité infinie);
- la valeur en chaque sommet i correspond à b_i (> 0, s'il s'agit d'un sommet d'offre; < 0, s'il s'agit d'un sommet de demande; = 0, s'il s'agit d'un sommet de transfert).



Formulez à l'aide d'un modèle de programmation linéaire le problème de flot à coût minimum correspondant.

La réponse 9 :

Voici le modèle de programmation linéaire pour ce problème de flot à coût minimum :

$$\min Z = 4x_{AC} + 6x_{AD} + x_{BA} + 2x_{BC} + 5x_{BE} + 3x_{CD} + 5x_{CE}$$

$$\begin{array}{llllllll}
+x_{AC} & +x_{AD} & -x_{BA} & & & & & =50 \\
& & +x_{BA} & +x_{BC} & +x_{BE} & & & =80 \\
-x_{AC} & & & -x_{BC} & & +x_{CD} & +x_{CE} & =0 \\
& -x_{AD} & & & & -x_{CD} & & =-70 \\
& & & & -x_{BE} & & -x_{CE} & =-60
\end{array}$$

$$x_{AD} \leq 40, x_{BE} \leq 40$$

$$x_{AC} \geq 0, x_{AD} \geq 0, x_{BA} \geq 0, x_{BC} \geq 0, x_{BE} \geq 0, x_{CD} \geq 0, x_{CE} \geq 0$$