UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI – OUM EL BOUAGHI
Département M.I
3ème Année Licence Maths(S5)
Module : Analyse Hilbertienne

Série 01

Exercice1:

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *on pose* $N(x,y) = max\{|x|,|y|,|x-y|\}$. *Montrer que N est une norme sur* $\mathbb{R}^2$. *Dessiner la boule unité associée.*

Exercice2:

Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$. *On définie pour* $f \in E$ *:*

$$N_1(f) = \int_0^1 x|f(x)|dx \ , \ N_2(f) = \left(\int_0^1 x|f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

- Montrer que N_1 *et* N_2 *définissent des normes sur E.*

- Montrer que pour $f \in E$ *:* $N_1(f) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} N_2(f)$.

- Montrer que N_1 *et* N_2 *ne sont pas équivalentes :*

Utiliser la suite : (f_n) *telle que :* $f_n(x) = \begin{cases} n - n^2 x & si\ x \in \left[0,\frac{1}{n}\right] \\ 0 & si\ x \in \left[\frac{1}{n},1\right] \end{cases}$.

Exercice3:

On note $E = C^2([0,1],\mathbb{R})$.*et* N_∞ , $N_\infty^{'}$, $N_\infty^{''}$ *les applications de E dans* $\mathbb{R}$ *définies, pour toute* $f \in E$ *par :* $N_\infty(f) = \sup\limits_{[0,1]}|f|$, $N_\infty^{'}(f) = |f(0)| + \sup\limits_{[0,1]}|f'|$,

$N_\infty^{''}(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \sup\limits_{[0,1]}|f''|$.

- *Montrer que* N_∞ , $N_\infty^{'}$ *et* $N_\infty^{''}$ *sont des normes sur E.*
- *Comparer les normes* N_∞ , $N_\infty^{'}$ *et* $N_\infty^{''}$.

Exercice4:

Soit $= \{f: [0,1] \to \mathbb{R} \ / \ f\ est\ C^1\ et\ f(0) = 0\}$, $N_0 = \sup\limits_{[0,1]}|f|$ *et* $N_1 = \sup\limits_{[0,1]}|f'|$.

- Montrer que N_0 *et* N_1 *sont des normes sur E.*
- Montrer que l'identité de (E, N_1) *dans* (E, N_0) *est continue.*
- Montrer que l'identité de (E, N_0) *dans* (E, N_1) *n'est pas continue en « 0 »*
(utiliser la suite : $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$, $n > 0$, $x \in \mathbb{R}$ *).*

Exercice5:

Soit V l'espace des fonctions à valeurs complexes, dénies et continues sur l'intervalle $[0;\ 1]$.

- *Montrer que si f appartient à V, l'application :* $f \mapsto \int_0^1 |f(x)|\,dx$ *est une norme sur V.*
- *On considère la suite de fonctions* $(f_n)_{n\geq 1}$ *telles que* $f_n(x) = \begin{cases} n & si\ \ 0 \leq x \leq \frac{1}{n^2}, \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & si\ \ \frac{1}{n^2} \leq x \leq 1 \ . \end{cases}$

  La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ *est-elle une suite de Cauchy? L'espace V est-il complet?*

Exercice6:

Soit $(E, \|.\|)$ *un evn , on considère l'application* $f: E \to E$, $x \mapsto f(x) = \frac{x}{1+\|x\|^2}$.

Montrer que : 1. *f est continue sur E.* 2. $f(E) = B'\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$.