Introduction :

Les espaces vectoriels normés (evn) sont des espaces métriques particuliers mais d'une importance capitale en analyse. Ainsi, le calcul différentiel a pour théatre les espaces de Banach qui sont des evn particuliers. D'autre part, beaucoup de résultats d'analyse fonctionnelle ont comme terrain d'appuis les espaces Hilbertiens, qui sont eux aussi des evn.

Par ailleurs, un résultat propre, aux evn qui sont de dimension finie : l'équivalence des normes, a pour conséquence que tout les evn de même dimension (sur um même corps de base) sont homéomorphes. Il suffira de connaître alors les propriétés topologiques de $\mathbb{K}^n$ *, où K désigne le corps de base de notre espace vectoriel E et n sa dimension, pour tout savoir de la topologie de E.*

Ce chapitre est principalement extrait du document de références de D. Diderot.

Bon Travail

1 Espaces vectoriels normés

1.1 Définitions

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Définition 1 *Une application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une* **norme** *ssi*

1. $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ *(*homogénéité*)*
2. $\forall x, y \in E$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ *(*inégalité triangulaire*)*
3. $\forall x \in E$, $N(x) \geq 0$ *(*positivité*)*
4. $\forall x \in E$, $N(x) = 0 \iff x = 0$ *(*définie*).*

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé **espace vectoriel normé** *(en abrégé : « EVN »).*

Exemples :
a) L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}$ muni de l'application « valeur absolue » $x \longmapsto |x|$.
b) L'espace vectoriel $E = \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ muni de l'application « module » $x \longmapsto |x|$.
c) Tout espace vectoriel euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ muni de la norme $N(x) = ||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est un EVN.
d) Pour tout $a, b \in R$ avec $a < b$, l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^\infty([a, b])$ muni de la norme :

$$||f||_\infty := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|, \quad ||f||_2 := \sqrt{\int_a^b f(x)^2 \, dx}$$

ou encore de la norme :

$$||f||_1 := \int_a^b |f(x)| \, dx$$

est un espace vectoriel normé.

1.2 Les normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on note :

$$\begin{aligned} ||x||_1 &:= |x_1| + \cdots + |x_n| \\ ||x||_2 &:= \sqrt{(x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2} \\ ||x||_\infty &:= \max(|x_1|, \cdots, |x_n|). \end{aligned}$$

Exercice — Vérifier que $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ et $||\cdot||_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 2 *Soit E un espace vectoriel réel. Deux normes N_1 et N_2 sur E sont dites* **équivalentes** *ssi $\exists c, C > 0$ telle que*

$$\forall x \in E, \quad cN_1(x) \leq N_2(x) \leq CN_1(x).$$

Proposition 1 *La relation définie précédemment entre les normes sur un espace vectoriel est une relation d'équivalence.*

+

Démonstration — Exercice.

Proposition 2 *Sur $\mathbb{R}^n$ les trois normes $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ et $||\cdot||_\infty$ sont équivalentes.*

Démonstration — On va démontrer que $\forall x \in E$,

$$||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq ||x||_1 \leq n||x||_\infty. \tag{1}$$

1. $$\begin{aligned} ||x||_\infty &= \max(|x_1|, \cdots, |x_n|) \\ &= |x_j| \quad (\text{où } j \text{ est tel que } |x_j| = ||x||_\infty) \\ &\leq \sqrt{(x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2} = ||x||_2. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} ||x||_2^2 &= (x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2 \\ &\leq |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} |x_i||x_j| \\ &= (|x_1| + \cdots + |x_n|)^2 = ||x||_1^2. \end{aligned}$$

   Donc $||x||_2 \leq ||x||_1$

3. $$\begin{aligned} ||x||_1 &= = |x_1| + \cdots + |x_n| \\ &\leq n\max(|x_1|, \cdots, |x_n|) \\ &= n||x||_\infty. \end{aligned}$$

Définition 3 *Si (E, N) est un espace vectoriel normé, alors l'application*

$$\begin{aligned} d: \ E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto N(x - y) \end{aligned}$$

est appelée la **distance associée à** *N.*

Proposition 3 *On a $\forall x, y, z, a \in E$,*

1. *$d(x, y) = d(y, x)$*
2. *$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire)*
3. *$d(x, x) = 0$ et $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$*
4. *$d(x + a, y + a) = d(x, y)$ (invariance par translation)*

Démonstration — Exercice.

Définition 4 *Soit (E, N) un espace vectoriel normé, $a \in E$ et $r \in [0, +\infty[$.*

1. *La* **boule ouverte** *de centre a et de rayon r est :*

   $$B(a, r) := \{x \in E | \ d(x, a) < r\}$$

   (remarque : $B(a, 0) = \emptyset$)

2. *La* **boule fermée** *de centre a et de rayon r est :*

   $$\overline{B}(a, r) := \{x \in E | \ d(x, a) \leq r\}$$

   (remarque : $\overline{B}(a, 0) = \{a\}$).

Remarque — Pour tout sous-ensemble B de E et pour tout $a \in E$ on note $a+B := \{a+x \mid x \in B\}$. Alors on a $B(a,r) = a + B(0,r)$ et $\overline{B}(a,r) = a + \overline{B}(0,r)$. De plus on a toujours $B(a,r) \subset \overline{B}(a,r)$.

Exemples de boules : (i) dans $\mathbb{R}$, on a :

$$B(a,r) =]a-r, a+r[\quad \text{et} \quad \overline{B}(a,r) = [a-r, a+r].$$

(ii) Dans $\mathbb{R}^n$, comme $||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq ||x||_1 \leq n||x||_\infty$, on a :

$$B_\infty\left(a, \frac{r}{n}\right) \subset B_1(a,r) \subset B_2(a,r) \subset B_\infty(a,r)$$

(et les inclusions similaire pour les boules fermées), voir la figure.

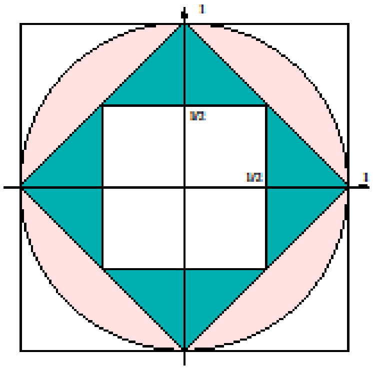

FIG. 1 – Les boules $B_\infty\left(0, \frac{1}{2}\right) \subset B_1(0,1) \subset B_2(0,1) \subset B_\infty(0,1)$ dans $\mathbb{R}^2$

1.3 Limites

On se place dans un EVN (E, N).

Définition 5 *Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans E et $\ell \in E$. On dit que* **la suite u_k converge vers ℓ pour la norme N** *ssi*

$$\lim_{k\to+\infty} N(u_k - \ell) = 0.$$

Proposition 4 *Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites de E qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ' pour la norme N, alors, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la suite $\lambda u_k + \mu u'_k$ converge vers $\lambda\ell + \mu\ell'$.*

Démonstration : Exercice.

Exemples a) Dans $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2)$ une suite $u_k = (u_{k,1}, \cdots, u_{k,n})$ converge vers $\ell = (\ell_1, \cdots, \ell_n)$ ssi

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt{(u_{k,1} - \ell_1)^2 + \cdots + (u_{k,n} - \ell_n)^2} = 0.$$

b) (Exemple important pour la suite !) Dans $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)$ une suite $u_k = (u_{k,1}, \cdots, u_{k,n})$ converge vers $\ell = (\ell_1, \cdots, \ell_n)$ ssi

$$\begin{array}{lll}
\multicolumn{3}{l}{\lim_{k\to+\infty} \sup_{1\leq i\leq n} |u_{k,i} - \ell_i| = 0} \\
\iff & \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall k \in \mathbb{N}, & k \geq N \implies \sup_{1\leq i\leq n} |u_{k,i} - \ell_i| < \varepsilon \\
\iff & \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall k \in \mathbb{N}, & k \geq N \implies \forall i \in [\![1,n]\!], |u_{k,i} - \ell_i| < \varepsilon \\
\iff & \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall i \in [\![1,n]\!], \forall k \in \mathbb{N}, & k \geq N \implies |u_{k,i} - \ell_i| < \varepsilon
\end{array}$$

Donc on a en particulier $\lim_{k\to+\infty} u_{k,i} = \ell_i$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$. Réciproquement, si chaque composante $(u_{k,i})_{k\in\mathbb{N}}$ de la suite converge vers ℓ_i dans $\mathbb{R}$, alors on a, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_i > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \quad k \geq N_i \implies |u_{k,i} - \ell_i| < \varepsilon$$

et en posant $N := \max(N_1, \cdots, N_n)$, on a alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in [\![1,n]\!], \quad k \geq N \geq N_i \implies |u_{k,i} - \ell_i| < \varepsilon;$$

c'est à dire $u_k \to \ell$ dans $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)$. Nous en déduisons ce qui suit.

Lemme 1 *Une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}^n$ pour $||\cdot||_\infty$ ssi chaque composante $(u_{k,i})_{k\in\mathbb{N}}$ de la suite converge vers ℓ_i dans $\mathbb{R}$.*

Théorème 1 *Soit E un espace vectoriel et N_1 et N_2 deux normes sur E. Alors si N_1 et N_2 sont équivalentes, pour toute suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de E et pour tout $\ell \in E$,*

$$\left[\lim_{k\to+\infty} u_k = \ell \quad \textit{pour } N_1\right] \iff \left[\lim_{k\to+\infty} u_k = \ell \quad \textit{pour } N_2\right].$$

Démonstration — Montrons que, si $u_k \longrightarrow \ell$ pour N_1 alors $u_k \longrightarrow \ell$ pour N_2 (la preuve dans l'autre sens est identique). Puisque N_1 et N_2 sont équivalentes, en particulier : $\exists C > 0$,

$$\forall x \in E, \quad N_2(x) \leq C N_1(x). \tag{2}$$

Or la convergence $u_k \longrightarrow \ell$ pour N_1 signifie que :

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists N > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \quad k \geq N \implies N_1(u_k - \ell) \leq \varepsilon'. \tag{3}$$

Nous en déduisons la convergence pour N_2 : $\forall \varepsilon > 0$, soit $\varepsilon' := \varepsilon/C$ et appliquons d'abord (3) :

$$\exists N > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \quad k \geq N \implies N_1(u_k - \ell) \leq \varepsilon',$$

qui entraîne par (2) que : $N_2(u_k - \ell) \leq C N_1(u_k - \ell) \leq C\varepsilon' = \varepsilon$. Donc $u_k \longrightarrow \ell$ pour N_2.

Corollaire 1 *Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^n$ et $\ell \in \mathbb{R}^n$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *u_k converge vers ℓ pour $||\cdot||_1$*
2. *u_k converge vers ℓ pour $||\cdot||_2$*
3. *u_k converge vers ℓ pour $||\cdot||_\infty$*
4. *$\forall i \in [\![1,n]\!]$, la suite $u_{k,i}$ converge vers ℓ_i dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration — On sait déjà, grâce au Lemme 1, que les propriétés 3. et 4. sont équivalentes. Quand à l'équivalence entre les trois premières propriétés, elle provient de la proposition 2 (les normes $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ et $||\cdot||_\infty$ sont équivalentes) et du théorème précédent.

1.4 Continuité

Soit (E, N) et (E', N') deux EVN. Soit A un sous-ensemble de E et $f : A \longrightarrow E'$ une application.

Définition 6 *Soit $x_0 \in A$, on dit que f* **est continue en** *x_0 ssi*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \quad N(x - x_0) < \alpha \implies N'(f(x) - f(x_0)) < \varepsilon.$$

Proposition 5 *Soit E et E' des espaces vectoriels réels, $A \subset E$, $x_0 \in A$ et $f : A \longrightarrow E'$ une application. Si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur E et si N_1' et N_2' sont deux normes équivalentes sur E', alors f est continue en x_0 pour les normes N_1 et N_1' ssi f est continue en x_0 pour les normes N_2 et N_2'.*

Démonstration — Exercice.

Exemples a) Si $u \in E'$, l'application constante de E vers E' qui, à tout $x \in E$ associe u, est continue.
b) Toute application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est continue pour la norme $||\cdot||_\infty$ en tout point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$: identifions $\mathbb{R}^2$ avec l'ensemble des matrices colonnes avec deux lignes et notons

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{array}$$

Nous commençons par établir des inégalités : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{array}{rcl} |ax + by| & \leq & |ax| + |by| \\ & \leq & |a|\max(|x|, |y|) + |b|\max(|x|, |y|) \\ & = & (|a| + |b|)\max(|x|, |y|) \\ & = & (|a| + |b|)||(x, y)||_\infty. \end{array}$$

Et on montre de même que $|cx + dy| \leq (|c| + |d|)||(x, y)||_\infty$. Donc

$$\begin{array}{rcl} ||f(x, y)||_\infty & = & \max(|ax + by|, |cx + dy|) \\ & \leq & \max(|a| + |b|, |c| + |d|)||(x, y)||_\infty. \end{array}$$

Et nous avons ainsi démontré que

$$||f(x, y)||_\infty \leq C||(x, y)||_\infty, \quad \text{où} \quad C := \max(|a| + |b|, |c| + |d|). \tag{4}$$

Donc, pour tout $(x_0, y_0) \in R^2$ et pour tout $\varepsilon > 0$, posons $\alpha := \varepsilon/C > 0$, alors si nous supposons que $||(x - x_0, y - y_0)||_\infty < \alpha$, cela entraîne (en utilisant (4)) que

$$||f(x, y) - f(x_0, y_0)||_\infty = ||f(x - x_0, y - y_0)||_\infty \leq C||(x - x_0, y - y_0)||_\infty < C\alpha = \varepsilon.$$

Donc f est bien continue de $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_\infty)$ dans $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_\infty)$ en (x_0, y_0).

Remarque — *La méthode utilisée ici est tout à fait représentative des techniques habituelles pour démontrer qu'une application est continue :* **on commence par démontrer une inégalité (qui est ici (4)), puis on en déduit la continuité.**

c) Applications linéaires entre espaces vectoriels normés

Proposition 6 *Soit (E, N) et (E', N') deux EVN et $f : E \longrightarrow E'$ une application linéaire. Alors, si f est continue en 0, elle continue sur tout E.*

Démonstration — La continuité en 0 signifie que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in E, \quad N(x) < \alpha \implies N'(f(x)) < \varepsilon.$$

Cela entraîne que, pour tout $x_0 \in E$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in E, \quad N(x - x_0) < \alpha \implies N'(f(x) - f(x_0)) = N'(f(x - x_0)) < \varepsilon,$$

donc que f est continue en x_0.

Avant de donner d'autres exemples, voyons quelques propriétés simples qui permettent de fabriquer de nouvelles applications continues en combinant des fonction continues.

Proposition 7 *Soit (E,N) et (E',N') deux EVN, $A \subset E$ et $f,g : A \longrightarrow E'$ deux applications. Soit $x_0 \in A$. Alors si f et g sont continues en x_0,*

1. *$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ est continue en x_0*
2. *si $\alpha : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue en x_0, alors $x \longmapsto \alpha(x) f(x)$ est continue en x_0.*

Démonstration — Exercice.

Proposition 8 *Soit (E,N), (E',N') et (E'',N'') trois EVN, $A \subset E$ et $B \subset E'$, $f : A \longrightarrow E'$ et $g : B \longrightarrow E''$ deux applications telles que $f(A) \subset B$[1]. Soit $x_0 \in A$. Si f est continue en x_0 et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.*

Démonstration — Exercice.

Applications à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

Proposition 9 *Soit (E,N) un EVN, $A \subset E$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application. Soit $x_0 \in A$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *$f : A \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ est continue en x_0*
2. *$f : A \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ est continue en x_0*
3. *$f : A \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est continue en x_0*
4. *toutes les composantes de $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sont continues en x_0.*

Démonstration — Cela est un corollaire de la proposition 2 et de la proposition 5.

Lien entre applications continues et suites

Théorème 2 *Soit (E,N) et (E',N') des espaces vectoriels normés, $A \subset E$ et $f : A \longrightarrow E'$ une application. Soit $x_0 \in A$. Alors*

1. *si f est continue en x_0, alors pour toute suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de A telle que $\lim_{k\to+\infty} u_k = x_0$ dans (E,N), on a :*
$$\lim_{k\to+\infty} f(u_k) = f(x_0) \quad \text{dans } (E',N').$$
2. *réciproquement si, pour toute suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de A telle que $\lim_{k\to+\infty} u_k = x_0$ dans (E,N), on a $\lim_{k\to+\infty} f(u_k) = f(x_0)$ dans (E',N'), alors f* **est continue en** *x_0.*

Démonstration — Montrons d'abord 1 : la continuité de f en x_0 signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \quad N(x - x_0) < \alpha \implies N'(f(x) - f(x_0)) < \varepsilon.$$

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers x_0, alors, pour le $\alpha > 0$ précédent, on peut trouver $N > 0$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k \geq N \implies N(u_k - x_0) < \alpha,$$

qui entraîne, en vertu de la continuité de f, que $N'(f(u_k) - f(x_0)) < \varepsilon$. Donc on a montré que $\lim_{k\to+\infty} u_k = x_0$ dans (E,N).
Pour montrer 2, c'est à dire la réciproque, on va prouver sa *contraposée*, à savoir que, si f n'est pas continue en x_0, alors il existe une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x_0, mais qui est telle que $(f(u_k))_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(x_0)$. Pour cela nous commençons par supposer que f n'est continue, ce qui s'écrit :

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in A, \text{ tel que } N(x - x_0) < \alpha \text{ et } N'(f(x) - f(x_0)) > \varepsilon_0. \tag{5}$$

[1] de sorte que l'application composée $g \circ f : A \longrightarrow E''$ existe

Nous utilisons (5) en particulier pour $\alpha = \frac{1}{1+k}$, où $k \in \mathbb{N}$: cela signifie qu'il existe une valeur $x \in A$, que nous noterons u_k, telle que $N(u_k - x_0) < \frac{1}{1+k}$ et $N'(f(u_k) - f(x_0)) > \varepsilon_0$. Alors la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ainsi construite converge vers x_0. Mais la suite $(f(u_k))_{k\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers $f(x_0)$ dans (E', N') puisqu'on a $N'(f(u_k) - f(x_0)) > \varepsilon_0$.

Suite de la liste d'exemples

d) Applications linéaires de $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)$ dans un espace vectoriel normé. Notons $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\exists!(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ et donc, en utilisant notament l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} N(f(x)) &= N(x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n)) \\ &\le |x_1| N(f(e_1)) + \cdots + |x_n| N(f(e_n)) \\ &\le \sup_{1\le i\le n} |x_i| \left(\sum_{i=1}^n N(f(e_i)) \right) \\ &= C\, ||x||_\infty, \quad \text{où } C := \sum_{i=1}^n N(f(e_i)). \end{aligned}$$

Donc f est continue en 0. En utilisant la proposition 6, on en déduit que f est continue en tout point de $\mathbb{R}^n$.

e) Polynômes sur $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)$ — On continue à noter $x_1, \cdots, x_n$ les coordonnées d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ dans la base canonique.

1. pour tout entier $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la fonction
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x_j^2 \end{array}$$
est le produit de la fonction linéaire $x \longmapsto x_j$ par elle-même. Donc en utilisant la proposition 7 (notament le point 2) on montre que f est continue sur $\mathbb{R}^n$. Plus généralement, en raisonnant par récurrence sur m et en utilisant le point de 2 de la proposition 7 on montre facilement que $f : x \longmapsto x_j^m$ est continue pour tout $m \in \mathbb{N}$.
2. plus généralement encore , on montre de la même façon et en utilisant la proposition 7, que $f : x \longmapsto x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$ est continue, pour tout $(m_1, \cdots, m_n) \in \mathbb{N}^n$.
3. en utilisant le point 1 de la proposition 7, on montre que n'importe quelle fonction polynômiale de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$, c'est à dire une fonction de la forme
$$x \longmapsto \sum_{(m_1,\cdots,m_n)\in\mathbb{N}^n} a_{m_1\cdots m_n} x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n},$$
où les coefficients $a_{m_1\cdots m_n}$ sont des constantes réelles toute nulles sauf pour $(m_1, \cdots, m_n) \in M$, où M est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}^n$.
4. si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est une fonction dont chaque composante est un polynôme, alors elle est continue de $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)$ dans $(\mathbb{R}^p, ||\cdot||_\infty)$.

f) Si P est un polynôme d'une variable complexe, alors

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & P(z) \end{array}$$

est continue. En effet, $\mathrm{Re}(P(z(z))$ et $\mathrm{Im}(P(z(z))$ sont des polynômes en (x, y), où $z = x + iy$.

g) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et } f(0,0) = 0.$$

Alors est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, mais **n'est pas continue en** 0. Prouvons d'abord la continuité de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Soit

$$\begin{array}{rcccccc} g: & \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 & \longmapsto & \frac{1}{x^2+y^2}. \end{array}$$

Cette fonction est la composée d'une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^2$ et de la fonction $t \longmapsto 1/t$ de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ vers $\mathbb{R}$. Or nous savons que $t \longmapsto 1/t$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Donc d'après la proposition 8, g est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Enfin, comme f est le produit de g par la fonction polynômiale $(x,y) \longmapsto 2xy$ (qui, elle, est continue sur $\mathbb{R}^2$), f est bien continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Voyons à présent pourquoi f n'est pas continue en 0. Raisonnons par l'absurde et supposons que f est continue en 0. Alors, en vertu du théorème 2, on devrait avoir : pour toute suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^2$ qui tend vers 0 (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$), la suite $(f(u_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(0)$. Prenons une suite de **réels non nuls** $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, choisissons une valeur $\theta \in \mathbb{R}$ et considérons la suite $u_k = (a_k \cos\theta, a_k \sin\theta)$. Alors $\lim_{k\to+\infty} u_k = 0$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f(u_k) = f(a_k\cos\theta, a_k\sin\theta) = \frac{2(a_k\cos\theta)(a_k\sin\theta)}{(a_k\cos\theta)^2 + (a_k\sin\theta)^2} = \frac{2a_k^2\cos\theta\sin\theta}{a_k^2} = \cos(2\theta).$$

Donc $\lim_{k\to+\infty} f(u_k) = \cos(2\theta)$. Cette valeur est différente de $f(0) = 0$ dès que $\cos(2\theta) \neq 0$. Donc f n'est pas continue en 0. On voit aussi sur cet exemple qu'il n'est pas possible de choisir une valeur de $f(0)$ pour faire en sorte que f soit continue en 0, car la limite de $(f(u_k))_{k\in\mathbb{N}}$ dépend du choix de θ.

Remarque — On comprend dans l'exemple précédent à quoi peut servir le théorème 2 (notament le point 1) : à démontrer qu'une application f n'est pas continue en un point x_0. Il suffit pour cela de trouver une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui tend vers x_0 mais telle que $\lim_{k\to+\infty} f(u_k) \neq f(x_0)$. De même on montre qu'il est impossible de prolonger de façon continue une fonction f en x_0 en trouvant deux suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui tendent toutes les deux vers x_0, mais telles que $\lim_{k\to+\infty} f(u_k) \neq \lim_{k\to+\infty} f(v_k)$.

h) Le produit matriciel Nous considérons l'espace vectoriel $M(n,\mathbb{R})$ des matrices carrées réelles à n lignes et n colonnes. Une norme possible sur $M(n,\mathbb{R})$ est donnée par

$$\forall A \in M(n,\mathbb{R}), \quad N(A) := n \sup_{i,j} |a_{ij}|.$$

On peut montrer que (exercice!) :

$$\forall A, B \in M(n,\mathbb{R}), \quad N(AB) \leq N(A)N(B).$$

On en déduit que l'application produit

$$\begin{array}{ccc} M(n,\mathbb{R}) \times M(n,\mathbb{R}) & \longrightarrow & M(n,\mathbb{R}) \\ (A,B) & \longmapsto & AB \end{array}$$

est continue (en utilisant sur $M(n,\mathbb{R}) \times M(n,\mathbb{R})$ la norme $N_1(A,B) := N(A) + N(B)$ ou bien la norme $N_\infty(A,B) := \sup(N(A), N(B))$).

i) Ultime exemple : la norme elle-même !
Si (E, N) est un espace vectoriel normé, l'application $N : (E, N) \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue. Pour voir cela, nous appliquons deux fois l'inégalité triangulaire : $\forall x, y \in E$,

$$\begin{array}{lll} N(y) = N(x + (y - x)) \leq N(x) + N(y - x) & \Longrightarrow & N(y) - N(x) \leq N(x - y) \\ N(x) = N(y + (x - y)) \leq N(y) + N(x - y) & \Longrightarrow & N(x) - N(y) \leq N(x - y) \end{array}$$

d'où l'on déduit que :

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y).$$

Et à partir de cette inégalité, il est facile de montrer que N est continue sur tout E (exercice : le vérifier).

Récapitulons les règles utilisées
pour enrichir la liste des fonctions continues

1. bien évidemment, toutes les fonctions continues d'un ouvert $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont des exemples de fonctions continues sur des sous-ensembles d'espace vectoriel de l'espace
2. la composée de fonctions continues est continue (pourvu que l'on soit dans le cadre des hypothèses de la proposition 8)
3. des combinaisons linéaires de fonctions continue sont continues (cf. proposition 7)
4. le produit d'une fonction continue à valeurs dans un espace vectoriel par une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ est continue (cf. proposition 7).

Exercice Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = e^x \log(1 + y^2)$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

1.5 Sous-ensembles ouverts et fermés

Soit (E, N) et (E', N') des espaces vectoriels normés, $A \subset E$ et $f : A \longrightarrow E'$. Soit $x_0 \in A$. Commençons par observer que la propriété de continuité de f en x_0 :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \quad [\forall x \in A, \quad N(x - x_0) < \alpha \implies N'(f(x) - f(x_0)) < \varepsilon]$$

peut se traduire en termes de « boules ouvertes » par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \quad [\forall x \in A, \quad x \in B(x_0, \alpha) \implies f(x) \in B'(f(x_0), \varepsilon)] ,$$

où $B(x_0, \alpha) := \{x \in E | \ N(x - x_0) < \alpha\}$ et $B'(y_0, \varepsilon) := \{y \in E' | \ N'(y - y_0) < \varepsilon\}$. On peut encore écrire cette même propriété :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \quad [f(A \cap B(x_0, \alpha)) \subset B'(f(x_0), \varepsilon)] ,$$

où, pour tout sous-ensemble $X \subset E$, on note $f(X) := \{f(x) | \ x \in X\}$. On peut enfin réécrire cela en « inversant » f :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \quad \left[A \cap B(x_0, \alpha) \subset f^{-1}\left(B'(f(x_0), \varepsilon)\right)\right] ,$$

où, pour tout sous-ensemble $Y \subset E'$, on note $f^{-1}(Y) := \{x \in A | \ f(x) \in Y\}$.

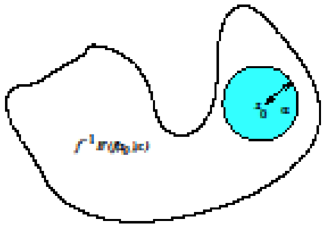

FIG. 2 – L'image inverse de $B'(f(x_0), \varepsilon)$ contient une boule $B(x_0, \alpha)$

Ainsi on peut exprimer la continuité de f en x_0 en disant : « *prenons n'importe quelle boule ouverte $B'(f(x_0), \varepsilon)$ dans E' centrée en $f(x_0)$ et considérons $f^{-1}(B'(f(x_0), \varepsilon))$, son image inverse par f. Alors cette image inverse contient bien évidemment x_0. Mais si (et seulement si), en plus, f est continue en x_0 alors on peut arriver à faire tenir une intersection $A \cap B(x_0, \alpha)$ à l'intérieur de $f^{-1}(B'(f(x_0), \varepsilon))$.* »

Ici le caractère prodigieux d'une fonction continue, qui est souligné dans le terme « arriver à faire tenir », est que la propriété décrite marche même si ε est très, très petit, car alors $f^{-1}(B'(f(x_0), \varepsilon))$ a des chances d'être lui aussi extrêmement petit, si bien qu'on pourrait craindre de ne plus avoir de place autour de x_0 à l'intérieur de $f^{-1}(B'(f(x_0), \varepsilon))$. Hé bien, si f est continue en x_0, il restera toujours un peu de place dans cet ensemble pour y loger une petite boule $A \cap B(x_0, \alpha)$!

Nous allons maintenant définir une notion propre à certains ensembles qui possèdent cette propriété géométrique : autour de chaque point contenu dans ce sous-ensemble, on peut loger une boule centrée en ce point à l'intérieur du sous-ensemble.

Définition 7 *Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Une partie $U \subset E$ est dite* **ouverte**, *ou est appelée un* **ouvert** *de (E, N) ssi $\forall x \in U$, $\exists r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$.*

Exemples a) L'intervalle $]a, b[\subset \mathbb{R}$ est ouvert, les intervalles $[a, b[$, $]a, b]$ et $[a, b]$ ne sont pas ouverts.
b) Pour tout espace vectoriel normé (E, N), pour tout $a \in E$ et pour $r > 0$, la boule ouverte $B(a, r)$ est un ouvert de (E, N).
c) Dans tout EVN (E, N), E et $\emptyset$ sont des sous-ensembles ouverts.

Proposition 10 *Soit (E, N) un espace vectoriel normé et U et V deux ouverts de E. Alors $U \cap V$ et $U \cup V$ sont ouverts.*

Démonstration – Exercice.

Théorème 3 *Soit (E, N) et (E', N') deux espaces vectoriels normés. Soit U un ouvert de (E, N) et $f : U \longrightarrow (E', N')$ une application. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *f est continue sur U*
2. *$\forall V$ ouvert de (E', N'), $f^{-1}(V)$ est un ouvert de (E, N).*

Démonstration — Montrons d'abord que 1 implique 2. Pour cela nous supposons que f est continue sur U, nous considérons un ouvert V de (E', N') et nous cherchons à montrer que $f^{-1}(V)$ est un ouvert de (E, N), c'est à dire à montrer que, pour tout $x_0 \in f^{-1}(V)$ on peut trouver une boule ouverte centrée en x_0 et contenue dans $f^{-1}(V)$. Voici comment nous faisons : comme V est ouvert et $f(x_0) \in V$, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $B'(f(x_0), \varepsilon) \subset V$. Et alors comme f est continue en x_0, $\exists \alpha > 0$ tel que

$$U \cap B(x_0, \alpha) \subset f^{-1}\left(B'(f(x_0), \varepsilon)\right) \subset f^{-1}(V).$$

Mais comme par ailleur U est ouvert, $\exists r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset U$. Donc

$$B(x_0, \inf(r, \alpha)) = B(x_0, r) \cap B(x_0, \alpha) \subset U \cap B(x_0, \alpha) \subset f^{-1}(V).$$

Cela prouve que $f^{-1}(V)$ est ouvert.
Démontrons maintenant que 2 entraîne 1. Pour cela nous supposons que f satisfait 2, nous choisissons $x_0 \in U$ et nous cherchons à montrer que f est continue en x_0. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque, alors $B'(f(x_0), \varepsilon)$ est un ouvert de (E', N'), donc, puisque nous avons supposé la propriété 2, $f^{-1}\left(B'(f(x_0), \varepsilon)\right)$ est un ouvert de (E, N). Exploitons cette dernière propriété avec le point $x_0 \in f^{-1}\left(B'(f(x_0), \varepsilon)\right)$: cela entraîne que $\exists \alpha > 0$ tel que $B(x_0, \alpha) \subset f^{-1}\left(B'(f(x_0), \varepsilon)\right)$. Nous avons ainsi montré la continuité de f en x_0.

Suite de la liste d'exemples d'ouverts : c) Soit E un espace vectoriel réel et N_1 et N_2 deux normes **équivalentes** sur E. Alors $\forall a \in E$, $\forall r > 0$, $B_{N_1}(a, r) := \{x \in E |\ N_1(x - a) < r\}$ est un ouvert de (E, N_2) (et vice-versa en échangeant N_1 et N_2).
d) Si $a \in E$, $E \setminus \{a\}$ est un ouvert de (E, N).

Nous allons voir une propriété des sous-ensembles ouverts qui les caractérisent complètement : l'idée n'est plus de regarder ce qu'est un ouvert, mais son complémentaire.

Théorème 4 *Soit (E, N) un espace vectoriel normé et $U \subset E$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *U est ouvert*
2. *pour toute suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E \setminus U$, s'il existe $\ell \in E$ tel que u_k tend vers ℓ* **dans** *E, alors $\ell \in E \setminus U$.*

Remarque — D'une manière générale, si $A \subset E$ et $\ell \in E$ on dit que : « ℓ est une valeur d'adhérence de A » ssi il existe une suite à valeurs dans A et qui converge vers ℓ dans E. Par exemple, si $A =]a, b] \subset \mathbb{R}$, il est évident que tous les points x contenus dans $]a, b]$ sont des valeurs d'adhérence : il suffit de prendre comme suite la suite constante égale à x : elle prend ses valeurs dans $]a, b]$ et converge vers x. Mais $]a, b]$ admet une valeur d'adhérence supplémentaire : le point a, qui n'est pas dans $]a, b]$. En effet il est facile de construire une suite à valeurs dans $]a, b]$ qui converge vers a dans $\mathbb{R}$. Ainsi l'ensemble des valeurs d'adhérence de $]a, b]$ est $[a, b]$. Maintenant nous pouvons paraphraser la deuxième propriété dans le théorème en disant que toute valeur d'adhérence de $E \setminus U$ est dans $E \setminus U$.
Démonstration — Montrons que 1 implique 2 par l'absurde : nous supposons qu'il existe une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E \setminus U$, qui converge vers $\ell \in E$ dans (E, N) et que ℓ n'est pas dans $E \setminus U$, autrement dit que $\ell \in U$. Et en même temps nous supposons que U est ouvert. Cette dernière propriété et le fait que $\ell \in U$ entraîne qu'il existe $r > 0$ tel que $B(\ell, r) \subset U$. Mais comme $\lim_{k\to+\infty} u_k = \ell$,

$$\exists N > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad k \geq N \implies N(u_k - \ell) < r.$$

Autrement dit $u_k \in B(\ell, r) \subset U$ si $k \geq N$. Cela est en contradiction avec le fait que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ prend ses valeurs dans $E \setminus U$. Donc 1 implique 2.

Pour établir la réciproque, à savoir que 2 entraîne 1, Nous allons montrer sa contraposée. Nous supposons le contraire de 1, à savoir que U n'est pas ouvert :

$$\exists a \in U, \quad \forall r > 0, \quad B(a,r) \not\subset U \tag{6}$$

et nous cherchons à montrer le contraire de 2. Nous appliquons (6) avec $r = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$. Cela entraîne que, pour chaque valeur de $k \in \mathbb{N}$,

$$B\left(a, \frac{1}{1+k}\right) \not\subset U \quad \Longleftrightarrow \quad B\left(a, \frac{1}{1+k}\right) \cap (E \setminus U) \neq \emptyset,$$

et donc $\exists u_k \in B(a, \frac{1}{1+k}) \cap (E \setminus U)$. Cela implique d'une part que $N(u_k - a) < \frac{1}{1+k}$ et donc que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $a \in U$. Mais par ailleurs u_k prend ses valeurs dans $E \setminus U$. Cela contredit 2.

Définition 8 *Soit (E,N) un espace vectoriel normé. Un sous-ensemble F de E est dit* **fermé** *ssi $U \setminus F$ est ouvert, ou bien, de façon équivalente, ssi toute valeur d'adhérence de F est contenue dans F.*

Exemples a) Les boules fermées $\overline{B}(a,r) := \{x \in E |\ N(x-a) \leq r\}$ sont des fermés.
b) Dans $(\mathbb{R}^n, || \cdot ||_\infty)$ les « pavés » fermés $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ sont des fermés.
c) Tout sous-ensemble fini $\{a_1, \cdots, a_p\}$ d'un espace vectoriel normé est un fermé.

Proposition 11 *Soient (E,N) et (E',N') des espaces vectoriels normés et $f : E \longrightarrow E'$ une application* **continue**. *Alors l'image inverse d'un fermé de (E',N') par f est un fermé de (E,N).*

Démonstration — Soit $F \subset E'$ un fermé. Pour montrer que $f^{-1}(F)$ est fermé nous considérons une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $f^{-1}(F)$ qui converge vers une limite $\ell \in E$ dans (E,N) et nous cherchons à montrer que $\ell \in f^{-1}(F)$. Pour cela nous observons d'abord que la suite $(f(u_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans F et converge. En effet, puisque f est continue et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge,

$$\lim_{k\to+\infty} f(u_k) = f\left(\lim_{k\to+\infty} u_k\right) = f(\ell).$$

Mais comme F est fermé, on doit avoir $\lim_{k\to+\infty} f(u_k) \in F$, c'est à dire $f(\ell) \in F$. Cela est équivalent à $\ell \in f^{-1}(F)$. Donc $f^{-1}(F)$ est fermé.

1.6 Sous-ensembles bornés et compacts

Définition 9 *Soit (E,N) un espace vectoriel normé et soit $A \subset E$. On dit que A est* **borné** *ssi $\exists R > 0$ tel que $A \subset B(0,R)$.*

Définition 10 *Soit (E,N) un espace vectoriel normé.*

1. *Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de E et $a \in E$. On dit que a est une* **valeur d'adhérence** *(ou bien un* **point d'accumulation***) de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ssi*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall q \in \mathbb{N}, \quad \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \quad k \geq q \quad \text{et} \quad N(u_k - a) < \varepsilon.$$

2. *Soit $A \subset E$. On dit que A* **est une partie compacte** *de (E,N) ssi pour* toute *suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de E telle que $u_k \in A$, $\forall k \in \mathbb{N}$, il existe $a \in A$ qui est valeur d'adhérence de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (on dit aussi que « A possède la propriété de Bolzano–Weierstrass »).*

Remarque — Autant la définition d'une partie bornée est simple, autant celle d'une partie compacte est difficile à comprendre. Cette dernière notion est néanmoins extrêmement utile. Il faut pour bien la saisir déjà bien comprendre la notion de valeur d'adhérence d'une suite : elle ressemble à la notion de limite, mais en est différente. Voici quelques exemples, dans $\mathbb{R}$:

- si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{R}$ qui converge vers ℓ, alors $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une et une seule valeur d'adhérence, qui est ℓ (exercice : vérifier !)
- la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $u_k = (-1)^k$ ne converge pas. Mais elle a deux valeurs d'adhérence, qui sont -1 et 1 (exercice : vérifier !)
- la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $u_k = (-1)^k + \frac{1}{1+k}$ a deux valeurs d'adhérence, qui sont -1 et 1 (exercice : vérifier !)
- la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $u_k = k$ n'admet aucune valeur d'adhérence (exercice : vérifier !)
- on rappelle que l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est dénombrable. Cela signifie qu'il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$. Alors la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $u_k = \varphi(k)$ admet une infinité de valeurs d'adhérence : à savoir **tous** les points de $\mathbb{R}$ sont valeurs d'adhérence ! (exercice : vérifier, en utilisant le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$).

Théorème 5 *(Bolzano–Weierstrass) Dans* $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)$, *toute partie* **fermée et bornée** *est* **compacte**, *c'est à dire possède la propriété de Bolzano–Weierstrass.*

Remarque – Attention : dans certains livres on *définit* une partie compacte comme une partie qui est fermée et bornée et le théorème de Bolzano–Weierstrass est formulé en disant que « tout compact possède la propriété de Bolzano–Weierstrass ».

Démonstration — Nous nous contenterons de la preuve dans $\mathbb{R}^2$, la preuve en dimension supérieure est similaire. Soit A une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$ et soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans A. Notons

$$S := \{u_k |\ k \in \mathbb{N}\} \subset A.$$

Nous avons tout d'abord l'alternative suivante :

1. soit S est un sous-ensemble fini et donc il existe au moins un point $a \in S$ qui est atteint une infinité de fois par u_k. Alors on vérifie aisément que a est valeur d'adhérence de la suite
2. soit S est de cardinal infini.

Plaçons dans le deuxième cas, puisque dans le premier cas il n'y a plus rien à faire. Nous utilisons le fait que A est borné : $\exists R > 0$ tel que $A \subset \overline{B}_\infty(0,R) = [-R,R] \times [-R,R]$. On procède alors par dichotomie et on divise le carré $Q := [-R,R] \times [-R,R]$ en quatre carrés plus petits :

$$[-R,0] \times [-R,0],\ \ [-R,0] \times [0,R],\ \ [0,R] \times [-R,0]\ \text{ et } [0,R] \times [0,R].$$

Mais parmi ces quatres carrés il y en a au moins un (que nous appellerons Q_1) tel que $S \cap Q_1$ soit infini. On divise Q_1 en quatre sous-carrés plus petits et on recommence le même raisonnement : puisque $S \cap Q_1$ est infini, il existe au moins un petit carré Q_2 parmi les quatre qui composent Q_1 tel que $S \cap Q_2$ soit infini. On réitère cette opération indéfiniment. A l'étape n on note $Q_n = [a_n, b_n] \times [c_n, d_n]$ le carré ainsi construit. Nous avons obtenu une suite de carrés

$$Q \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \cdots \supset Q_n \supset \cdots$$

telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $S \cap Q_n$ est infini. Ces inclusions se traduisent par les inégalités :

$$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \quad \text{et} \quad c_n \leq c_{n+1} < d_{n+1} \leq d_n.$$

Par ailleurs la construction par dichotomie entraîne par une récurrence immédiate :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{R}{2^n} \quad \text{et} \quad d_{n+1} - c_{n+1} = \frac{d_n - c_n}{2} = \frac{R}{2^n},$$

et donc les suites de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et les suites $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Elles convergent respectivement vers x (pour a_n et b_n) et vers y (pour c_n et d_n). De plus nous pouvons fabriquer une suite $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (x_n, y_n) \in Q_n \cap S.$$

En particulier nous avons les inégalités

$$a_n \leq x_n \leq b_n \quad \text{et} \quad c_n \leq y_n \leq d_n$$

et donc, puisque a_n et b_n convergent vers x, on en déduit que x_n converge vers x. De même on conclut que y_n converge vers y. Mais par ailleurs (x_n, y_n) prend ses valeurs dans A (puisque $S \subset A$) : c'est le moment d'utiliser le fait que A est fermé : cela nous garantit que $(x, y) = \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) \in A$. Il ne reste plus qu'à montrer que (x, y) est valeur d'adhérence de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, c'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall q \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} \quad \text{tel que } k \geq q \text{ et } ||u_k - (x, y)||_\infty < \varepsilon.$$

Pour cela, pour $\varepsilon > 0$, nous choisissons $n \in \mathbb{N}$ tel que $R/2^n < \varepsilon$ et nous allons piocher u_k dans $S \cap Q_{n+1}$: puisque cet ensemble est infini, même en enlevant les q premières valeurs $\{u_0, u_1, \cdots, u_{q-1}\}$ de S, on a toujours $\{u_k | \; k \geq q\} \cap Q_{n+1} \neq \emptyset$. Donc on peut trouver $k \geq q$ tel que $u_k \in Q_{n+1}$. On peut montrer aussi facilement que $(x, y) \in Q_{n+1}$. Cela va nous permettre de montrer que $||u_k - (x, y)||_\infty < R/2^n < \varepsilon$. En effet nous observons que Q_{n+1} est une boule

$$B_\infty(\alpha_n, R/2^{n+1})$$

pour la norme $||\cdot||_\infty$, centrée en un point α_n. Et comme u_k et $(x, y) \in Q_{n+1}$,

$$||u_k - (x, y)||_\infty \leq ||u_k - \alpha_n||_\infty + ||\alpha_n - (x, y)||_\infty < R/2^{n+1} + R/2^{n+1} = R/2^n.$$

Donc (x, y) est valeur d'adhérence de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Un résultat bien pratique

Il est commode de formuler la propriété de Bolzano–Weierstrass d'une façon légèrement différente.

Proposition 12 *Soit (E, N) un espace vectoriel normé et $A \subset E$. Alors A est compact ssi pour toute suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui prend ses valeurs dans A, on peut en extraire une sous-suite $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite $\ell \in A$.*

Démonstration — Supposons que A est compact et soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans A. Alors, d'après la définition d'un compact, il existe une valeur d'adhérence $\ell \in A$ pour cette suite. Cela signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall q \in \mathbb{N}, \quad \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \quad k \geq q \quad \text{et} \quad N(u_k - \ell) < \varepsilon. \tag{7}$$

Nous appliquons cela pour toutes les valeurs $\varepsilon = \frac{1}{1+n}$, où $n \in \mathbb{N}$, afin de construire une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ. Tout d'abord en utilisant (7) avec $\varepsilon = 1$ et $q = 0$, on obtient qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $N(u_k - \ell) < 1$. On note alors $\varphi(0) := k$. Puis on procède par récurrence : supposons que nous ayons défini $u_{\varphi(0)}, u_{\varphi(1)}, \cdots, u_{\varphi(n)}$, avec φ croissante et $N(u_{\varphi(m)} - \ell) < \frac{1}{1+m}$, pour $m = 0, 1, \cdots, n$. Nous appliquons alors (7) avec $\varepsilon = \frac{1}{1+n+1}$ et $q = \varphi(n)$ et nous notons $\varphi(n+1)$ la valeur de k ainsi obtenue. Il est alors immédiat que $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une vraie sous-suite (i.e. φ est croissant) qui converge vers ℓ.

La réciproque consiste à montrer que si $A \subset E$ est tel que, pour toute suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui prend ses valeurs dans A, il est possible d'en extraire une sous-suite qui converge dans A, alors A est compact. Pour cela il suffit de démontrer que si une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente vers une limite ℓ, alors ℓ est valeur d'adhérence de la suite. C'est très simple : soit $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la sous-suite qui converge, alors $\forall\varepsilon > 0$, $\forall q \in \mathbb{N}$, on choisit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(n) \geq q$ (c'est possible parce que φ est strictement croissant, donc $\lim_{n\to\infty}\varphi(n) = +\infty$) et $N(u_{\varphi(n)} - \ell) < \varepsilon$.

Corollaire 2 *Soit (E, N) un espace vectoriel normé et $A \subset E$ un sous-ensemble* **borné** *et* **fermé**. *Alors pour toute suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui prend ses valeurs dans A, il est possible d'en extraire une sous-suite $\left(u_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite $\ell \in A$.*

Théorème 6 *Soit (E, N) un espace vectoriel normé et $A \subset E$ un sous-ensemble* **borné** *et* **fermé**. *Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction* **continue**, *alors*

1. *f est bornée, c'est à dire : l'image $f(A)$ de f est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$*
2. *f atteint ses bornes, c'est à dire : si $m := \inf_{x\in A} f(x)$ et si $M := \sup_{x\in A} f(x)$, alors $\exists \underline{x} \in A$ tel que $f(\underline{x}) = m$ et $\exists \overline{x} \in A$ tel que $f(\overline{x}) = M$.*

Démonstration — Nous allons montrer que f est majorée, c'est à dire $\exists R > 0$ tel que $f(x) < R$, $\forall x \in A$ et que $M := \sup_{x\in A} f(x)$ est atteint. Le fait que f est minorée et que $m := \inf_{x\in A} f(x)$ est atteint se démontre de la même manière. Commençons par raisonner par l'absurde et supposons que f ne soit pas majorée. Alors

$$\forall R > 0, \exists x \in A, \quad f(x) \geq R.$$

En appliquant cela pour $R = n$, où $n \in \mathbb{N}$, on construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A telle que $f(x_n) \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Or d'après le corollaire précédent, on peut extraire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite $\ell \in A$. Mais par ailleurs f est continue, donc la suite $\left(f(x_{\varphi(n)})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$. Cela entraîne que cette suite est bornée, ce qui est contradictoire, puisque $f(x_{\varphi(n)}) \geq \varphi(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Donc f est majorée.

A présent soit $M := \sup_{x\in A} f(x) < +\infty$. Par définition, M est la valeur réelle telle que :

$$[\forall x \in A, \quad f(x) \leq M] \quad \text{et} \quad [\forall\varepsilon > 0, \exists x \in A, \quad \text{tel que} : M - \varepsilon \leq f(x) \leq M].$$

Nous appliquons cela pour $\varepsilon = \frac{1}{1+n}$, avec $n \in \mathbb{N}$: cela nous garantit l'existence d'un $x_n \in A$ tel que $M - \frac{1}{1+n} \leq f(x_n) \leq M$. Toujours grâce au corollaire précédent, nous pouvons extraire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite $\ell \in A$. Il ne reste plus qu'à passer à la limite, lorsque $n \to +\infty$ dans les inégalités :

$$M - \frac{1}{1+\varphi(n)} \leq f(x_{\varphi(n)}) \leq M,$$

en utilisant la continuité de f. Cela nous donne $M \leq f(\ell) \leq M$, donc $f(\ell) = M$. Donc M est atteint.

Voici une première conséquence des résultats précédents sur les compacts.

Théorème 7 *Soit E un espace vectoriel réel de* **dimension finie**. *Alors toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Démonstration – Nous allons établir ce résultat en considérant des situations de généralité croissante.

1. on prend $E = \mathbb{R}^n$ et on montre que toute norme N sur $\mathbb{R}^n$ est équivalente à la norme $||\cdot||_\infty$.
   a) Montrons que
   $$\exists C > 0, \quad \forall x \in E, \quad N(x) \leq C||x||_\infty. \tag{8}$$
   Pour cela soit $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,
   $$\begin{aligned} N(x) &= N(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) \\ &\leq |x_1|N(e_1) + \cdots |x_n|N(e_n) \\ &\leq C||x||_\infty, \end{aligned}$$
   où $C := N(e_1) + \cdots + N(|e_n)$. On a donc (8).
   b) Montrons l'inégalité inverse. L'idée est de considérer le sous-ensemble
   $$S := \{x \in \mathbb{R}^n | \ ||x||_\infty = 1\}$$
   et $c := \inf_{x \in S} N(x)$. Il est clair que $c \geq 0$. Montrons que $c||x||_\infty \leq N(x)$, $\forall x \in E$: en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, soit $x = 0$ et alors cette inégalité est immédiate, soit $x \neq 0$ et alors
   $$\frac{x}{||x||_\infty} \in S \quad \Longrightarrow \quad c \leq N\left(\frac{x}{||x||_\infty}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad c||x||_\infty \leq N(x).$$
   A présent, nous pourrions avoir l'impression que notre preuve est complète, sauf que... il se pourrait que c soit nul et alors cette inégalité ne servirait à rien ! Il faut donc que nous montrions que c est non nul. Pour cela on remarque tout d'abord que (8) entraîne aussi que :
   $$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad |N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq C||x - y||_\infty,$$
   d'où l'on peut déduire facilement que $N : (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ **est continue.** De plus nous observons que S **est un compact de** $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)$. En effet S est l'intersection des fermés $\overline{B}_\infty(0,1)$ et $\mathbb{R}^n \setminus B_\infty(0,1)$, et donc est fermé, et S est bien évidemment borné. En vertu du théorème 6, $\inf_{x \in S} N(x)$ est atteint en un point de S, autrement dit $\exists \underline{x} \in S$ tel que $N(\underline{x}) = c$. Nous en déduisons l'information extrêmement utile que :
   $$\underline{x} \in S \quad \Longrightarrow \quad \underline{x} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad c \neq 0.$$
   Et donc nous avons montré que N et $||\cdot||_\infty$ étaient des normes équivalentes sur $\mathbb{R}^n$.
2. on prend $E = \mathbb{R}^n$ et on montre que toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes. Soient N_1 et N_2 deux normes sur $\mathbb{R}^n$. Alors, d'après l'étape précédente, elles sont équivalentes toutes les deux à $||\cdot||_\infty$ et donc, puisqu'on a affaire à une relation d'équivalence, elles sont équivalentes entre elles.
3. on prend un espace vectoriel réel E de dimension n quelconque. Choisissons une base $(u_1, \cdots, u_n)$ de E, cela nous permet de construire un unique isomorphisme $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$, caractérisé par $\psi(e_i) = u_i$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$. Alors si N_1 et N_2 sont deux normes sur E, les applications $N_1 \circ \psi$ et $N_2 \circ \psi$ sont deux normes sur $\mathbb{R}$. Donc d'après l'étape précédente, les normes $N_1 \circ \psi$ et $N_2 \circ \psi$ sont équivalentes, ce qui entraîne aisément que N_1 et N_2 sont équivalentes.

L'utilisation d'un isomorphisme $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ comme dans la troisième étape de la preuve précédente permet d'une façon générale d'étendre à tous les espaces vectoriels normés de **dimension finie** les résultats vus à propos de $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)$:

– Si (E, N) est un espace vectoriel normé **de dimension finie**, si (E', N') est un autre espace vectoriel normé et si $f : E \longrightarrow E'$ est une application linéaire, alors f est continue de (E, N) vers (E', N') : nous avions vu ce résultat dans le cas où $(E, N) = (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)$ (exemple d) de la suite d'exemples de fonctions continues), il s'étend au cas général grâce au théorème 7.

– nous avions vu que les fermés bornés de $(\mathbf{R}^n, ||\cdot||_\infty)$ sont des compacts, cela s'étend aux fermés bornés de n'importe quel espace vectoriel (E, N) de dimension finie.

Remarque — En général tous ces résultats sont faux si (E, N) est de dimension infinie. En particulier un fermé borné dans un espace vectoriel normé de dimension infinie n'est pas compact en général !

Récapitulons les résultats principaux à propos des compacts et de leur utilisation

– les fermés bornés d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont des compacts
– si K est un compact et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans K, alors il existe une sous-suite $\left(u_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et il existe $\ell \in K$ tels que $\lim_{k\to\infty} u_{\varphi(k)} = \ell$
– sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Donc, a posteriori, quand on parle d'ouverts, de fermés, de compacts, d'applications continues à valeurs dans un tel espace, ou définies sur un sous-ensemble de cet espace, on n'a pas besoin de préciser pour quelle norme : toute propriété vraie pour une norme le sera automatiquement pour toutes les autres normes !