1. Introduction :

Les vecteurs (et les torseurs) sont des outils mathématiques essentiels pour l'étude de la mécanique des solides. Dans l'étude géométrique des systèmes mécaniques, les vecteurs servent à définir la position d'un point lié à un solide et l'orientation de ce solide. Lors de l'étude cinématique d'un système, le champ des vitesses des points d'un solide peut être représenté par un champ de vecteurs. Dans les études statiques et dynamiques, les actions mécaniques sont modélisables au niveau local par un champ de *vecteurs glissants* et au niveau global par un torseur d'action mécanique.

2. Vecteurs

2.1. Définition et classification

C'est le segment de droite *AB* (figure ci – contre) sur lequel est choisie une origine A est une extrémité B. Il est défini par :

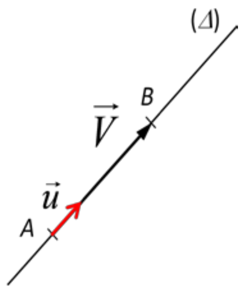

Figure 1 : Vecteur

- Son origine (le point *A*) ;
- Sa direction ou support (droite Δ) ;
- Sons sens (de *A* vers *B*) ;
- Son module (norme).

Classification :

- vecteur libre : la direction, le sens le module sont seuls connus, mais non la droite support (direction) ni le point d'application ;
- vecteur glissant : la droite support est fixée, mais non le point d'application ;
- vecteur lié : tous les éléments qui déterminent le vecteur sont donnés, y compris le point d'application.

Un vecteur unitaire est un vecteur dont la grandeur est égale à un. Tout vecteur $\vec{V}$ parallèle au vecteur unitaire $\vec{u}$ peut s'exprimer sous la forme : (Figure 1)

$$\vec{V} = \left|\vec{V}\right| \cdot \vec{u}$$

2.2. Opérations élémentaires sur les vecteurs

2.2.1. Représentation analytique des vecteurs

Les opérations sur les vecteurs se simplifient énormément si l'on utilise un système d'axes orthogonaux *Ox, Oy, Oz* (Figure 2).

Note : $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est dite base orthonormée directe.

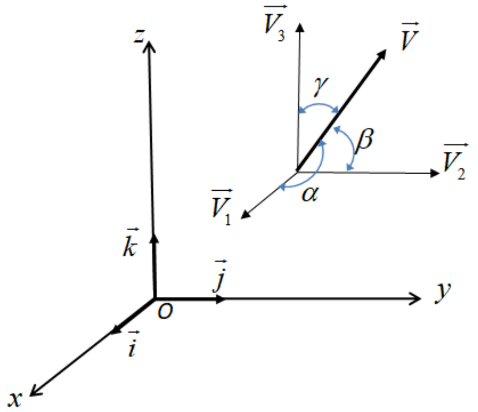

Figure 2 : Représentation analytique d'un vecteur

Le vecteur $\vec{V}$ est complètement déterminé si on connait les composantes $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$ suivant les axes *Ox, Oy, Oz.*

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$$

Suivant les trois axes, on écrit :

$$\vec{V}_1 = X\vec{i}, \quad \vec{V}_2 = Y\vec{j}, \quad \vec{V}_3 = Z\vec{k}$$

Où X, Y et Z représentent les projections du vecteur $\vec{V}$ sur les axes du système.

Et l'on obtient l'expression analytique du vecteur :

$$\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

On démontre dans ce qui suit que :

$$X = \left|\vec{V}\right|\cos\alpha, \quad Y = \left|\vec{V}\right|\cos\beta, \quad Z = \left|\vec{V}\right|\cos\gamma$$

Expression d'une somme vectorielle :

Considérons un ensemble de vecteurs : $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$,…, $\vec{V}_n$, définis par leurs projections sur les axes *Ox, Oy, Oz.*

On demande de déterminer le vecteur :

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_i$$

En remplaçant : $\vec{V}_i = X_i\vec{i} + Y_i\vec{j} + Z_i\vec{k}$, on obtient : $\vec{V} = \underbrace{\left(\sum X_i\right)}_{X}\vec{i} + \underbrace{\left(\sum Y_i\right)}_{Y}\vec{j} + \underbrace{\left(\sum Z_i\right)}_{Z}\vec{k}$.

X, Y et Z sont les projections du vecteur résultant $\vec{V}$ dont le module sera :

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

a- Addition des vecteurs. La somme de deux vecteurs libres $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ est définie par le vecteur $\vec{V}$ qui joint l'origine du vecteur $\vec{V}_1$ à l'extrémité du vecteur $\vec{V}_2$.

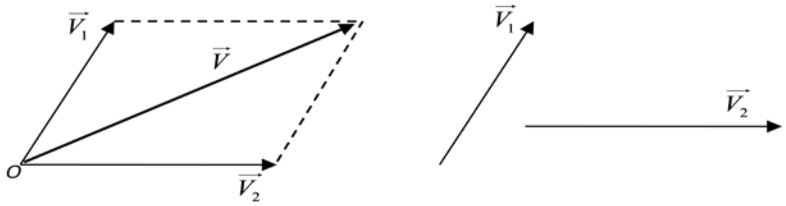

Figure 3 : Règle d'addition du parallélogramme

On écrit : $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$

L'addition de plusieurs vecteurs consiste à construire la ligne polygonale des vecteurs (Figure 4).

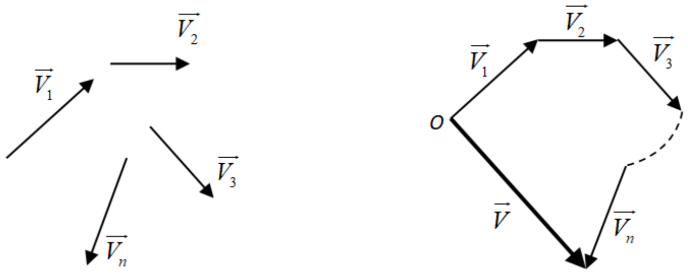

Figure 4 : Ligne polygonale

Différence de deux vecteurs :

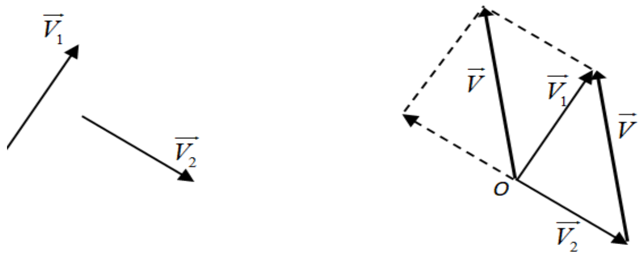

Figure 5 : Différence de deux vecteurs

La différence de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ pris dans cet ordre, est le vecteur $\vec{V}$ qu'il faut rajouter au second $\vec{V}_2$ pour obtenir le premier $\vec{V}_1$, et l'on écrit : $\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$.

2.2.2. Produit scalaire

a- Définition

Le produit scalaire entre deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est défini par :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \left|\vec{U}\right| \cdot \left|\vec{V}\right| \cos\theta$$

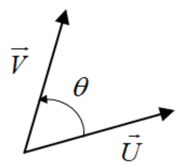

Figure 6 : Produit scalaire

θ étant l'angle orienté $\left(\vec{U}, \vec{V}\right)$ formé par les deux vecteurs.

b- Propriétés et conséquences

Pour la base orthonormée directe (Figure 2, page 1), le produit scalaire possède les propriétés suivantes :

Dans une base orthonormée les vecteurs sont normés donc :

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \;\;,\;\; \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 \;\;,\;\; \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

Les vecteurs de la base sont orthogonaux donc :

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \;\;,\;\; \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \;\;,\;\; \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

Le produit scalaire $\vec{U} \cdot \vec{V}$ est nul dans l'un des cas suivants : $\vec{U}$ (ou $\vec{V}$) est un vecteur nul, norme 0 ; les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux.

Note : On se sert souvent de la condition d'orthogonalité : $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$

c- Expression analytique

Considérons deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ définis dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par :

$$\vec{U} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{V} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$$

En appliquant la propriété de distributivité et en tenant compte des produits scalaires des vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, on aura :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

d- Applications

- *Angle entre deux vecteurs*

Le produit scalaire s'écrit $\vec{U} \cdot \vec{V} = |\vec{U}| \cdot |\vec{V}| \cos\theta$, on peut alors définir l'angle θ de ces deux vecteurs par son cosinus :

$$\cos\theta = \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{|\vec{U}| \cdot |\vec{V}|}$$

- *Projection orthogonale d'un vecteur sur un axe*

La projection A_1B_1 est déterminée par les perpendiculaires à l'axe menées par l'origine et l'extrémité du vecteur $\vec{V}$:

$$\text{proj}_\Delta(\vec{V}) = A_1B_1 = |\vec{V}| \cdot \cos\theta$$

On écrit enfin :

$$\text{proj}_\Delta(\vec{V}) = \vec{V} \cdot \vec{u}$$

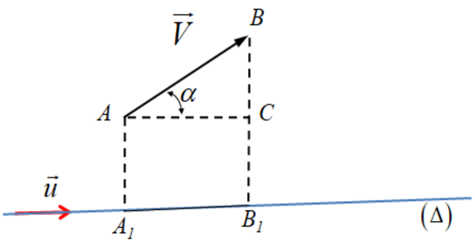

Figure 7 : Projection d'un vecteur sur un axe

- ***Exercice 1***

Soit $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct (Fig. I.8) :

- $\vec{u}$ un vecteur unitaire du plan $(\vec{j}\ O\ \vec{k})$ tel que : $(\vec{j}, \vec{u}) = \alpha$;
- $\vec{v}$ un vecteur unitaire du plan $(\vec{j}\ O\ \vec{k})$ tel que : $(\vec{u}, \vec{v}) = \beta$;
- Le vecteur $\overrightarrow{OA}$, défini par $\overrightarrow{OA} = a\vec{u}$;
- Le vecteur $\overrightarrow{OB}$, défini par $\overrightarrow{OB} = b\vec{v}$;

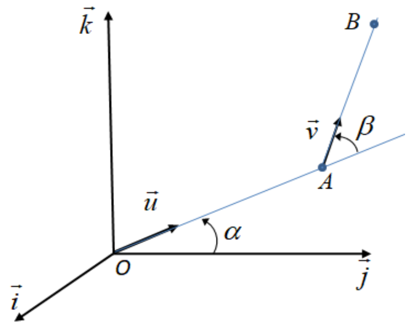

Figure 8

En fonction des paramètres *a*, *b*, *α* et *β* :

1. Définir les composantes (X_B, Y_B, Z_B) du vecteur $\overrightarrow{OB}$ sur la base liée à *R* ;
2. Calculer la norme $|\overrightarrow{OB}|$ de $\overrightarrow{OB}$;

3. Définir l'angle $\varphi = \left(\vec{j}, \overrightarrow{OB}\right)$ de $\overrightarrow{OB}$ par rapport à l'axe $O\vec{i}$;
4. Effectuer les applications numériques pour $a = 50$ mm, $b = 30$ mm, $\alpha = 25°$ et $\beta = 40°$.

Solution

1. Composante du vecteur $\overrightarrow{OB}$: $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

   Par définition :

   $$Y_B = \overrightarrow{OB} \cdot \vec{j} = \left(a\vec{u} + b\vec{v}\right) \cdot \vec{j} = a\vec{u} \cdot \vec{j} + b\vec{v} \cdot \vec{j} = a\cos\alpha + b\cos\left(\alpha + \beta\right)$$

   $$Z_B = \overrightarrow{OB} \cdot \vec{k} = \left(a\vec{u} + b\vec{v}\right) \cdot \vec{k} = a\vec{u} \cdot \vec{k} + b\vec{v} \cdot \vec{k} = a\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + b\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\alpha + \beta\right)\right)$$
   $$= a\sin\alpha + b\sin\left(\alpha + \beta\right)$$

   $$X_B = \overrightarrow{OB} \cdot \vec{i} = 0$$

2. $\left|\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB}} = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2 + Z_B^2}$

   $$\left|\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\beta}$$

3. $\varphi = \left(\vec{j}, \overrightarrow{OB}\right)$, il est tel que :

   $$\cos\varphi = \frac{\vec{j} \cdot \overrightarrow{OB}}{\left|\vec{j}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OB}\right|} = \frac{X_B}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\beta}}$$

4. Application numérique :

   $X_B = 0$ mm, $Y_B = 58$ mm, $Z_B = 48.32$ mm

   $\left|\overrightarrow{OB}\right| = 75.49$ mm

   $\cos\varphi = 0.768$ et $\varphi = 39.8°$

2.2.3. Produit vectoriel

a. Définition : le produit vectoriel de deux $\vec{U}$ et $\vec{V}$ vecteurs est un vecteur $\vec{W}$ dont la direction est perpendiculaire au plan formé par $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

Le sens de $\vec{W}$ est donné par le trièdre $\left(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}\right)$ direct.

Son module est définie par : $\left|\vec{W}\right| = \left|\vec{U}\right|\left|\vec{V}\right|\left|\sin\theta\right|$

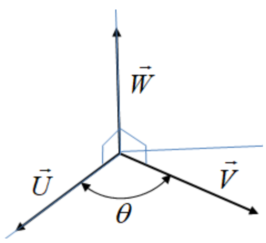

Figure 9 : Produit vectoriel
$\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$

b. Propriétés

- associativité : $\left(\lambda\vec{U}\right) \wedge \vec{V} = \vec{U} \wedge \left(\lambda\vec{V}\right) = \lambda\left(\vec{U} \wedge \vec{V}\right)$;
- distributivité par rapport à l'addition : $\vec{U} \wedge \left(\vec{V} + \vec{W}\right) = \vec{U} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \vec{W}$
- antisymétrie (non commutatif) : $\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U}$.

c. conséquences

Sur les vecteurs d'une base orthonormée directe on obtient :

$$\vec{i}\wedge\vec{i}=\vec{0},\qquad \vec{j}\wedge\vec{j}=\vec{0},\qquad \vec{k}\wedge\vec{k}=\vec{0}$$
$$\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k},\qquad \vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i},\qquad \vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$$
$$\vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j},\qquad \vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k},\qquad \vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i}$$

Le produit scalaire $\vec{U}\wedge\vec{V}$ est nul dans l'un des cas suivants : $\vec{U}$ (ou $\vec{V}$) est un vecteur nul, (norme 0) ; le vecteur $\vec{U}=\lambda\vec{V},\ \forall\lambda$ réel .

On se sert souvent de la condition $\vec{U}\wedge\vec{V}=0$ pour vérifier que deux vecteurs sont parallèles.

d. Expression analytique du produit vectoriel

Si l'on considère les deux vecteurs suivants :

$$\vec{U}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}\ \ ;\ \ \vec{V}=v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}$$

On démontre facilement que :

$$\vec{W}=\vec{U}\wedge\vec{V}=\left(u_2v_3-u_3v_2\right)\vec{i}+\left(u_3v_1-u_1v_3\right)\vec{j}+\left(u_1v_2-u_2v_1\right)\vec{k}$$

Le résultat obtenu peut aussi s'écrire sous la forme plus condensée du déterminant :

$$\vec{U}\wedge\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$$

e. Applications

- *Aire d'un triangle ou d'un parallélogramme*

La norme du vecteur représente le double de l'aire du triangle *OAB* ou l'aire du parallélogramme *OACB*, défini à partir de *U* et *V*

$$\left|\vec{U}\wedge\vec{V}\right|=\left|\vec{U}\right|\left|\vec{V}\right|\left|\sin\alpha\right|=\left|\vec{U}\right|\cdot h=2S$$

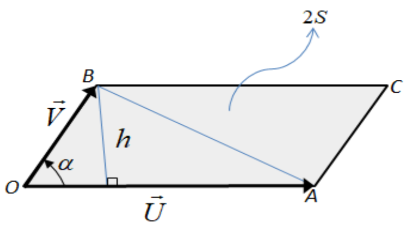

Figure 10: Aire du parallélogramme *OACB*

- *Equation d'une droite (D) passant par deux points A et B*

Si *M* est situé sur la droite *AB*, les points *A*, *M* et *B* sont alignés. On écrit :

$$\forall M\in(D)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$

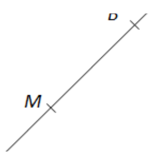

Figure 11 : droite (*D*) passant par *A* et *B*

- *Distance h d'un point P à une droite (D)*

La distance de P à (D) peut être calculée par :

$$h = \frac{\left|\vec{U} \wedge \overrightarrow{AP}\right|}{\left|\vec{U}\right|}$$

car $$2S = \left|\vec{U} \wedge \overrightarrow{AP}\right| = \left|\vec{U}\right| h$$

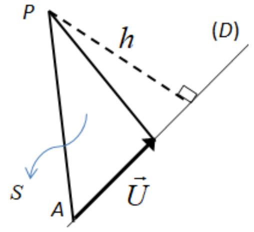

Figure 12 : Distance d'un point P à une droite (D).

- ***Exercice 2***

Soit $R\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé direct (Fig. I.14) :

- $\vec{u}$ un vecteur unitaire du plan $\left(\vec{j}\ O\ \vec{k}\right)$ tel que : $\left(\vec{j},\vec{u}\right) = \alpha$
- le vecteur $\overrightarrow{OA}$ défini par : $\overrightarrow{OA} = a\vec{j}$; $a > 0$;
- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ défini par : $\overrightarrow{AB} = b\vec{u}$; $b > 0$.

1. Calculer $\vec{W} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$ par la définition.
2. Calculer $\vec{W} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$ analytiquement.
3. Calculer l'équation de la droite (D) passant par A et B.

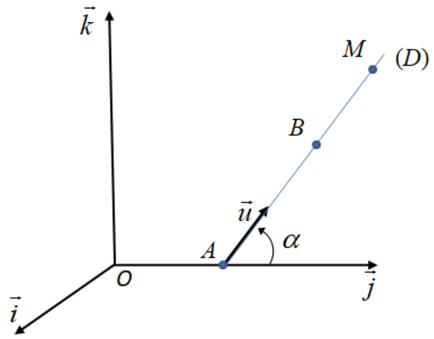

Figure 13

<u>Solution :</u>

Par définition :

- La direction de $\vec{W} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$ est perpendiculaire au plan $\left(\vec{j}\ O\ \vec{k}\right)$
- Le sens de $\vec{W}$ est tel que le trièdre $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}, \vec{W}\right)$ soit direct ;

Ces deux conditions font que $\vec{W}$ est porté par l'axe $\vec{i}$;

- La norme de $\vec{W}$ est : $\left|\vec{W}\right| = \left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\sin\alpha\right| = ab\sin\alpha$;

En résumé : $\vec{W} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB} = ab\sin\alpha\ \vec{i}$

2. Analytiquement :

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} ;\ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ b\cos\alpha \\ b\sin\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{W} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & a & 0 \\ 0 & b\cos\alpha & b\sin\alpha \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} ab\sin\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{W} = ab\sin\alpha\ \vec{i}$

3. Equation de la droite (D)

Soit M (x,y,z) un point quelconque appartenant à (D), alors : $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

Dans la base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on aura :

$$\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x \\ y-a \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ b\cos\alpha \\ b\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ceci conduit vers les 2 équations suivantes : $x = 0$ et $(y - a)\sin\alpha - z\cos\alpha = 0$

C'est donc une droite du plan $\left(\vec{j}\ O\ \vec{k}\right)$ dont l'équation peut se mettre sous la forme :

$$z = (y - a)\tan\alpha$$

2.2.4. Double produit vectoriel

Le double produit vectoriel de trois vecteurs ordonnés $\vec{U},\vec{V}$ et $\vec{W}$ est un vecteur $\vec{X}$ défini par la relation :

$$\vec{X} = \vec{U} \wedge \left(\vec{V} \wedge \vec{W}\right)$$

En servant de la définition du produit vectoriel on peut montrer que ce vecteur peu s'exprimer par :

$$\vec{X} = \left(\vec{U}\cdot\vec{W}\right)\vec{V} - \left(\vec{U}\cdot\vec{V}\right)\vec{W}$$

2.2.5. Produit mixte

Le produit mixte de trois vecteurs ordonnés est défini par le scalaire : $\vec{U}\cdot\left(\vec{V} \wedge \vec{W}\right)$.

Notation : $\left(\vec{U},\vec{V},\vec{W}\right)$

Le produit mixte est invariant par permutation circulaire des vecteurs :

$$\vec{U}\cdot\left(\vec{V}\wedge\vec{W}\right) = \vec{V}\cdot\left(\vec{W}\wedge\vec{U}\right) = \vec{W}\cdot\left(\vec{U}\wedge\vec{V}\right)$$

Le produit mixte est nul dans les cas suivants : l'un des 3 vecteurs est nul ; $\vec{U},\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont coplanaires.

Le produit mixte se calcul par le déterminant suivant :

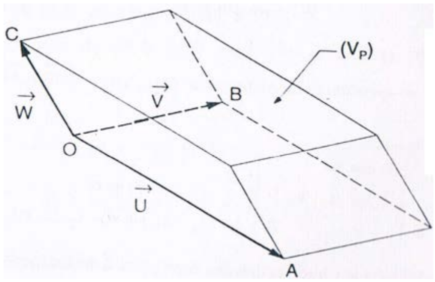

Figure 14 : Volume d'un parallélépipède

$$\left(\vec{U},\vec{V},\vec{W}\right) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

Application :

1. Calcul du volume V_p d'un parallélépipède.

La valeur absolue du produit mixte représente le volume du parallélépipède construit sur les 3 vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.

$$V_p = \left|\left(\vec{U},\vec{V},\vec{W}\right)\right|$$

2. Equation d'un plan *P* passant par trois points *A*, *B* et *C*.

Soit M un point appartenant à ce plan (Figure I.15). Il suffit d'écrire le tétraèdre $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ admet un volume nul :

$$\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0$$

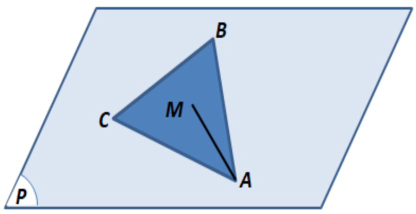

Figure 15 : Plan P passant par les points A, B et C

Exercice 3

On reprend en partie l'énoncé et les résultats de l'exercice 2.

Soit $R\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé direct (Fig. I.16) :

- $\vec{u}$ un vecteur unitaire du plan $\left(\vec{j}\ O\ \vec{k}\right)$ tel que : $\left(\vec{j},\vec{u}\right)=\alpha$
- le vecteur $\overrightarrow{OA}$ défini par : $\overrightarrow{OA}=a\vec{j}$; $a>0$;
- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ défini par : $\overrightarrow{AB}=b\vec{u}$; $b>0$.
- Le vecteur défini par : $\overrightarrow{OC}=c\vec{i}$; $c>0$.

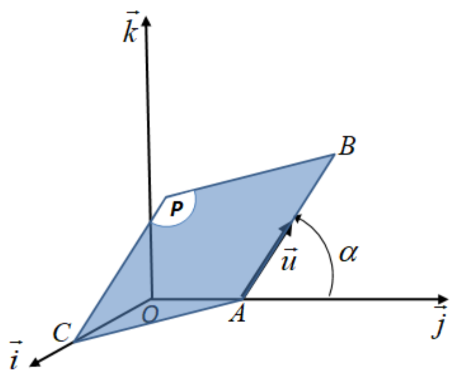

Figure 16

1. Calculer $\left(\vec{i},\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AB}\right)=0$, par la définition.
2. Calculer $\left(\vec{i},\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AB}\right)=0$, analytiquement.
3. Calculer l'équation du point (P) passant par A, B et C.

<u>Solution :</u>

1. On peut écrire : $\left(\vec{i},\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AB}\right)=\vec{i}\cdot\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{AB}\right)$

En reprenant les résultats de l'exercice 2, il vient :

$$\left(\vec{i},\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AB}\right)=\vec{i}\cdot ab\sin\alpha\ \vec{i}\ =ab\sin\alpha$$

2. $$\left(\vec{i},\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AB}\right)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & a & b\cos\alpha\\ 0 & 0 & b\sin\alpha\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b\cos\varepsilon\\ 0 & b\sin\alpha\end{vmatrix}=ab\sin\alpha$$

3. Soit $M\ (x,y,z)$ un point appartenant à (P), alors : $M\in(P)\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=0$

$$\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}x & 0 & c\\ y-a & b\cos\alpha & -a\\ z & b\sin\alpha & 0\end{vmatrix}=abx\sin\alpha+bc\left[\left(y-a\right)\sin\alpha-z\cos\alpha\right]$$

L'équation du plan est donc :

$$abx\sin\alpha+bc\left[\left(y-a\right)\sin\alpha-z\cos\alpha\right]=0$$

2.3. Moments de vecteurs

2.3.1. Moment d'un vecteur par rapport à un point *P*

Le moment en P du vecteur glissant $\vec{V}$ est défini par le vecteur (lié) :

$$\overrightarrow{M}_P\left(\vec{V}\right)=\overrightarrow{PA}\wedge\vec{V}$$

Ce vecteur moment est orthogonal au plan défini par *P* et (Δ).

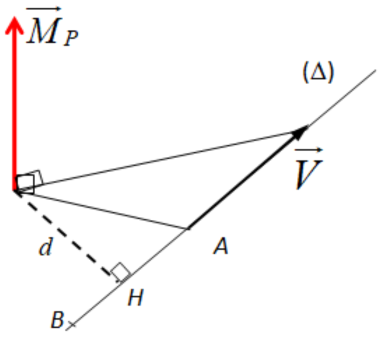

Figure 17 : Moment d'un vecteur par rapport à un point.

Remarques :

- Ce moment est indépendant du point *A* appartenant à (Δ). En effet, au point B (Figure I.17) on écrit :

  $\overrightarrow{PB}\wedge\vec{V}=\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}\right)\wedge\vec{V}=\overrightarrow{PA}\wedge\vec{V}$, car $\overrightarrow{AB}$ et parallèle à $\vec{V}$.

- Soit *H* la projection de P sur (Δ)

  $\overrightarrow{M}_P\left(\vec{V}\right)=\overrightarrow{PA}\wedge\vec{V}=\left(\overrightarrow{PH}+\overrightarrow{HA}\right)\wedge\vec{V}=\overrightarrow{M}_P\left(\vec{V}\right)=\overrightarrow{PH}\wedge\vec{V}$, car $\overrightarrow{AH}$ est parallèle à $\vec{V}$.

- On démontre aisément que la norme de $\overrightarrow{M}_P\left(\vec{V}\right)$ vaut : $\left|\overrightarrow{PH}\wedge\vec{V}\right|=d\left|\vec{V}\right|$

  d est la plus petite distance du point P au support (Δ).

2.3.2. Moment d'un vecteur par rapport à un axe (δ)

L'axe (δ) est muni d'un vecteur unitaire $\vec{u}$. *B* est un point de (δ).

Le moment par rapport à (δ) du vecteur $\vec{V}$ est défini par le produit :

$$\overrightarrow{M}_\delta\left(\vec{V}\right)=\left(\left(\overrightarrow{BA}\wedge\vec{V}\right)\cdot\vec{u}\right)\vec{u}=\left(\vec{u},\overrightarrow{BA},\vec{V}\right)\vec{u}$$

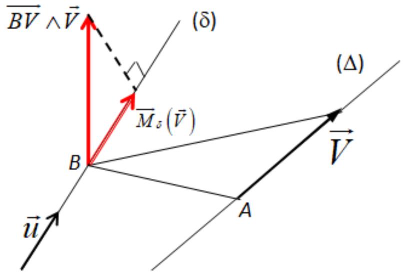

Figure 18 : moment d'un vecteur par rapport à un axe.

Remarque : on peut vérifier que ce moment est indépendant des points *A* et *B* appartenant respectivement à (Δ) et (δ).