# Série N° 3

## Exo1

Montrer que si $x^*$ est un max (local ou global) de $f$, alors $x^*$ est un min (local, global) de "$-f$"

## Exo2 Les fonctions suivantes sont-elles coercives ?

① $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ : $f(x)=x^3-x^2+5$

② $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ : $f(x)=\langle a,x\rangle+b$, $a\in\mathbb{R}^4$, $b\in\mathbb{R}$.

③ $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ $f(x)=a\langle a,x\rangle+b$, $a,b\in\mathbb{R}$.

④ $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $f(x)=2x_1^2+x_2-5$ $\qquad x=(x_1,x_2)$

⑤ $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $f(x)=x_1^2+2x_2^3+x_2^2-x_1$

⑥ $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $f(x)=x_1^2+2x_1+x_2^2$, ⑦ $f(x)=x_1^2+x_2^2-3x_2-5$

⑧ $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ $f(x)=\langle x,x\rangle+\langle a,x\rangle+b$, $a\in\mathbb{R}^4$, $b\in\mathbb{R}$

## Exo3 On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2$$

1. Montrer qu'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}_+^2$ (et les déterminer) tels que

$$f(x,y)\geq\alpha\,\|(x,y)\|^2+\beta \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

En déduire que le pb suivant possède au moins une solution

$$(P_1)\quad \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$$

2. $f$ est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$ [$\mathcal{M}(0,0)$] ?

3. Résoudre le pb $(P_1)$.

## Exo4 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $f(x,y)=x^2+y^2+ax+by+c$, considérons

: le pb $(P_2)=\begin{cases}\min f(x,y)\\ x,y\in\mathbb{R}^2\end{cases}$

1) Montrer que $f$ est elliptique, ② Résoudre le pb $(P_2)$

-PA

**Exercice 5 :**

Considérons un nuage de $n$ points $M_i = (t_i, x_i) \in \mathbb{R}^2$ $i = 1, 2, .., 10$. donnés par le tableau suivant :

| $t_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | $-3$ | 6 | $-3$ | 6 | 3,8 | 5 | $-2$ | 1,4 | 8 |

On cherche la droite de régression de ce nuage, pour cela on utilise la méthode des moindres carrés, comme on n'a pas $x_i = at_i + b$ pour tout $i = 1, 2, \dots 10$, on cherche à minimiser le carré des différences. On veut donc trouver un couple de réels $(a, b)$ solution de

$$(P_1) : \begin{cases} \min J(a,b) \\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

où $J(a,b) = \sum_{i=1}^{10} (x_i - at_i - b)^2$.

1. Compléter le tableau.
2. Calculer le gradient et la matrice hessienne de la fonction $J$.
3. Le problème $(P_1)$ admet-il une solution ? Et-elle unique ?
4. Résoudre le problème $(P_1)$, en déduire l'équation de la droite de régression.

**Exercice 6 :**

On considère le problème de minimisation suivant

$$(P_2) : \begin{cases} \min J(v) \\ v \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

où $J(v) = \frac{1}{2} \langle Av, v \rangle - \langle b, v \rangle$ et $A$ est une matrice symétrique définie positive de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et $v \in \mathbb{R}^n$.

1. Démontrer que
   (a) La fonction $J$ est strictement convexe.
   (b) $J$ est une fonction coercive.
2. Calculer le gradient et la matrice hessienne de la fonction $J$.
3. Montrer que le problème $(P_2)$ admet une seul solution.
4. Résoudre le problème $(P_1)$, en déduire la valeur minimal de $J$.