المحور الثاني: تسوية وإستهلاك القروض بفائدة مركبة

أولا- عمليات الخصم بفائدة مركبة

ثانيا- تسوية القروض بفائدة مركبة

ثالثا- الدفعات المالية بفائدة مركبة

رابعا- استهلاك القروض بفائدة مركبة

تمهيد:

يرتبط مفهوم الفائدة المركبة برسملة الفوائد، فعند كون الفائدة بسيطة، فهذا يعني أن أساس احتسابها هو دائما أصل القرض أو المال الموظف بداية الأمر، و أن الفوائد لا تنتج فوائد أخرى مهما تعددت الوحدات الزمنية التي تحسب بشأنها الفوائد .

أما إذا كانت الفائدة المتفق بشأنها مركبة فهذا يعني أن القرض أو المبلغ الموظف لن يكون دوما هو أساس احتساب الفائدة المستحقة، بل تحسب فوائد كل فترة منقضية على أساس المبلغ الأصلي مضافا إليه الفوائد المتولدة عن الفترات السابقة لها، و عليه يكون أساس احتساب الفائدة في كل مرة يزيد عن أساس الفترة السابقة له بمبلغ الفائدة التي أنتجتها هذه الأخيرة.

إن الفائدة المركبة تقوم على مبدأ رسملة الفوائد، و هذا يعني أنه نهاية كل وحدة زمنية نحتسب فوائدها لتضاف إلى أصل بداية المدة لنشكل مبلغا جديدا يكون أساس احتساب الفوائد للفترة الموالية....

يعطى قانون الفائدة المركبة كما يلي: ليكن

C مبلغ القرض أو التوظيف في بداية المدة؛

n هي مدة القرض أو التوظيف بالسنوات؛

i هي معدل الفائدة للدينار الواحد من المبلغ و لسنة واحدة.

حسب الفرضيات السابقة يمكننا أن نجد أن فائدة السنة الأولى للمبلغ C بالمعدل السنوي i هي: C.i

والجدول التالي يقدم حساب الفوائد و رسملتها نهاية كل سنة بداية من السنة الأولى:

السنوات	رأسمال بداية كل سنة	فوائد السنة	القيمة المحصلة نهاية كل سنة بعد رسملة الفوائد المحتسبة للسنة
1	C	Ci	$C.i$ ....$C(1+i)$
2	$C(1+i)$	$C(1+i)i$	$C(1+i)+C(1+i)i=C(1+i)(1+i)=C(1+i)^2$
3	$C(1+i)^2$	$C(1+i)^2i$	$C(1+i)^2+C(1+i)^2i=C(1+i)^2(1+i)=C(1+i)^3$
.	.	.	.
.	.	.	.

.	.	.	.
$n-1$	$C(1+i)^{n-2}$	$C(1+i)^{n-2}i$	$C(1+i)^{n-2}+C(1+i)^{n-2}i=C(1+i)^{n-2}(1+i)=C(1+i)^{n-1}$
n	$C(1+i)^{n-1}$	$C(1+i)^{n-1}i$	$C(1+i)^{n-1}+C(1+i)^{n-1}i=C(1+i)^{n-1}(1+i)=C(1+i)^{n-1}$

نستنتج من الجدول أن القيمة المحصلة للمبلغ C بعد عدد من الوحدات الزمنية n بمعدل فائدة مركبة i بالمئة لكل وحدة زمنية تعطى بالعلاقة التالية:

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

وهي تمثل القانون الأساسي للفائدة المركبة. كما يمكن كتابة العلاقة نفسها باللوغاريتمات بالشكل التالي:

$$\log . C_n = \log C_0 + n.\log(1+i)$$

ملاحظة: إن قانون الفائدة المركبة يعطي القيمة المحصلة من عملية القرض أو التوظيف بينما قانون الفائدة البسيطة يمدنا بالفائدة مباشرة، و لحساب الفائدة الناتجة عن قانون الفائدة المركبة فإننا نطرح أصل القرض من القيمة المحصلة له أي:

$$I = C_n - C_0 = C_0(1+i)^n - C_0$$

$$I = C_0\left[(1+i)^n - 1\right]$$

أمثلة تطبيقية:

مثال 1: وظف مبلغ 25000 دج ببنك بمعدل فائدة سنوي 10 % و رسملة سنوية لمدة 6 سنوات، أحسب القيمة المحصلة نهاية التوظيف.

$$C_6 = C \cdot (1+i)^6 = 25000(1+0.1)^6 = 25000(1.771561) = 44289$$ دج

مثال 2 : اقترض شخص من البنك مبلغ 30000 دج بمعدل فائدة نصف سنوي 4 % و رسملة نصف سنوية كذلك، إذا كانت مدة القرض 7 سنوات حدد القيمة التي يسددها هذا الشخص للبنك نهاية المدة.

$$C_{14} = C(1+i)^{14} = 30000(1+0.04)^{14} = 30000(1.731676448) = 51950.30 \text{ دج}$$

أولا-عمليات الخصم بفائدة مركبة:

I) خصم القروض بفائدة مركبة:

1) التعريف بالخصم بفائدة مركبة:

سبق وأن تناولنا موضوع الخصم في المحور الأول، فالخصم يعني اقتطاع فائدة من الديون التي تسدد قبل آجال استحقاقها ليدفع للدائن قيمة حالية تقل عن القيمة الاسمية بمقدار الفائدة المتقطعة، و رأينا أن الخصم نوعان، الخصم التجاري و الذي يحتسب اعتمادا على استخدام القيمة الاسمية كحساب للفوائد، و الخصم الصحيح الذي نستند عند حسابه على القيمة الحالية الواجبة السداد تعجيلا بالدفع لحساب الفائدة التي تقتطع، و قد اقتصرت دراستنا للخصم التجاري و الصحيح على المدى القصير فكان الخصم آنذاك بفائدة بسيطة.

عند كون الديون المراد تعجيل دفعها تبعد بأكثر من وحدة زمنية للرسملة عن تاريخ الخصم فإنه يستخدم الخصم بفائدة مركبة. في معالجة الخصم بفائدة مركبة نقتصر على الخصم الصحيح الذي يحتسب على أساس القيمة الحالية الحقيقية و السبب في ذلك يرجع إلى أنه لو اعتمدنا القيمة الاسمية للخصم المركب لزاد الخصم عن أصل الدين إذا طالت المدة و بلغت حدودا معينة، مما يجعل الدائن يواجه بقيمة سالبة أي يكون هو المطالب بالدفع و هذا أمر غير معقول.

2) حساب الخصم بفائدة مركبة:

مثال: قرض قدره 4000 دج يستحق بعد 6 سنوات يخصم بمعدل فائدة 10 % خصما صحيحا، حدد مقدار الخصم الصحيح و القيمة الحالية الصحيحة.

بفرض V_n القيمة الاسمية للقرض و va_R القيمة الحالية الصحيحة.

$$V_n = V_{aR}(1+i)^n \Rightarrow 4000 = va_R(1+0.1)^6 \Rightarrow va_R = \frac{4000}{(1+0.1)^6} \Rightarrow va_R = \frac{4000}{1.771561} = 2257.90 \text{ دج}$$

ومنه قيمة الخصم الصحيح هي: $E_R = V_n - Va_R = 4000 - 2257.90 = 1742.10$ دج

ملاحظة: عمليا لا يستخدم الخصم التجاري بفائدة مركبة، و عليه يحسب دوما الخصم الصحيح.

3) قانون الخصم بفائدة مركبة:

بافتراض أن:

- القيمة الاسمية هي أصل القرض: v_n؛

. معدل الخصم المستخدم i؛

. القيمة الحالية الصحيحة هي va_R؛

-الخصم الصحيح هو E_R؛

. المدة الفاصلة بين تاريخ الخصم و الاستحقاق n ؛

و عليه نكتب :

$$v_n = va_R(1+i)^n \Rightarrow va_R = \frac{v_n}{(1+i)^n} = v_n(1+i)^{-n}$$

$$E_R = v_n - va_R \Rightarrow E_R = v_n - v_n(1+i)^{-n} = v_n\left(1-(1+i)^{-n}\right)$$

مثال:

خصم قرض قيمته 25000 دج يستحق بعد 3 سنوات بمعدل الفائدة 6 % أحسب القيمة الحالية الصحيحة و الخصم الصحيح.

القيمة الحالية الصحيحة:

$$va_R = 25000(1.06)^{-3} = 25000(0.839619283) = 20990.48$$ دج

الخصم الصحيح:

$$E_R = 25000 - 20990.48 = 4009.52$$ دج

4) صافي عملية الخصم:

جرت العادة لدى البنوك التجارية أن تقتطع زيادة على الخصم الصحيح بفائدة مركبة عمولات و مصاريف تحسب بنسبة مئوية من القيمة الاسمية لأصل القروض المخصومة.

مثال:

تم خصم قرض قيمته الاسمية 30000 دج، يستحق بعد 2 سنة بمعدل 7 %، علاوة على الخصم يقتطع البنك عمولة بنسبة 0,2 % و مصاريف تحصيل تقدر بـ 80 دج، حدد صافي خصم القرض؟

القيمة الحالية: $V_a = 30000(1.07)^{-2} = 26203.16$ دج

الخصم الصحيح $E_R = 30000 - 26203.16 = 3796.84$ دج

العمولة هي $30000(0.002) = 60$ دج

المصاريف = 80 دج

صافي الخصم هو:

$$30000 - (3796.84 + 60 + 80) = 26063.16 \text{ دج}$$

ثانيا- تسوية القروض بفائدة مركبة:

1) ماهية و أساس تسوية القروض بفائدة مركبة:

أ) تعريف تسوية الديون بفائدة مركبة:

لقد تناولنا تسوية القروض بفائدة بسيطة، و رأينا أن التسوية قد تتم إما باستخدام الخصم التجاري أو باستعمال الخصم الصحيح.

إن المبدأ يبقى نفسه إلا أننا سوف نستخدم الخصم الصحيح بفائدة مركبة في عملية التسوية لأن الديون المراد تسويتها طويلة الأجل مقارنة بتاريخ التسوية.

و المقصود باستبدال الديون أو تسويتها تعديل مواعيد استحقاق الديون لتتفق مع قدرة المدين على الدفع، و قد يراد منها استبدال مجموعة من الديون بدين واحد يسدد مرة واحدة عند حلول تاريخ معين أو العكس، و قد يسدد المدين بتاريخ الاستبدال جزءا من ديونه و تحديد مواعيد محددة لباقي الدين.

ب) أساس الاستبدال أو التسوية:

يكمن أساس التسوية في أن تتساوى القيمة الحالية لمجموع الديون الملغاة بالقيمة الحالية للديون الجديدة البديلة، و عليه تكون خطوات التسوية هي:

. إيجاد قيمة حالية صحيحة للديون الملغاة بتاريخ التسوية إذا لم تحن آجالها، أما إذا اتفق استحقاقها مع تاريخ التسوية فتحسب بقيمتها الاسمية؛

. إذا كانت الديون الملغاة قد مضت استحقاقاتها يوم التسوية فتكون قيمتها الحالية هي الجملة المركبة للفترة الفاصلة بين تاريخ التسوية و تواريخ الاستحقاق المنقضية.

ملاحظات:

– يجب تساوي القيمة الحالية الحقيقية للديون الملغاة مع القيمة الحالية الحقيقية للديون الجديدة.

– استبعاد ما يسدد من الدين يوم التسوية من القيمة الحالية الصحيحة للديون الملغاة.

– قد يحصل الاتفاق على استبدال مجموعة ديون بدين واحد تكون قيمته الاسمية هي مجموع القيم الاسمية للديون الملغاة التي يهدف إلى توحيد استحقاقها فقط، تعرف هذه الحالة بالاستحقاق المتوسط.

أمثلة تطبيقية:

مثال 1: قرض بقيمة اسمية قدرها 51710.90 دج يستحق بعد 8 سنوات خصم بمعدل 5 %. في نفس اليوم خصم قرض قيمته الاسمية 46903.35 دج يستحق بعد 6 سنوات بمعدل 5 %.

– إن القيمة الحالية الحقيقية:

للقرض الأول: $va_R(1) = 51710.9(1.05)^{-8} = 34999.97 = 35000$ **دج**

للقرض الثاني: $va_R(2) = 46903.35(1.05)^{-6} = 35000$ **دج**

مثال 2: نفترض أن نفس القرضين في المثال السابق قد خصما بتاريخ سابق لتاريخ الخصم الأول بمدة قدرها P سنة و نحسب القيمة الحالية الصحيحة لكل من القرضين.

القيمة الحالية للقرض الأول:

$$va_R(1) = 51710.9(1.05)^{-(8+P)} = 51710.9(1.05)^{-8}(1.05)^{-P} = 35000(1.05)^{-P}$$

القيمة الحالية للقرض الثاني:

$$va_R(2)=46903.35(1.05)^{-(6+P)}=46903.35(1.05)^{-6}(1.05)^{-P}=35000(1.05)^{-P}$$

ملاحظة:

في الخصم بفائدة مركبة إذا كان لقرضين نفس القيمة الحالية الصحيحة في تاريخ ما، فإنهما تكون لهما نفس القيمة الحالية الصحيحة في أي تاريخ آخر.

إذا ثبت التكافؤ لقرضين مختلفين فإنهما يحافظان على هذا التكافؤ عبر كامل الزمن و هو ما لا يحصل في الخصم بفائدة بسيطة.

يعطى القانون العام لتسوية القروض بفائدة مركبة كما يلي:

القيمة الحالية للقرض الجديد = القيمة الحالية للقروض القديمة

حسب هذا القانون فإن عملية تسوية القروض تتم على أساس اتخاذ تاريخ عملية الاستبدال هو المرجع لتحديد شرط التسوية، و المثال التالي يبين ذلك.

مثال:

- **قرض أول قيمته 3000 دج يستحق بعد 2 سنة؛**
- **قرض ثاني قيمته 4500 دج يستحق بعد 1.5 سنة؛**
- **قرض ثالث قيمته 6000 دج يستحق بعد 2.5 سنة.**

استبدلت هذه القروض بقرض وحيد يستحق بعد 3 سنوات، حدد القيمة الاسمية لهذا القرض مع العلم أن معدل الفائدة هو 6 %.

القيمة الحالية للقرض الجديد = القيمة الحالية للقروض القديمة

$$C(1.06)^{-3}=3000(1.06)^{-2}+4500(1.06)^{-1.5}+6000(1.06)^{-2.5}$$

$$C(0.839619283)=3000(0.88999644)+4500(0.916307417)+6000(0.864440959)$$

$$C(0.839619283)=2669.99+4123.38+5186.65\Rightarrow$$

$$C0.839619283=11980.02\Rightarrow C_0=14268.40$$ دج

ج) الاستحقاق المتوسط:

إن الاستحقاق المتوسط هو حالة خاصة للاستحقاق المشترك أو لاستبدال الديون و قد سبقت معرفته، في الاستحقاق المتوسط يشترط أن يكون الدين الجديد (القرض الجديد) له قيمة اسمية مساوية لمجموع القيم الاسمية للديون المستبدلة أو القرضات القديمة.

مثال1: القروض الأربع التالية:

ق 1 = 7000دج يستحق بعد 2 سنة.

ق 2 = 5500دج يستحق بعد 4 سنوات.

ق 3 = 6000 دج يستحق بعد 3 سنوات.

ق 4 = 9000 دج يستحق بعد 5 سنوات.

استبدلت بقرض وحيد قيمته الاسمية 27500 دج، إذا كان معدل الفائدة هو 10 %، حدد تاريخ استحقاق القرض الوحيد؟

مادامت القيمة الاسمية للقرض الجديد تساوي مجموع القيم الاسمية للقروض المستبدلة فنحن هنا بصدد الاستحقاق المتوسط، اعتمادا على شرط التسوية عند تاريخ الاتفاق نكتب المعادلة التالية:

$$27500(1.1)^{-P} = 7000(1.1)^{-2} + 5500(1.1)^{-4} + 6000(1.1)^{-3} + 9000(1.1)^{-5} \Rightarrow$$

$$27500(1.1)^{-P} = 5785.12 + 3756.57 + 4507.89 + 5588.30 = 19637.88 \Rightarrow$$

$$(1.1)^{-P} = 0.7141047727 \Rightarrow -P.\log(1.1) = \log 0.714104727 \Rightarrow P = 3.53 \text{ سنة}$$

أي: 3 سنوات و 6 أشهر و 11 يوم

مثال2: القروض الثلاثة الآتية:

ق 1 = 6000دج يستحق بعد سنة؛

ق 2 = 5000 دج يستحق بعد سنة؛

ق 3 = 4000 دج يستحق بعد سنة و نصف.

استبدلت بقرض واحد يستحق بعد 1.13 سنة بمعدل 5 %، حدد القيمة الاسمية للقرض الجديد.

$$C(1.05)^{-1.13} = 6000(1.05)^{-1} + 5000(1.05)^{-1} + 4000(1.05)^{-1.5}$$

$$C(0.9463593)=5714.28+4761.90+3717.17=14193.35$$

$C_0 = 14997.85 \approx 15000$ دج

ما دامت القيمة الاسمية للقرض الجديد تساوي مجموع القيم الاسمية للقروض المستبدلة فنحن أمام حالة الاستحقاق المتوسط لمجموعة قروض.

ثالثا– الدفعات المالية بفائدة مركبة:

I) تعريفها و أنواعها:

1) تعريف الدفعات المالية:

تمثل الدفعات المالية عدة تسديدات من المال ذات قيم متساوية تودع أو تستحق أو تدفع على فترات زمنية متساوية، و تكون هذه الدفعات بفائدة مركبة في حالة ما إذا كانت مدتها تزيد عن السنة.

2) أنواع الدفعات المالية:

تقسم الدفعات استنادا إلى تحديد فترة استثمارها أو استحقاقها أو من حيث بداية الاستثمار إلى ما يلي:

أ) الدفعات المتساوية المؤكدة: و تمثل دفعات محدودة العدد إذ تحدد لها بداية الدفع و نهايته و عليه فإن زمانها محدد.

ب) الدفعات المتساوية غير المؤكدة: و هي دفعات مؤجلة لا يحدد تاريخ بدءها لأنه يتوقف على حدث معين لا يمكن التنبؤ به، و عادة يحصل هذا النوع من الدفعات في حالات التأمين و تعرف أيضا بالدفعات المؤجلة.

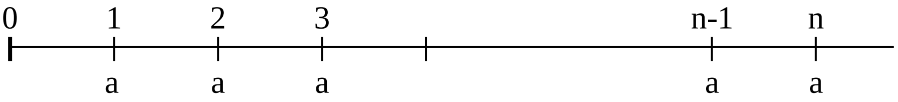
ج) الدفعات المتساوية الدائمة: يستمر هذا النوع من الدفعات إلى مدة غير محددة، فهي تدفع بلا انقطاع.

II) حساب دفعات السداد (العادية):

1) حساب الجملة المركبة:

نفترض أن شخصا يسدد دينا بواسطة دفعات سنوية لنهاية السنة، كل منها a، عدد n، و معدل الفائدة هو i

إن الجملة المركبة عند نهاية المدة يمكن كتابتها



$$v_n = a\,(1+i)^{n-1} + a\,(1+i)^{n-2} + \cdots\cdots + a\,(1+i)^{1} + a\,(1+i)^{0}$$

يلاحظ أن الجملة تمثل متوالية هندسية أساسها هو $(1+i)$ **و عليه يمكن كتابتها**

$$v_n = a\,\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} = a\,\frac{(1+i)^n - 1}{i} = v_n$$

مثال: يسدد شخص قرضا بخمس دفعات متساوية لنهاية السنة. فإذا كانت قيمة الدفعات هي 1000 دج، أوجد الجملة المركبة لما يسدده نهاية المدة إذا كان معدل الفائدة هو 5 % .

$$v_5 = a\,(1+i)^4 + a\,(1+i)^3 + a\,(1+i)^2 + a\,(1+i)^1 + a\,(1+i)^0$$

$$v_5 = a\,\frac{(1+i)^5 - 1}{i} = 1000\,\frac{(1{,}05)^5 - 1}{0{,}05} = 5525{,}63 \text{ دج}$$

2) حساب متغيرات الجملة المركبة:

أ) حساب قيمة الدفعة:

مثال: سدد مدين ما عليه من قروض بستة (6) دفعات متساوية لنهاية السنة، و لقد بلغت الجملة المركبة للدفعات المسددة بمعدل 6 % : 17438.29 دج ، حدد مقدار الدفعة الثابتة.

$$v_n = 17438.29 = a\,\frac{(1.06)^6 - 1}{0.06} = 6.975318538.a \Rightarrow a = \frac{17438.29}{6.975318538} = 2500 \text{ دج}$$

ب) حساب معدل الفائدة:

مثال: **تمكن شخص من سداد ما عليه من قروض بواسطة 5 دفعات عادية لنهاية السنة قيمة كل منها 800 دج، و لقد بلغت جملة الدفعات المركبة نهاية المدة 4600.60 دج، حدد معدل الفائدة المطبق؟**

دج

$$V_n = 4600.60 = 800\frac{(1+i)^5 - 1}{i} \Rightarrow \frac{(1+i)^5 - 1}{i} = 5.75075$$

ج) حساب عدد الدفعات الثابتة:

مثال: **تحصيلا للقروض الممنوحة حصل البنك دفعات متساوية لنهاية السنة بقيمة 1000 دج للوحدة. فإذا علمت أن الجملة المركبة بلغت 5525.63 دج و أن معدل الفائدة المطبق هو 5 % حدد عدد الدفعات؟**

$$5525.63 = 1000\frac{(1.05)^n - 1}{0.05} \Rightarrow \frac{(1.05)^n - 1}{0.05} = 5.52536$$

$$(1.05)^n - 1 = 0.2762815 \Rightarrow (1.05)^n = 1.2762815 \Rightarrow$$

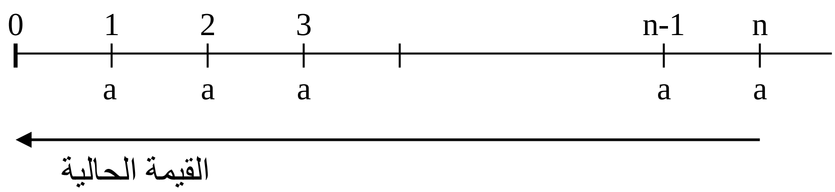
$$n.\log 1.05 = \log 1.2762815 \Rightarrow n(0.021189299) = 0.105946474 \Rightarrow$$

$$n = \frac{0.105946474}{0.021189299} = 4.99 \approx 5$$ **دفعات**

III) حساب القيمة الحالية لسلسلة دفعات ثابتة (عادية):

1) قانون حساب القيمة الحالية:

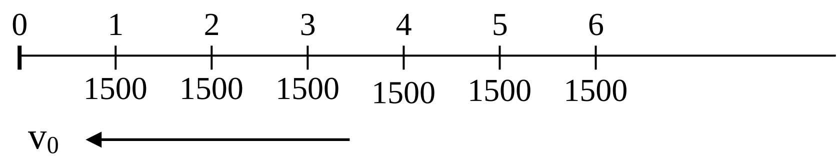
تمثل القيمة الحالية أو الأصلية لسلسلة دفعات ثابتة عادية مجموع المبالغ الحالية المعبر عنها بمدة محددة قبل تاريخ سداد أول دفعة من السلسلة، و المخصوصة بالمعدل i



$$v_0 = a\,(1+i)^{-n} + a\,(1+i)^{-(n-1)} + \dots\dots\dots + a\,(1+i)^{-2} + a\,(1+i)^{-1}$$

$$v_0 = a\,(1+i)^{-n}\,\frac{(1+i)^{n}-1}{i} = a\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = v_0$$

مثال: **أحسب القيمة الحالية لسلسلة دفعات سنوية عادية عددها 6 دفعات بقيمة ثابتة للوحدة 1500 دج بمعدل فائدة 6 % (القيمة الحالية بداية المدة)**



$$v_0 = 1500(1.06)^{-6} + 1500(1.06)^{-5} + \dots\dots\dots\dots + 1500(1.06)^{-1}$$

$$v_0 = 1500\,\frac{1-(1.06)^{-6}}{0.06} = 1500(4.917324326) = 7375.98 \text{ دج}$$

ملاحظات:

إن معادلة القيمة الحالية $v_0 = a\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ **تحسب القيمة الحالية بالتاريخ الأصلي (أي سنة قبل سداد أول دفعة) و ليس بتاريخ أول دفعة مسددة.**

العلاقة بين الجملة المحصلة v_n **و القيمة الحالية** v_0 **: إن مفهوم كل من القيمتين، طريقة إعداد قانون كل منهما، و حتى معادلتي احتساب كل واحدة منهما تبين أن:**

$$v_n = v_0 (1+i)^{n} \quad \text{و} \quad v_0 = v_n (1+i)^{-n}$$

2) حسابات رقمية على قانون القيمة الحالية:

أ) حساب الدفعة المتساوية:

مثال: تبلغ القيمة الحالية لسلسلة دفعة متساوية **9834.35** دج،عددها **6**،معدل الخصم **6 %**، أحسب قيمة كل دفعة؟

$$9834.35=a\frac{1-(1.06)^{-6}}{0.06}=a\,(4.917324326)\Rightarrow a=\frac{9834.35}{4.917324326}\approx 2000 \text{ دج}$$

ب) حساب عدد الدفعات:

مثال: تبلغ القيمة الحالية لسلسلة دفعات عادية **16987.81** دج، قيمة كل منها **2200** دج، سعر الخصم المطبق هو **5 %**، حدد عدد الدفعات المسددة.

$$v_0=16987.81=2200\frac{1-(1.05)^{-n}}{0.05}\Rightarrow$$

$$\frac{1-(1.05)^{-n}}{0.05}=7.721733\Rightarrow 1-(1.05)^{-n}=0.386086666\Rightarrow$$

$$0.6139133333=(1.05)^{-n}\Rightarrow -n.\log(1.05)=\log.0.6139133333\Rightarrow$$

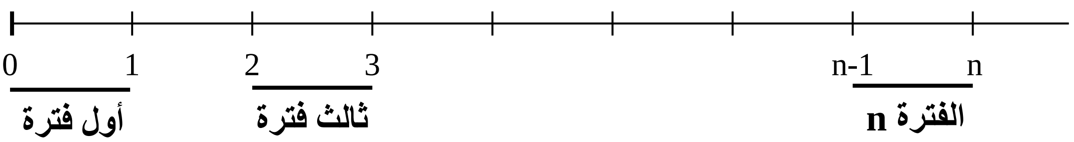
$$-n\,(0.021189299)=-0.211892934\Rightarrow n=\frac{0.211892934}{0.021189299}=10 \text{ دفعات}$$

IV) حالات خاصة للدفعات بفائدة مركبة:

I) حالات خاصة بالدفعات المتساوية:

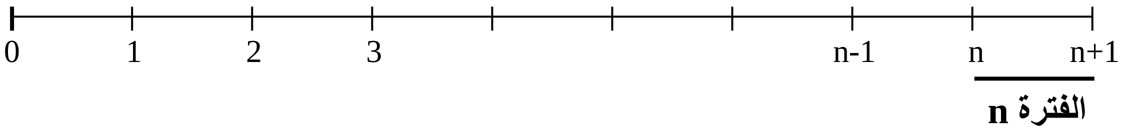
1) دفعات آخر المدة ودفعات بداية المدة:

لغاية الآن تطرقنا لدفعات آخر الفترة و تسمى بدفعات آخر المدة.



$$v_n=a\frac{(1+i)^n-1}{i}\text{ ،}\quad v_0=a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

إن سلسلة الدفعات يمكن تصورها تتفق والمخطط التالي:



إن هذه الدفعات تسدد بداية الفترة (الفترة 1، الفترة 2،.........، الفترة n)

تسمى هذه الدفعات بدفعات بداية المدة

V_n **(بتاريخ n+1)** $= a\,\frac{(1+i)^n-1}{i}(1+i) = a\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right]$

V_0 **(بداية السنة 1)** $= a\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)$

2) الاستحقاق المتوسط لسلسلة دفعات ثابتة:

. لنفهم إن الدفعات n تمثل قرضات تجارية القيمة الاسمية لكل منها هي a و استحقاقاتها على الترتيب هي 1، 2، 3، .... n.

. لنفرض أن قرضا قرضيا قيمته $n.a=V$ **و استحقاقه** X **انطلاقا من التاريخ الأصلي لمجموع الدفعات السابقة.إذا كان:**

$$n.a\,(1+i)^{-X} = a\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

نقول أن الاستحقاق X **يمثل الاستحقاق المتوسط لسلسلة الدفعات المعطاة**

$$(1+i)^{-X} = \frac{a}{n.a}\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) \Rightarrow (1+i)^{X} = n.\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

ملاحظة: إن الاستحقاق المتوسط بفائدة مركبة غير مستقل عن معدل الفائدة.

مثال: لدينا سلسلة دفعات سنوية لنهاية المدة عددها 12 ، إذا كان معدل الفائدة المطبق هو 10 % سنويا. أحسب الاستحقاق المتوسط لهذه القروض؟

الحل: $(1.10)^X = 12\frac{0.10}{1-(1.10)^{-12}} = 12\frac{0.1}{0.681369182} = 1.761159782 = (1.1)^X \Rightarrow$

$$\log.1.761159782 = X.\log 1.1 \Rightarrow 0.245798759 = X.0.041392685 \Rightarrow$$

$$X = \frac{0.245798759}{0.041392685} = 5.93821732$$ سنة

x = 5 سنوات و 11 شهر و 8 أيام.

II) مقارنات رؤوس الأموال و القروض:

1) مقارنة جملة دفعات بدفعة واحدة:

مثال: خير شخص بين تحصيل 12 دفعة سنوية لنهاية المدة بقيمة 1500 دج للواحدة أو تحصيل دفعة واحدة بقيمة 20315 دج بعد 8 سنوات، معدل الفائدة 5 %

يمكن إجراء المقارنة سواء بالتاريخ الأصلي 0، أو عند نهاية الدفعات أي التاريخ 12.

أ) عند التاريخ الأصلي:

القيمة الحالية للدفعات:

$$1500\frac{1-(1.05)^{-12}}{0.05} = 13294.88$$ دج

القيمة الحالية للدفعة الواحدة:

$$20315(1.05)^{-8} = 13750$$ دج

و عليه يكون تحصيل الدفعة الواحدة بعد 8 سنوات أحسن من تحصيل الدفعات الإثني عشر.

ب) عند تاريخ آخر دفعة من 12:

القيمة المحصلة للدفعات:

$$a\frac{(1+i)^{12}-1}{i} = 1500\frac{(1.05)^{12}-1}{0.05} = 23875.68$$ دج

القيمة المحصلة للدفعة الواحدة:

$$a.(1+i)^4 = 20315(1.05)^4 = 24693$$ دج

و تكون الدفعة الوحيدة بعد 8 سنوات أفضل من الدفعات السنوية الـ 12.

2) مقارنة سلسلة دفعات معينة بسلسلة دفعات أخرى:

مثال: **يطلب منك مقارنة سلسلة دفعات سنوية بقيمة 2000 دج للوحدة تبدأ بنهاية السنة الثالثة بعد التاريخ الأصلي عددها 7، و سلسلة دفعات سنوية أخرى عددها 9 بقيمة 1747.56 للواحدة تبدأ من السنة الرابعة بعد التاريخ الأصلي، معدل الفائدة 6 %.**

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	السلسلة الأولى		a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	$a_1 = 2000$					
	السلسلة			a_2	a_2	a_2	a_2	a_2	a_2	a_2	a_2	a_2	$= 1747.56$	

أ) المقارنة عند التاريخ الأصلي (0):

القيمة الحالية للسلسلة الأولى:

$$a\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{0.06}(1.06)^{-2}=2000\frac{1-(1.06)^{-7}}{0.06}(1.06)^{-2}=9936.59 \text{ دج}$$

القيمة الحالية للسلسلة الثانية:

$$a\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{0.06}(1+i)^{-3}=1747.56\frac{1-(1.06)^{-9}}{0.06}(1.06)^{-3}=9980.02 \text{ دج}$$

إن السلسلة الثانية تكون أفضل بالنسبة للقابض بينما تكون السلسلة الأولى الأفضل بالنسبة للمسدد.

ب) المقارنة بتاريخ آخر دفعة للسلسلة الثانية:

القيمة المحصلة للسلسلة الأولى:

دج

$$a\,\frac{(1+i)^{n}-1}{i}(1+i)^{3}=2000\frac{(1.06)^{7}-1}{0.06}(1.06)^{3}=2000(8.39383765)(1.191016)=19994.38$$

القيمة المحصلة للسلسلة الثانية:

$$1747.56\frac{(1.06)^{9}-1}{0.06}=20081.76 \text{ دج}$$

المقارنة الثانية تؤكد أن السلسلة الثانية في صالح المستفيد أما السلسلة الأولى فهي لصالح المسدد.

رابعا- استهلاك القروض بفائدة مركبة:

I) استهلاك القروض غير القابلة للتجزئة (العادية).

1) مفهوم الحساب الجاري الطويل الأجل.

مثال: بتاريخ 01 مارس 1999 أ دفع لـ ب : 5000 دج؛

بتاريخ 01 مارس 2003 أ قبض من ب : 2000 دج؛

بتاريخ 01 مارس 2004 أ قبض من ب : 3000 دج.

إن المبالغ المدفوعة من الطرفين تنتج فوائد مركبة بالمعدل السنوي 10 % .

يطلب منك تحديد رصيد ب بتاريخ 01 مارس 2005 مع الأخذ بعين الاعتبار الفوائد الناتجة عن العمليات المنجزة .

ا) حسب الطريقة المباشرة:

الحساب الجاري بفائدة للسيد ب لدى السيد أ

المدين			حساب السيد ب الدائن
01 مارس 1999	5000	01 مارس 2003 01 مارس 2004	2000 3000

إن رصيد الحساب يتوقف على المبالغ المسجلة إضافة إلى الفوائد التي تنتجها. لنحسب الجمل المحصلة للتسجيلات المختلفة بتاريخ 01 مارس 2005.

الجملة المحصلة للجانب المدين من الحساب بتاريخ 01 مارس 2005.

$$5000 \times (1.1)^6 = 8857.80$$

الجملة المحصلة للجانب الدائن من الحساب بتاريخ 01 مارس 2005

$$2000 \times (1.1)^2 + 3000 \times (1.1) = 2420 + 3300 = 5720$$

و عليه يكون رصيد السيد (ب) لدى(أ) بتاريخ 1 مارس 2005 مدينا بـ:

$$8857.80 - 5720 = 3137.80$$

فإذا رمزنا لهذا الرصيد بـ: S_{05} يمكننا أن نكتب:

$$S_{05}=5000(1.1)^6-(2000\times1.1^2+3000\times1.1)=3137.80$$

ب) حسب الطريقة الهمبورجية:

يتمثل مبدأ الطريقة في تحديد رصيد الحساب بعد كل عملية (بدءا من العملية الأولى)، حساب فوائد الرصيد إلى غاية العملية الموالية المغيرة للرصيد.

بعدها نقوم بتحديد الرصيد الناتج عن تسجيل العملية الجديدة و حساب فوائده إلى تاريخ العملية الموالية.

ثم نستمر بهذا العمل حتى تاريخ قفل الحساب.

و عليه:

$S_{99}=5000$ **: الرصيد بتاريخ 01 مارس 1999**

$S_{03}=5000(1.1)^4-2000=5320,50$ **: الرصيد بعد عملية 01 مارس 2003**

$S_{04}=5320.50(1.1)-3000=2852,55$ **: الرصيد بعد عملية 01 مارس 2004**

$S_{05}=2852.55(1.1)=3137,80$ **: الرصيد بتاريخ 01 مارس 2005**

إن هذا الرصيد هو نفسه الذي حدد باستخدام الطريقة المباشرة.

2) مفهوم اهتلاك القرض:

حصل قرض بالشروط التالية:

- مبلغ القرض K و نرمز له كذلك بالرمز D_0 (مبلغ الدين بتاريخ إبرام القرض)

- خدمة القرض مضمونة بـ: n دفعة سنوية: $a_1,a_2,\ldots\ldots,a_n$

يسددها المقترض بالتواريخ : $1,2,\ldots\ldots,n$

- معدل الفائدة i لكل دينار للسنة.

ا) التسديد مرة واحدة نهاية المدة (انتهاء n سنة):

وفق هذه الطريقة المقترض يكتفي بسداد الفوائد السنوية فقط للمقرض نهاية كل سنة دون أن يسدد أي جزء من أصل القرض، نهاية المدة يسدد فوائد الوحدة الزمنية الأخيرة إضافة إلى القرض بكامله.

ب) الاهتلاك التدريجي:

حسب الاهتلاك التدريجي فإن المقترض يسدد نهاية كل وحدة زمنية مبلغا يزيد عن الفوائد المترتبة على نفس الوحدة و يشكل الفارق تسديدا لجزء من أصل القرض أي اهتلاكا لجزء من القرض، و هكذا يكون الحال نهاية كل وحدة زمنية حتى يسدد كامل القرض نهاية آخر وحدة زمنية.

بالنسبة لأول تسديد تكون الدفعة:

$$a_1 = m_1 + k.i$$

حيث m_1 **أول اهتلاك،** $k.i$ **فوائد السنة الأولى.**

بعد انقضاء السنة الأولى و تسديد أول دفعة يكون مبلغ القرض المتبقي:

$$D_1 = k - m_1 = D_0 - m_1$$

و تكون الدفعة الثانية

$$a_2 = D_1 \cdot i + m_2$$

مما يجعل القرض المتبقي

$$D_2 = D_1 - m_2 = D_0 - m_1 - m_2$$

بانتهاء السنة n **من القرض فإن المقترض يسدد:**

$$a_n = D_{n-1} \cdot i + m_n$$

إن الاهتلاك m_n **يمثل الباقي من القرض بداية آخر وحدة زمنية (n).**

مما سبق يمكننا استخلاص جدول الاهتلاك كما يلي:

المدة	القرض بداية المدة D	فوائد المدة D_i	الاهتلاك M	الدفعة المسددة نهاية المدة
1	D_0 أو K	$Ki = D_0i$	m_1	$a_1=D_0i+m_1$
2	$D_1=D_0-m_1$	D_1i	m_2	$a_2=D_1i+m_2$
3	$D_2=D_1-m_2$	D_2i	m_3	$a_3=D_2i+m_3$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
P	$D_{p-1}=D_{p-2}-m_{p-1}$	$D_{p-1}i$	m_p	$a_p=D_{p-1}i+m_p$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
n−1	$D_{n-2}=D_{n-3}-m_{n-2}$	$D_{n-2}i$	m_{n-1}	$a_{n-1}=D_{n-2}i+m_{n-1}$
N	$D_{n-1}=D_{n-2}-m_{n-1}$	$D_{n-1}i$	m_n $K=D_0$	$a_n=D_{n-1}i+m_n$

ملاحظات:

– إن مجموع الاهتلاكات $m_1,m_2,.....m_n$ يساوي أصل القرض K أو D_0.

– الاهتلاك m_n المتضمن بالدفعة a_n ينهي القرض و هو يساوي إلى D_{n-1} أي القرض بداية الوحدة الزمنية الأخيرة n.

3) قواعد الاهتلاك التدريجي. إن مبلغ القرض K (D_0) الذي يمنحه المقرض للمقترض بالتاريخ 0، و الدفعات $a_1,a_2.....a_n$ التي يسدد المقترض للمقرض نهاية الوحدات الزمنية 1,2,3,.......n تمثل عمليات يمكن أن تمثل تسجيلات بحساب جاري.

<table>
<tr><td colspan="2">المدين   الحساب الجاري للمقترض لدى المقرض   الدائن</td></tr>
<tr><td>الزمن 1
a_1</td><td>الزمن 0
K</td></tr>
</table>

الزمن 2 a_2 الزمن 3 a_3 . . الزمن p a_p . . الزمن n a_n	

- إنّ تسديد الدفعة الأخيرة n ينهي وجود القرض، و عليه يمكننا القول أن الحساب الجاري بفائدة له رصيد منعدم بعد تسجيل آخر دفعة و بإدراج الفوائد الناتجة عن كل العمليات، وعليه نكتب:

$$K(1+i)^n-\left[a_1(1+i)^{n-1}+a_2(1+i)^{n-2}+......+a_p(1+i)^{n-p}+......+a_{n-1}(1+i)+a_n\right]=0$$

من هذه المعادلة يمكن استخلاص:

- القاعدة الأولى:

إن الجملة المحصلة للقرض نهاية المدة تساوي مجموع الجمل المحصلة بنفس التاريخ لمجموع التدفقات التي سدد بواسطتها القرض أي:

$$K(1+i)^n-\left[a_1(1+i)^{n-1}+a_2(1+i)^{n-2}+.........+a_p(1+i)^{n-p}+...........a_{n-1}(1+i)+a_n\right]=0$$

– بضرب طرفي المعادلة السابقة بالمقدار $(1+i)^{-n}$ فنحصل على:

$$K=a_1(1+i)^{-1}+a_2(1+i)^{-2}+......+a_p(1+i)^{-p}+......+a_{n-1}(1+i)^{-(n-1)}+a\,(1+i)^{-n}$$

و بالتمعن في المعادلة الناتجة نستخلص:

– القاعدة الثانية:

إن مبلغ القرض يساوي إلى مجموع القيم الحالية للدفعات التي سدد بواسطتها القرض بالزمن 0 تاريخ إبرام القرض.

ونلاحظ أن القاعدة الأولى و الثانية تترجم التكافؤ ما بين مبلغ القرض و الدفعات التي يسدد بواسطتها، حسب القاعدة الأولى التكافؤ قائم على أساس الفترة n، أما في القاعدة الثانية فالتكافؤ مؤسس بناء على تاريخ إبرام القرض (الفترة 0).

– لنحدد رصيد الحساب الجاري مباشرة بعد سداد الدفعة p ، إن هذا الرصيد يساوي إلى الفرق بين التسجيل المدين مضافا إليه فوائده و التسجيلات الدائنة مضافا إليها فوائدها.

$$S_p=K(1+i)^p-\left[a_1(1+i)^{p-1}+a_2(1+i)^{p-2}+..............+a_{p-1}(1+i)+a_p\right]$$

إن الرصيد S_p للحساب الجاري بفائدة يمدنا بالمبلغ D_p الذي يعتبر هو باقي القرض بعد سداد الدفعة p و عليه نستخلص:

– القاعدة الثالثة:

بعد سداد الدفعة p يمكن اعتبار الحساب الجاري للمقترض ممثلا لقرض مبلغه D_p يهتلك بواسطة الدفعات المتبقية (n–p) التي تسدد مستقبلا.

– القاعدة الرابعة:

إنّ مبلغ القرض المتبقي بعد سداد الدفعة p يساوي إلى مجموع القيم الحالية معبرا عنها بنفس التاريخ p للدفعات المتبقية (n–p) و التي تسدد مستقبلا.

II) اهتلاك القروض بالدفعات الثابتة أو المتساوية:

1) إعداد جدول اهتلاك القرض:

أ) قانون احتساب الدفعة:

بافتراض أن a تمثل الدفعة السنوية الثابتة، n عدد الدفعات اللازمة لسداد القرض كما تمثل مدة القرض، i يعبر عن معدل الفائدة، أما $D_0 = k$ فهي أصل القرض.

إن القاعدة الثابتة المذكورة سابقا تسمح بكتابة:

$$K = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \quad \text{أو} \quad a = K\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

ب) مثال مع جدول الاهتلاك:

اقترض شخص من القرض الشعبي الجزائري مبلغ: 400.000 دج بمعدل فائدة 10 % سنويا لمدة 6 سنوات، إن خدمة الدين تضمنها دفعات سنوية ثابتة على مدار المدة.

- أحسب مبلغ الدفعة؟

$$a = 400000\frac{0,1}{1-(1.1)^{-6}} = 91842,95$$

جدول الاهتلاك (الوحدة: دج)

الدفعة المتساوية a	الاهتلاك m	فوائد الفترة D_i	القرض بداية الفترة D	الفترة
91.842.95	51.842.95	40.000.00	**D_o = 400.000.00**	1
91.842.95	51.027.25	34.815.70	**D_1 = 34.8157.05**	2
91.842.95	62.729.97	29.102.98	**D_3 = 291.129.80**	3
91.842.95	69.002.97	22.839.98	**D_4 = 228.399.83**	4
91.842.95	75.903.27	15.939.68	**D_5 = 159.396.86**	5
91.842.95	83.493.59	08.349.36	**D_6 = 083.493.59**	6
/	400.000,00	/	/	$\sum$

ج) اختبارات على جدول الاهتلاك:

يمكننا من خلال الجدول أن نتأكد من صحة القواعد التي استخلصت سابقا:

- الجملة المحصلة للقرض = مجموع الجمل المحصلة للدفعات المسددة للقرض

$$400000(1.1)^6 = 91842.95(1.1)^5 + 91842.95(1.1)^4 + 91842.95(1.1)^3$$
$$+91842.95(1.1)^2 + 91842.95(1.1)^1 + 91842.95$$

$$708624.40 = 91842.95 \times \frac{1.1^{6}-1}{0.1} = 91842.95 \times (7.71561) = 708624.40$$

– قيمة القرض عند تاريخ إبرامه = مجموع القيم الحالية لدفعات التسديد تاريخ إبرام العقد

$$400000 = 91842.95(1.1)^{-6} + 91842.95(1.1)^{-5} + 91842.95(1.1)^{-4} + 91842.95(1.1)^{-3}$$
$$+91842.95(1.1)^{-2} + 91842.95(1.1)^{-1} = 91842.95 \times \frac{1-1.1^{-6}}{0.1}$$

$$= 91842.95 \times (4.355260699) = 400000$$

– على افتراض أن p = 3 لنتأكد من القاعدة التالية:

باقي القرض بعد سداد P (3) دفعات = رصيد حساب المقترض بعد سداد الدفعة P (3)

$$228399.83 = 400000(1.1)^3 - \left(91842.95(1.1)^2 + 91842.95(1.1)^1 + 91842.95(1.1)^0\right)$$
$$= 532400 - \left(91842.95\frac{(1.1^3-1)}{0.1}\right) = 532400 - 304000.17 = 228399.83$$

– نفترض أنه سددت أربع دفعات (p = 4) و نتأكد من القاعدة الرابعة.

باقي القرض بعد سداد أربع دفعات P (4) دفعات = مجموع القيم الحالية للدفعات المتبقية لسداد القرض.

$$159396.86 = 91842.95(1.1)^{-2} + 91842.95(1.1)^{-1}$$

$$= 75903.26 + 83493.60 = 159396.86$$

– إن اختبار الجدول يؤكد أن مجموع الاهتلاكات يساوي إلى قيمة أصل القرض المبرم بداية المدة.

– إن باقي القرض بداية كل وحدة زمنية يتناقص من كل وحدة زمنية إلى التي تليها لكوننا نسدد جزءا من القرض بانتهاء كل وحدة زمنية، و نتيجة لهذا التناقص فإن الفوائد المدفوعة كل وحدة

زمنية و التي تليها تتناقص تدريجيا، أما الأجزاء المهتلكة من الأصل في كل وحدة زمنية فهي تتزايد من كل وحدة منها إلى التي تليها. كل هذا يلاحظ بجلاء بجدول الاهتلاك السابق.

– إن آخر اهتلاك و الذي ينهي القرض تماما يساوي بالفعل ما تبقى من القرض بداية الوحدة الزمنية الأخيرة.

2) قوانين الاهتلاكات في حالة الاهتلاك بالدفعات المتساوية:

أ) العلاقة بين الاهتلاكات:

تأكدنا من أن الاهتلاكات تتزايد مع نقصان عمر القرض أي المتبقي من أجله، و يمكننا بسهولة أن نتبين أن الاهتلاكات تشكل متوالية هندسية متزايدة أساسها هو (1+i) أي 1.1 في جدول الاهتلاك السابق.

. فلو قارنا بين تسديدين متتاليين رتبتهما هي p و p+1 فإن:

$a_p = D_{p-1} i + m_p \ldots\ldots 1$ و نعلم أن $a_{p+1} = D_p i + m_{p+1} \ldots\ldots 2$

$D_p = D_{p-1} - m_p$ أو $D_{p-1} = D_p + m_p$

فإذا عوضنا في 1 عن D_{p-1} بما يساويها $D_p + m_p$ نحصل على

$$a_p = \left(D_p + m_p\right) i + m_p = D_p i + m_p i + m_p$$

و حيث أن $a_{p+1} = a_p$ فإننا نحصل:

—— a_p —— — a_{p+1} — $D_p i + m_p i + m_p = D_p i + m_{p+1} \Rightarrow m_p(1+i) = m_{p+1}$

– استنتاج: إذا أهتلك قرض بتسديدات متساوية، فإن الاهتلاكات التي تتضمنها هذه التسديدات تشكل متوالية هندسية تصاعدية أساسها (1+i) و عليه يمكن أن نكتب:

$$m_p = m_1 \cdot (1+i)^{p-1}$$

بالتناظر إذا كانت الاهتلاكات المتضمنة في تسديدات قرض على شكل متوالية هندسية تصاعدية أساسها (1+i) فإن تسديدات القرض تكون متساوية أو ثابتة.

ب) قانون أول اهتلاك:

نعلم أن مجموع الاهتلاكات يساوي أصل القرض، و علمنا أن الاهتلاكات تشكل متوالية هندسية متزايدة أساسها (1+i).

اعتمادا على أول الاهتلاك m_1 يمكننا التعبير عن القرض بالمعادلة:

$$K = m_1 \frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow m_1 = K \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

كذلك انطلاقا من قيمة الدفعة الأولى:

$$a_1 = k.i + m_1 \Rightarrow$$

$$m_1 = a_1 - k.i \Rightarrow m_1 = k \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} - k_i$$

- في جدول الاهتلاك السابق نتأكد:

. حسب المعادلة الأولى:

$$m_1 = 400000 \frac{0.1}{(1.1)^6 - 1} = 400000 \frac{0.1}{0.771561} = 400000(0.12960738)$$

$$m_1 = 51842.95$$

. حسب المعادلة الثانية:

$$m_1 = 400000 \frac{0.1}{1-(1.1)^{-6}} - 400000(0.1) = 400000 \frac{0.1}{0.435526069} - 400000$$

$$m_1 = 400000(0.22960738) - 400000 = 51842.95$$

ج) قانون آخر اهتلاك:

من جدول الاهتلاكات و بآخر سطر يمكننا أن نقرأ:

و حيث أن:

$$a_n = D_{n-1} i + m_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, m_n = D_{n-1}$$

يمكننا استخلاص أن:

$$a_n = m_n \cdot i + m_n = m_n(1+i) \Rightarrow$$

$$m_n = a_n(1+i)^{-1}$$

. في جدول الاهتلاك السابق نتأكد أن:

$$m_n = 91842.95(1.1)^{-1} = 91842.95(0.909090909) = 83493.59$$

د) القرض المستهلك بعد سداد الدفعة الثابتة P:

بكل تأكيد فإن القرض المستهلك بعد تسديد الدفعات P هو مجموع الاهتلاكات الأولى P، أي:

$$m_1 \frac{(1+i)^p - 1}{i} = K \frac{i}{(1+i)^n - 1} \cdot \frac{(1+i)^p - 1}{i} = K \frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}$$

. في جدول الاهتلاك السابق و بافتراض أن الدفعات هي ثلاثة (p=3).

القرض المستهلك من الجدول:

$$51842.95 + 57027.25 + 62729.97 = 171600.17$$

حسب القانون المستخلص:

$$K \frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1} = 400000 \frac{(1.1)^3 - 1}{(1.1)^6 - 1} = 400000 \frac{0.331}{0.771561} = 171600.17$$

هـ) القرض المتبقي بعد سداد الدفعة P أي D_P:

– إن القرض المتبقي بعد سداد الدفعة p سوف يساوي بالتأكيد الفرق بين أصل القرض و الجزء المهتلك بعد سداد الدفعة المعلنة P أي:

$$D_P = K - K\frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1} = K\frac{\left[(1+i)^n - 1\right] - \left[(1+i)^p - 1\right]}{(1+i)^n - 1} \Rightarrow$$

$$D_P = \frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}K \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

إن القاعدة الثالثة المعلن عنها فيما سبق تسمح لنا بكتابة:

$$D_P = K(1+i)^p - a\frac{(1+i)^p - 1}{i} \Rightarrow$$

$$D_P = K(1+i)^p - K\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}.\frac{(1+i)^p - 1}{i} \Rightarrow D_P = K(1+i)^p - K\frac{(1+i)^p - 1}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$D_P = \frac{k(1+i)^p - k(1+i)^{p-n} - (1+i)^p + 1}{1-(1+i)^{-n}} \Rightarrow K\frac{(1+i)^p - (1+i)^{p-n} - (1+i)^p + 1}{1-(1+i)^{-n}}$$

نضرب البسط و المقام في $(1+i)^n$ فنحصل على:

$$D_P = K\frac{(1+i)^{p+n} - (1+i)^p - (1+i)^{n+p} + (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

$$D_P = K\frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}$$

إذا افترضنا أننا سددنا الدفعة الثالثة أي P=3 فإن المتبقي من أصل القرض سوف يساوي:

400000–171600.17=228399.83

بتطبيق القانون المتوصل إليه يكون المتبقي من الأصل هو:

$$D_P = 400000\frac{(1.1)^6-(1.1)^3}{(1.1)^6-1} = 400000\frac{1.771561-1.331}{1.771561-1}$$

$$D_P = 400000\frac{0.440561}{0.771561} = 228399.83 \text{ دج}$$

III) قروض الاستحقاقات غير سنوية بدفعات متساوية:

1) حساب المعدل المكافئ و الدفعة الثابتة:

مثال: اقترض شخص من بنك التنمية المحلية مبلغ 650000 دج ليسدد بـ: 240 دفعة شهرية متساوية. معدل الفائدة السنوية 12 %. المطلوب الثلاثة أسطر الأولى مع السطر الأخير من جدول اهتلاك هذا القرض.

أ) حساب المعدل المكافئ:

- المعدل الشهري المكافئ لهذا للمعدل السنوي 12 %:

$$(1.12)=(1+i_{12})^{12} \Rightarrow 1+i_{12}=1.009488793 \Rightarrow i_{12}=0.9488793\%$$

ب) حساب الدفعة الثابتة:

$$a = 650000\frac{0.009488793}{1-(1.009488793)^{-240}} = 650000\frac{0.009488793}{0.896333236} = 6881.05 \text{ دج}$$

2) تقديم جدول الاهتلاك:

جدول الاهتلاك (الوحدة: دج)

الدفعة الشهرية	الاهتلاك	الفوائد	القرض المتبقي	الاستحقاقات
6881.05	713.33	6167.72	650000	1
6881.05	720.11	6160.94	649286.67	2
6881.05	726.94	6154.11	648566.56	3
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
6881.05	6816.37	64.67	6816.37	n

آخر اهتلاك:

$$m_1 = 6881.05(1.009488793)^{-1} = 6816.37$$

ملاحظات:

. **إن الفوائد حسبت على أساس المعدل الشهري 0.9488793 % أي 0.009488793 =** i_{12}.

. **إن الاهتلاكات بشكل متوالية هندسية أساسها هو 1.009488793.**

. **إن آخر اهتلاك حسب على أساس ضرب الدفعة الشهرية بـ:** $(1.009488793)^{-1}$. **أي 0.990600397**

IV) طرق أخرى لاهتلاك القروض:

1) طريقة الاهتلاكات المتساوية (الثابتة):

ا) المبدأ العام:

باعتماد هذه الطريقة يهتلك القرض بأقساط متساوية من قيمته مع تسديد الفائدة على المتبقي من الأصل بداية الوحدة الزمنية، و عليه تكون الدفعات السنوية متغيرة.

ب) مثال رقمي و إعداد الجدول:

قرض بقيمة 400.000 دج يسدد على ست سنوات بإهتلاكات سنوية متساوية مع الفوائد المستحقة على المتبقي من أصل القرض بداية كل وحدة زمنية، معدل الفائدة 10 %.

المطلوب : إعداد جدول اهتلاك القرض؟

جدول الاهتلاك (الوحدة: دج)

الفترة	الأصل بداية الفترة	فوائد الفترة	اهتلاك الفترة	دفعة الفترة
1	400.000	40.000	80.000	120.000
2	320.000	32.000	80.000	112.000
3	240.000	24.000	80.000	104.000
4	160.000	16.000	80.000	96.000
5	80.000	8.000	80.000	88.000
$\sum$	/	120.000	400.000	520.000

ج) إستخلاصات من الجدول:

. إن اهتلاك كل سنة هو عبارة عن قيمة القرض مقسومة على مدة القرض أي $\frac{K}{N}$.

. الفوائد المدفوعة تتناقص بقيمة ثابتة مساوية لفائدة قسط الاهتلاك، و عليه فهي تأخذ شكل متوالية حسابية تنازلية أساسها $i\frac{K}{N}$.

. إن الدفعات السنوية هي الأخرى تشكل متوالية حسابية لها نفس الأساس $i\frac{K}{N}$.

– مجموع الفوائد:

N/ 2 (الحد الأول للفوائد + الحد الأخير للفوائد) $= \frac{5(8000+40000)}{2} = 120000$

– مجموع الدفعات: N/ 2(دفعة 1 + دفعة n) $= 5\frac{(88000+120000)}{2} = 520000$

2) الاهتلاك بواسطة تكوين احتياطي مستثمر:

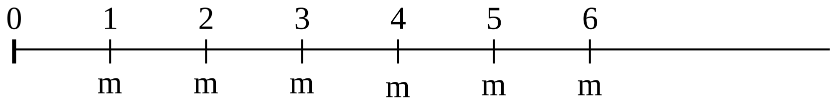
ا) مبدأ الطريقة:

سداد الفائدة البسيطة للقرض نهاية كل وحدة زمنية و الالتزام بسداد القرض نهاية المدة، من أجل ذلك يكون المقترض تدريجيا المبلغ المسدد للقرض بدفعات متساوية تبلغ جملتها قيمة أصل القرض، تسمى جملة هذه الدفعات باحتياطي الاستهلاك المستثمر.

ب) مثال رقمي:

اقترض شخص من البنك الوطني الجزائري مبلغ 300.000 دج بسعر فائدة سنوي 10 % على أن يسدد أصل القرض نهاية المدة (6 سنوات). حدد المبلغ الواجب دفعه نهاية كل سنة لتكوين الاحتياطي المستثمر لسداد قيمة الأصل.

. مبلغ الفائدة السنوية: 300000 × 0.1 = 30000 دج



. إن المبالغ المدفوعة ستكون لها جملة محصلة مساوية لأصل القرض K أي:

$$K = m\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 300.000 = m\frac{(1.1)^6 - 1}{0.1} \qquad m = \frac{0.1}{(1.1)^6 - 1}300.000$$

$$m = 38.882,21$$

. إجمالي الدفعة السنوية (الفوائد + الاحتياطي) $k.i + k\frac{t}{(1+t)^n - 1}$ **حيث t هو معدل الفائدة المكتسب. أمّا إذا تساوى سعرا الفائدة (سعر القرض و سعر الاحتياط) فإن الدفعة الثابتة تكون:**

$$ki + \frac{k.i}{(1+i)^n - 1} = k\left(\frac{i}{(1+i)^n - 1} + i\right)$$