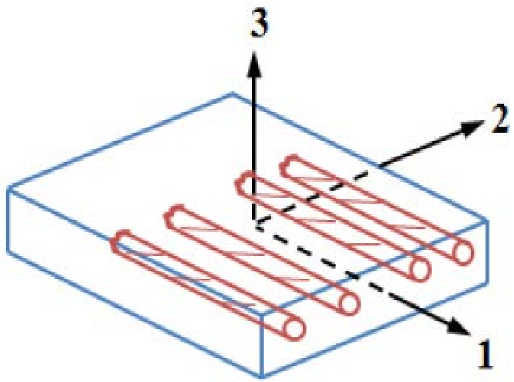
Chapitre 3 :

Comportement Macro-mécanique d'un pli composite unidirectionnel

Objectif :

- Forme technique des constantes élastiques (constantes ingénieur);
- Etat de contraintes planes;
- Critères de rupture;
- Comportement thermomécanique



Le pli composite unidirectionnel est considéré comme un matériau orthotrope

1, **2** et **3** sont appelés axes d'orthotropie.

1. Forme technique de la matrice de souplesse et de rigidité (Notation ingénieur)

Relation déformations – contraintes dans le cas d'un matériau orthotrope

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}}^{\text{Matrice de Souplesse}} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (1.1)$$

$$\boxed{S_{ij} \rightarrow ?}$$

Principe :

Des sollicitations mécaniques simples sont appliquées à la structure, connaissant le chargement ou contraintes. Les déformations résultantes étant mesurées, on détermine directement les coefficients de souplesse S_{ij} .

Considérons l'état de contraintes définit par :

$$\sigma_1 = \sigma \quad \text{et} \quad \sigma_i = 0 \ , \ i = 2,6$$

La relation (*) donne :

$$\varepsilon_1 = S_{11}\sigma_1 \longrightarrow S_{11} = \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} = \frac{1}{E_1}$$

Module d'élasticité longitudinal dans la direction des fibres

Analogie avec le cas isotrope

$$\sigma = E.\varepsilon$$

$$\varepsilon_2 = S_{21}\sigma_1 \longrightarrow S_{21} = \frac{\varepsilon_2}{\sigma_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{1}{E_1} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}$$

$$\varepsilon_3 = S_{31}\sigma_1 \longrightarrow S_{31} = -\frac{\nu_{13}}{E_1}$$

Considérons l'état de contraintes :

$$\sigma_4 = \sigma \quad \text{et} \quad \sigma_i = 0$$

$$\gamma_{23} = S_{23}\tau_{23} \quad \Rightarrow \quad S_{44} = \frac{\gamma_{23}}{\tau_{23}} = \frac{1}{G_{23}}$$

Analogie

$$\tau = G.\gamma$$

$G_{23} \rightarrow$ ***Module d'élasticité transversal dans le plan 2-3***

Conclusion

– E_1, E_2, E_3 : les modules de Young dans les directions 1, 2 et 3 respectivement ;

– ν_{ij} : coefficient de Poisson pour une déformation transversalle dans la direction j due à une contrainte dans la direction i, telle que,

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} \tag{3.2}$$

for $\sigma_i = \sigma$ et toutes les autres composantes nulles

– G_{23}, G_{31}, G_{12} : les modules de glissement dans les plans 2-3, 3-1 et 1-2 respectivement.

On rappel que, le matériau orthotrope considéré possède toujours 9 constantes indépendantes puisque :

Forme explicite de la relation (*)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \qquad (3.1)$$

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \qquad i,\ j = 1, 2, 3 \qquad (3.4)$$

Relation contraintes – déformations

$$
\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}}^{\text{Matrice de rigidité}} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}
$$

$$
[C] = [S]^{-1}
$$

Restrictions sur les constantes élastiques

Matériaux isotropes

www.auxcetictechnologies.com

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

E et G sont toujours positifs.

$$\nu > -1$$

Déformation volumétrique sous l'action d'une pression hydrostatique ***p***:

$$\vartheta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{p}{E/3(1-2\nu)} = \frac{p}{K}$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

$$\nu < \frac{1}{2}$$

$$-1 < \nu < \frac{1}{2}$$

$$\nu < 0 \quad ?$$

Matériaux orthotropes

$$S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{44}, S_{55}, S_{66} > 0 \quad \Longrightarrow \quad E_1, E_2, E_3, G_{23}, G_{31}, G_{12} > 0$$

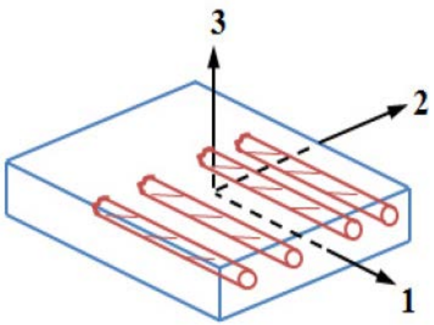
$$C_{11}, C_{22}, C_{33}, C_{44}, C_{55}, C_{66} > 0 \quad \Rightarrow \quad (1-\nu_{23}\nu_{32}), (1-\nu_{13}\nu_{31}), (1-\nu_{12}\nu_{21}) > 0$$

$$\bar{\Delta} = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} |S_{23}| < (S_{22}S_{33})^2 \\ |S_{13}| < (S_{11}S_{33})^2 \\ |S_{12}| < (S_{11}S_{22})^2 \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} |\nu_{21}| < \left(\dfrac{E_2}{E_1}\right)^{1/2} & |\nu_{12}| < \left(\dfrac{E_1}{E_2}\right)^{1/2} \\ |\nu_{32}| < \left(\dfrac{E_3}{E_2}\right)^{1/2} & |\nu_{23}| < \left(\dfrac{E_2}{E_3}\right)^{1/2} \\ |\nu_{13}| < \left(\dfrac{E_1}{E_3}\right)^{1/2} & |\nu_{31}| < \left(\dfrac{E_3}{E_1}\right)^{1/2} \end{array}\right.$$

Relations contraintes - déformations en containtes planes dans le cas orthotrope

Etat de contraintes planes ⇒ $\sigma_3 = 0 \qquad \tau_{23} = 0 \qquad \tau_{31} = 0$



Pli composite unidirectionnel

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}$$

$$S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}$$

$$S_{22} = \frac{1}{E_2}$$

$$S_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

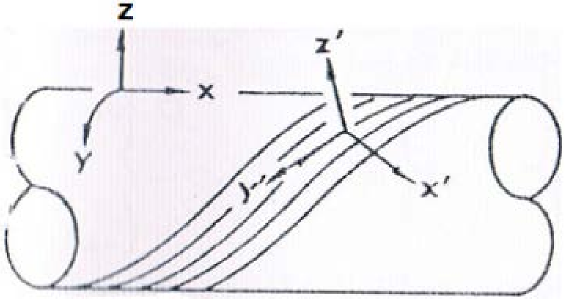
$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$$

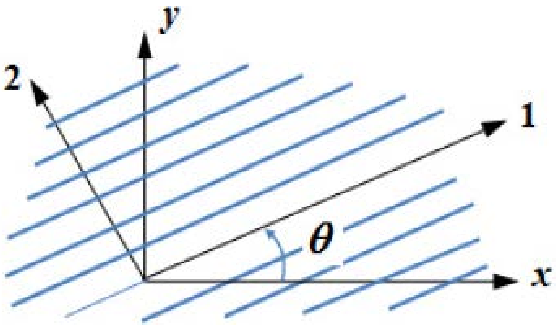
$$Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

Relations contraintes - déformations pour une orientation arbitraire des fibres



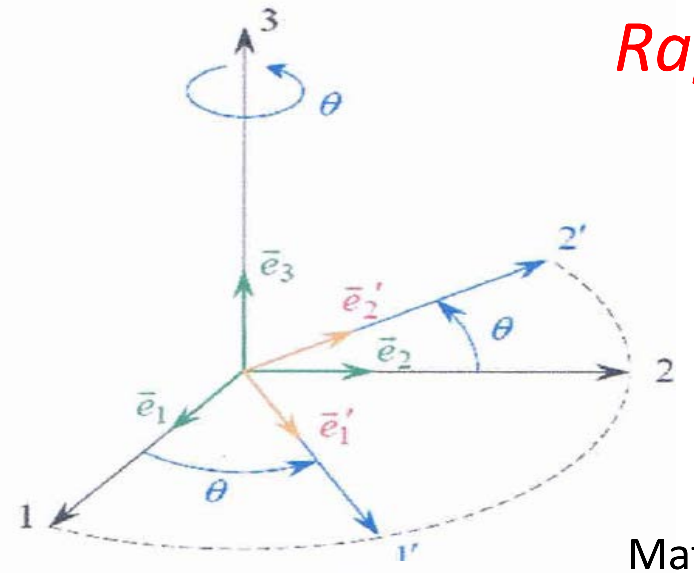
$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{array}\right\} = \begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta\\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta\\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta\end{bmatrix}\left\{\begin{array}{c}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{array}\right\}$$



$$\left\{\begin{array}{c}\epsilon_x\\ \epsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{array}\right\} = \begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta\\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta\\ -2\sin\theta\cos\theta & 2\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta\end{bmatrix}\left\{\begin{array}{c}\epsilon_1\\ \epsilon_2\\ \gamma_{12}\end{array}\right\}$$

$$\{\sigma\}_{(x,y)} = [T]^{-1}\{\sigma\}_{(1,2)} \quad \text{et} \quad \{\epsilon\}_{(x,y)} = [T']^{-1}\{\epsilon\}_{(1,2)}$$

$$[T'] = \left[T^{-1}\right]^T$$



Rappel

Matrice de passage Rot (3,θ)

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma' = T_\sigma \sigma$$

Matrice de transformation des contraintes

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & -2\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ & & & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & & & & \cos^2\theta-\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon' = T_\varepsilon \varepsilon$$

Matrice de transformation des déformations

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & \sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ & & & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -2\sin\theta\cos\theta & 2\sin\theta\cos\theta & & & & \cos^2\theta-\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{array}\right\} = [\bar{Q}]\left\{\begin{array}{c}\epsilon_x\\ \epsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc}\bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16}\\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26}\\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\epsilon_x\\ \epsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{array}\right\}$$

$$\left[\bar{Q}\right] = [T]^{-1}[Q][T']$$

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\sin^4\theta$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}\left(\sin^4\theta + \cos^4\theta\right)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11}\sin^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\cos^4\theta$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}\left(\sin^4\theta + \cos^4\theta\right)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{S}] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$[\bar{S}] = [T']^{-1} [S] [T]$$

$$\bar{S}_{11} = S_{11} \cos^4\theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2\theta \cos^2\theta + S_{22} \sin^4\theta$$

$$\bar{S}_{12} = S_{12} \left(\sin^4\theta + \cos^4\theta\right) + (S_{11} + S_{22} - S_{66}) \sin^2\theta \cos^2\theta$$

$$\bar{S}_{22} = S_{11} \sin^4\theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2\theta \cos^2\theta + S_{22} \cos^4\theta$$

$$\bar{S}_{16} = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \sin\theta \cos^3\theta - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^3\theta \cos\theta$$

$$\bar{S}_{26} = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^3\theta \cos\theta - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin\theta \cos^3\theta$$

$$\bar{S}_{66} = 2\left(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66}\right) \sin^2\theta \cos^2\theta + S_{66} \left(\sin^4\theta + \cos^4\theta\right)$$

Exercice :

Un essai de traction est pratiqué sur une éprouvette d'un pli unidirectionnel fibres de verre matrice epoxy (Figure ci-dessous). Le chargement étant connu, les déformations seront mesurées (jauges ou capteurs piézoéléctriques).

1. Ecrire dans ces conditions le tenseur des contraintes et calculer le tenseur de contraintes dans les axes d'orthotropie (1,2,3).
2. Ecrire les tenseurs de déformations dans les systèmes d'axes naturels (x,y,z) et principaux (1,2,3).
3. En se servant d'un dessin, montrer l'allure de la déformation globale de l'eprouvette causée par le chargement donné. Faites une conclusion.