الفصل الثالث: الديناميكا الأولية للموائع- الموائع المثالية في حالة حركة-

Chapter III: Elementary fluid dynamics

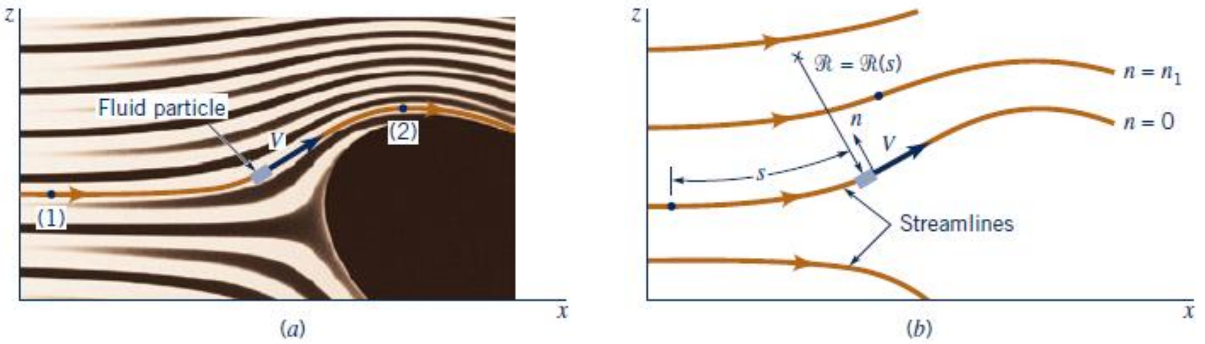
1-مقدمة:

سندرس حركة المائع غير اللزج-المثالي-، أي نهمل القوى الناتجة عن اجهاد الاحتكاك τ. يتم تطبيق قانون نيوتن الثاني على الجسيم المائع. وبالتالي، فإن تدفق المائع المثالي هو نتيجة لقوى الضغط والجاذبية.

تسارع الجسيم ⊗ كتلة الجسيم	=	قوى الحجم (الجاذبية) على جزيء المائع	⊕	القوة الناتجة عن الضغط على جزيء المائع

يتم وصف حركة الجسيم المائع بواسطة شعاع السرعة $\vec{V}$ والذي يمثل كمية موجهة بطويلة (السرعة $\boldsymbol{V} = |\vec{\boldsymbol{V}}|$) واتجاه. في حركته، يتبع الجسيم مسارًا يتم تحديد شكله بالسرعة. موضع الجسيم على طول المسار مرتبط بموضعه وزمنه الأوليين وسرعته.

إذا كانت خصائص السريان V، P، ... لا تتغير بدلالة الزمن، فإن جسيمات المائع تتبع نفس المسار، وفي هذه الحالة لا يتغير المسار في الفضاء. في كل نقطة من الفضاء، تتبع الجسيمات مسارات ثابتة في الزمن.



السريان الثابت-في الزمن-أو المستقر:

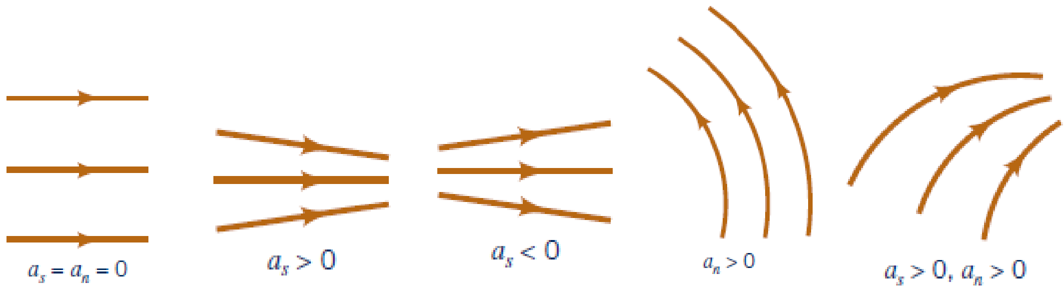
هو سريان مستقل عن الزمن حيث تنزلق جزيئات الموائع على طول المسارات. تسمى هذه المسارات بخطوط الانسياب أو السريان-الجريان-. كما هو موضح في الشكل، يمكن وصف السريان بدلالة المسافة "s" على طول الخط بدءا من الأصل ونصف القطر المحلي للانحناء R = R (s).

في هذه الحالة تعطى السرعة بـ $v = \frac{ds}{dt}$ والعجلة أو التسارع بـ $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

إذا أخذنا في الاعتبار بعدين للفضاء، أحدهما على طول الخط الانسيابي "s" والآخر متعامد "n"، فإن التسارع سيكون له مكونان a_s و a_n، لذلك سيكون لدينا:

$a_s = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$ لأن $v = \frac{ds}{dt}$.

التسارع المماسي a_s هو نتيجة تغير السرعة على طول الخط الانسيابي؛ من ناحية أخرى، a_n هو تسارع الناظمي أو الطرد المركزي، ويعطى بواسطة $a_n = \frac{v^2}{R}$ حيث R هو نصف القطر المحلي للانحناء. الحالات المختلفة للسريان التي تظهر خطوط السريان المشكلة بالسرعة والتسارع موضحة في الشكل أدناه.

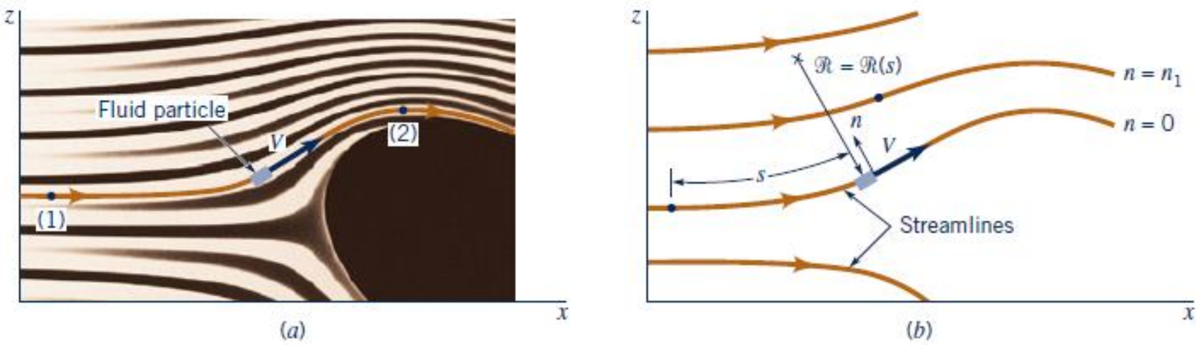


1-Introduction: We will consider the movement of an inviscid fluid; we will neglect the forces due to friction constraints τ. We apply Newton's second law to a fluid particle. Thus, the flow of an inviscid fluid is a function of the forces of pressure and gravity.

Forces generated by the pressure on the fluid particle	⊕	Volume forces (gravity) on the fluid particle	=	Mass of the particle ⊗ acceleration of the particle

The movement of the fluid particle is described by the velocity vector. $\vec{V}$ which represents a vector quantity with an intensity (velocity $\boldsymbol{V} = |\vec{V}|$) and a direction. In its movement, the particle follows a path whose shape is defined by the speed. The particle's position along the route is a function of its initial position, time, and velocity.

If the flow parameters V, P,… do not vary as a function of time, the fluid particles follow the same path; in this case, the path does not vary in space. For each position, the particles follow fixed paths over time.



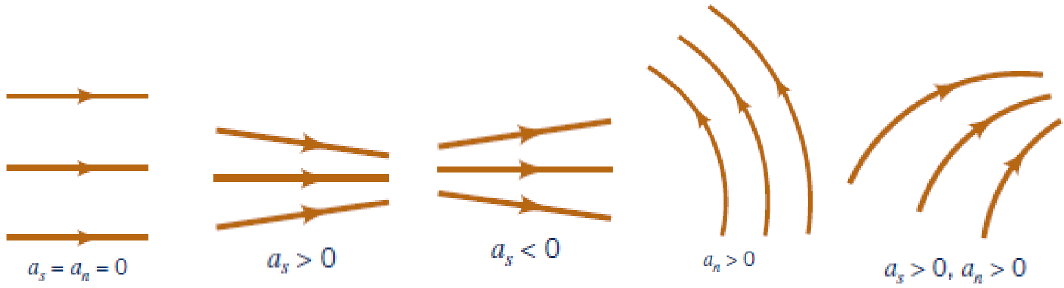
Steady flow is a time-independent flow where fluid particles slide along trajectories. These paths or trajectories are called **streamlines**. The flow can be described as a function of the distance “s” along the streamline from an origin and a local radius of curvature R=R(s). The speed is given by $v = \frac{ds}{dt}$ and the acceleration $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

If we consider two dimensions of space, one along the current line “s” and the other perpendicular “n”, the acceleration will have two components a_s and a_n. We will therefore, have:

$$a_s = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds} \quad \text{since} \quad v = \frac{ds}{dt}.$$

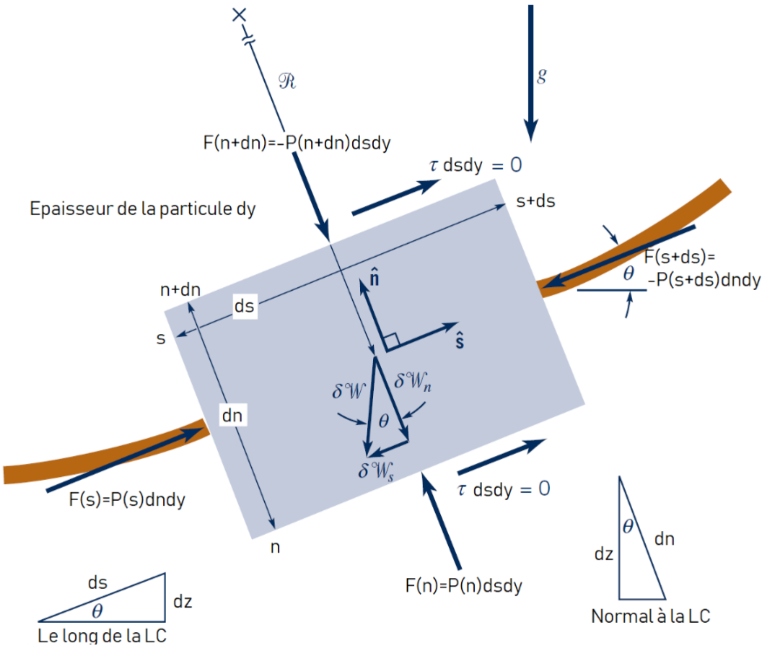
L’accélération a_s est le résultat de la variation de la vitesse le long de la ligne de courant ; par contre a_n est l’accélération centrifuge, elle est donnée par $a_n = \frac{v^2}{R}$ ou R est le rayon de courbure local. Les différentes configurations montrant la vitesse et l’accélération sont montrées par la figure ci-dessous.

The acceleration a_s is the result of the variation of the speed along the streamline; on the other hand, a_n is the centrifugal acceleration, it is given by $a_n = \frac{v^2}{R}$ or R is the local radius of curvature. The figure below shows the different configurations showing speed and acceleration.



2- تطبيق قانون نيوتن الثاني على جسيم مائع على طول خط انسيابي (معادلة برنولي-Bernoulli -):

لنأخذ الجسيم أو الجزيء المائع ذو الحجم $\delta V = \delta s \delta n \delta y$ والموضح في الشكل.



إذا كان التدفق مستقرا، نكتب قانون نيوتن في الاتجاه "s":

$$\sum \delta F_s = \delta m a_s = \delta m v\frac{\partial v}{\partial s} = \rho \delta V v\frac{\partial v}{\partial s}$$

مع dy الاتجاه العمودي على s-n. نأخذ بعين الاعتبار ثقل الجسيم (تأثير قوة الجاذبية) الذي يكتب:

$$\delta W = \rho g \delta V$$

مكون قوة الجاذبية (الثقل) في الاتجاه "s" هو:

$$\delta W_s = -\delta W \sin\theta = -\rho g \delta V \sin\theta$$

يعتمد الضغط أيضًا على موضع الجسيم المائع $p=p(n,s)$ حيث أنه على الاسطح، في الاتجاه المماسي لخط السريان، متوسط الضغط هو p (s) على السطح s و p (s+ds) على السطح s + ds مع n ثابتا. نظرًا لأن أبعاد الجسيم صغيرة، فسوف نستخدم سلسلة تايلور في حساب:

$$p(s+\delta s) = p(s) + \delta p_s = p(s) + \frac{\delta s}{2}\frac{\partial p}{\partial s} + \cdots$$

هنا أهملنا الحدود الصغيرة أمام الكبيرة، فنحصل على:

$$\delta p_s \approx \frac{\delta s}{2}\frac{\partial p}{\partial s}$$

أيضا، إذا كان dF_{ps} هو صافي قوة الضغط على الجسيم في اتجاه الانسياب، فسنحصل على:

$$\delta F_{ps} = p(s-\delta s)\delta n\delta y - p(s+\delta s)\delta n\delta y = -2\delta p_s \delta n\delta y = -\frac{\partial p}{\partial s}\delta n\delta y\delta s = -\frac{\partial p}{\partial s}\delta V$$

بما أننا أهملنا القوى اللزجة فان τdsdy = 0 للسائل غير اللزج، لذلك فإن القوة الكلية هي:

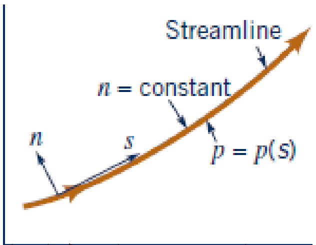
$$\sum \delta F_s = \delta W_s + \delta F_{ps} = \left(-\rho g \sin\theta - \frac{\partial p}{\partial s}\right)\delta V$$

بتعويض ΣdF_s بقيمتها $\rho\delta V v\frac{\partial v}{\partial s}$ نحصل على :

$$\rho\delta V v\frac{\partial v}{\partial s} = \left(-\rho g \sin\theta - \frac{\partial p}{\partial s}\right)\delta V$$

كنتيجة نقول إن تغيير سرعة جسيم المائع يرجع إلى تكاتف تدرج الضغط ووزن الجسيم على طول الخط الجريان أو السريان.

يمكن ترتيب المعادلة $\rho v\frac{\partial v}{\partial s} = -\rho g \sin\theta - \frac{\partial p}{\partial s}$ ومكاملتها إذا لاحظنا أن $\sin\theta = \frac{dz}{ds}$ ، كذلك يمكننا كتابة $v\frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds}$



ولإيجاد $\frac{\partial p}{\partial s}$ نقوم بحساب التفاضل:

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)ds + \left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)dn = \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)ds$$

مع العلم أنه على طول خط السريان (الشكل) n يكون ثابتا اذا dn = 0 ، مما يعطي :

$p(n,s) = p(s)$ و $\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{dp}{ds}$ وفي الأخير نكتب: $dp + \frac{1}{2}\rho dv^2 + \rho g dz = 0$ التي تصح على طول الخط الانسيابي.

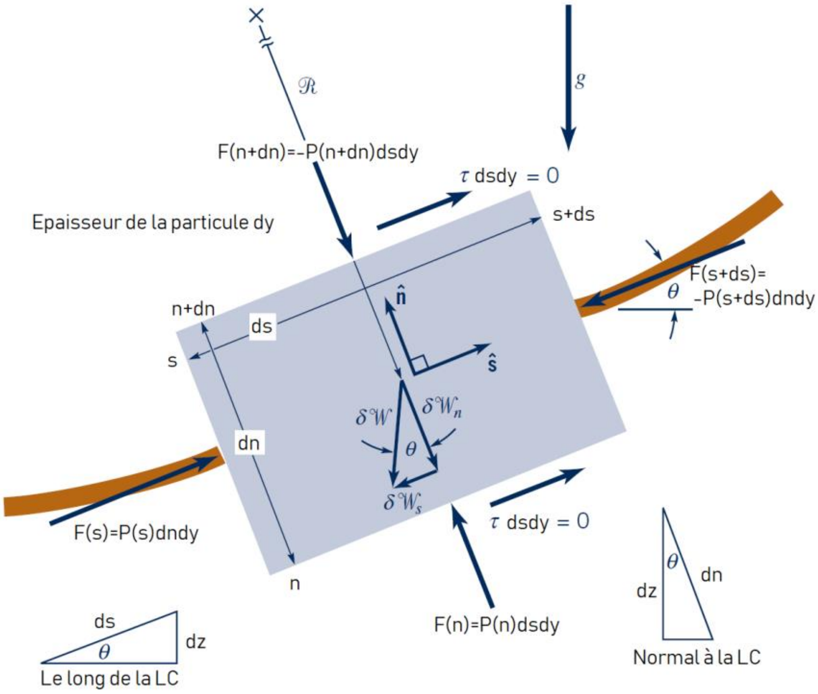
لمعرفة العلاقة بين مختلف خصائص السريان أو الجريان، يجب مكاملة هذه المعادلة ما يستوجب معرفة $\rho=\rho(P)$. بالنسبة للسوائل، تكون الكتلة الحجمية ثابتة، نحصل على معادلة برنولي--Bernouilli:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = cte$$

في جريان مستقر غير لزج، يكون تأثير مجموع ضغط وسرعة وارتفاع معين ثابتًا على طول خط الانسياب-الجريان او السريان-.

2- Application of Newton's second law on a fluid particle along a streamline (Bernoulli equation):

Consider a fluid particle of volume $\delta V = \delta s \delta n \delta y$ shown in the figure.



For a permanent flow, the application of Newton's law in the "s" direction is written

$$\sum \delta F_s = \delta m a_s = \delta m v \frac{\partial v}{\partial s} = \rho \delta V v \frac{\partial v}{\partial s} \text{ with } \delta V = \delta s \delta n \delta y$$

With dy the direction perpendicular to **s-n**. The weight of the particle (the effect of the force of gravity) is written: $\delta W = \rho g \delta V$

The component of the force of gravity (weight) in the "s" direction is:

$$\delta W_s = -\delta W \sin\theta = -\rho g \delta V \sin\theta$$

The pressure also depends on the position of the fluid particle *p=p(n,s)*. If the pressure at the center of the particle is denoted by p, its average value on the faces in the direction tangential to the streamline is *p(s)* and *p(s+ δs)*. Since the particle is small, we will use the Taylor series expansion for the pressure field in the calculation of:

$$p(s+\delta s) = p(s) + \delta p_s = p(s) + \frac{\delta s}{2}\frac{\partial p}{\partial s} + \cdots$$

We neglect the second-order terms and those higher ones; this gives: $\delta p_s \approx \frac{\delta s}{2}\frac{\partial p}{\partial s}$

Then, if dF_{ps} is the net force of pressure on the particle in the direction of the streamline, we will have:

$$\delta F_{ps} = p(s-\delta s)\delta n\delta y - p(s+\delta s)\delta n\delta y = -2\delta p_s \delta n\delta y = -\frac{\partial p}{\partial s}\delta n\delta y\delta s = -\frac{\partial p}{\partial s}\delta V$$

The viscous forces are zero $\tau dsdy=0$ for the inviscid fluid. The total force is therefore:

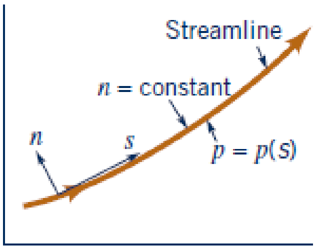
$$\sum \delta F_s = \delta W_s + \delta F_{ps} = \left(-\rho g \sin\theta - \frac{\partial p}{\partial s}\right)\delta V$$

By replacing ΣdF_s by its value, we will have $\rho\delta V v\frac{\partial v}{\partial s} = \left(-\rho g \sin\theta - \frac{\partial p}{\partial s}\right)\delta V$

The variation in the velocity of the fluid particle is due to the combination of the pressure gradient and the particle's weight along the streamline.

The equation $\rho v\frac{\partial v}{\partial s} = -\rho g \sin\theta - \frac{\partial p}{\partial s}$ can be arranged and integrated if we note that $\sin\theta = \frac{dz}{ds}$, also, we can write $v\frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds}$.

Knowing that along the streamline (figure) n is constant then $dn = 0$, hence the differential



$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)ds + \left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)dn = \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)ds$ also $p(n,s) = p(s)$ et $\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{dp}{ds}$

The equation can be written as: $\frac{1}{2}\rho\frac{dv^2}{ds} = -\rho g\frac{dz}{ds} - \frac{dp}{ds}$

Which simplifies to : $dp + \frac{1}{2}\rho dv^2 + \rho g dz = 0$ along a streamline

You need to know $\rho=\rho(P)$ to integrate the equation. For liquids, the density is constant, we obtain the **Bernoulli equation:**

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = cte$$

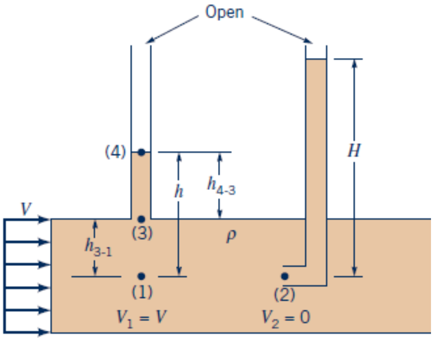
For a steady inviscid flow, the effect of the sum of a certain pressure, velocity and elevation is constant along a streamline.

3 تطبيق معادلة برنولي

قبل تطبيق هذه المعادلة، سنقدم بعض التعريفات.

3.1 الضغط الساكن- أو السكون والركود- والديناميكي والضغط الكلي:

كل مصطلح في معادلة برنولي له أبعاد الضغط (القوة لكل وحدة مساحة). المصطلح الأول "P" هو الضغط الديناميكي الحراري للسائل عندما يتدفق، ويسمى أيضًا "الضغط الساكن". لقياس هذا الضغط، يتم استخدام أنبوب قياس الضغط **عموديًا** على السطح الذي يحتوي على السائل (النقطة 3 في الشكل). الضغط عند النقطة 1 هو $p_1 = \gamma h_{3-1} + p_3$ كما في حالة مائع ساكن. إذا علمنا أن $p_3 = \gamma h_{4-3}$ من مقياس الضغط، إذن $h_{3-1} + h_{4-3} = h$ و $p_1 = \gamma h$.



الحد الثاني من المعادلة " $\rho v^2/2$ " يسمى "الضغط الديناميكي"، يرجع ذلك إلى سرعة الجريان. يتم قياسه بواسطة أنبوب **يواجه** التدفق مباشرة. في هذه الحالة يصعد السائل في المقياس ويتوازن الضغط ثم يستقر السائل في المقياس لذلك فالسرعة عند النقطة (2) هي صفر $v_2 = 0$ ، وتسمى نقطة الركود. إذا طبقنا معادلة برنولي بين النقطتين (1) و (2) مع $(v_2 = 0 \quad z_1 = z_2)$, فإننا نحصل على :

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \gamma H$$

ضغط الركود أكبر من الضغط الساكن بمقدار $\frac{1}{2}\rho v_1^2$ وهو الضغط الديناميكي. لذا فإن ضغط الركود أو التوقف يساوي الضغط الساكن بالإضافة إلى الضغط الديناميكي. الحد الثالث ρgz يسمى "الضغط الهيدروستاتيكي" (سبق رؤيته).

ضغط الركود أو ضغط التوقف هو أكبر ضغط على طول خط الجريان. إنه يمثل تحويل كل الطاقة الحركية إلى ضغط. يُطلق على مجموع الضغط الساكن والهيدروستاتيكي والديناميكي الضغط الكلي p_T. تنص علاقة برنولي على أن الضغط الكلي ثابت على طول خط الجريان.

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz = p_T$$

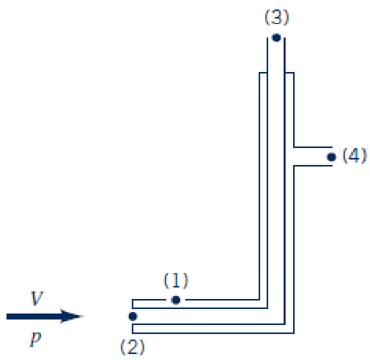
3.2 أنبوب البيتو-Pitot:-

يقيس هذا الأنبوب السرعة عن طريق تحويل الضغط إلى سرعة. إن معرفة الضغط الساكن وضغط الركود يعني أنه يمكن حساب السرعة. هذا هو مبدأ أنبوب "بيتو". يتكون من أنبوبين متحدي المركزين متصلان بمقياس ضغط ليتمكن من حساب الفرق بين ضغط التوقف والضغط الساكن. إذا كانت الارتفاعات Z ضئيلة، $z_2 = z_3$ ، نكتب

$$p_3 = p + \frac{1}{2}\rho v^2$$

لدينا أيضًا ضغوط السكون $p_4 = p_1 = p$ ، مما يعطي

$$p_3 - p_4 = \frac{1}{2}\rho v^2$$



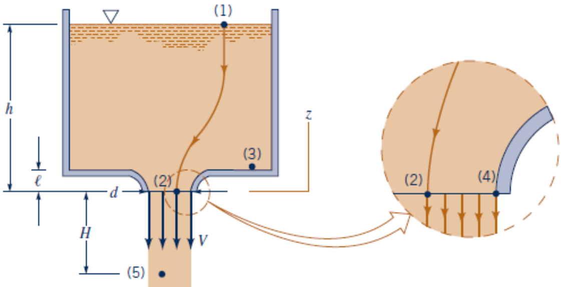
(a)

(b)

وأخيرًا $v = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_3 - p_4)}$ وهي سرعة السائل.

3.3 النفاثات الحرة:

ليكن تدفق سائل عبر فتحة قطرها d بسرعة v التي يراد حسابها. يعطي تطبيق معادلة برنولي بين نقطتين (1) و (2) من الخط الانسيابي (الشكل):



$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$

لدينا $z_1 - z_2 = h$ و $p_1 = p_2 = p_{atm}$ و $v_1 \approx 0$.

يتم تبسيط المعادلة إلى:

$$\gamma h = \frac{1}{2}\rho v^2$$

مما يعطي

$v = \sqrt{2gh}$ وهو ما يسمى بعلاقة Torricelli.

3 Application of the Bernoulli equation

Before applying this equation, we will give some definitions.

3-1 Static, stagnation, dynamic and total pressure:

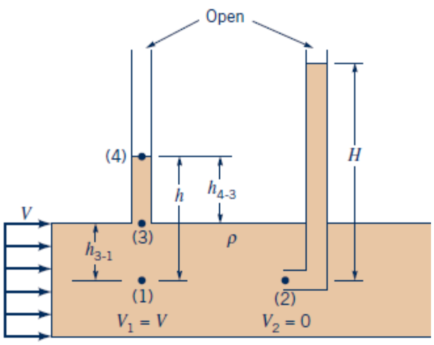
Each term in the Bernoulli equation has the dimension of pressure (force per unit area). The first term, "P", is called the thermodynamic pressure of the fluid when it flows, also called "static pressure". To measure this pressure, we use a piezometric tube mounted perpendicular to the surface which contains the fluid (point 3 in the figure). The pressure at point 1 is $p_1 = \gamma h_{3-1} + p_3$ like the case of a static fluid. If we know $p_3 = \gamma h_{4-3}$ from the pressure gauge, then $h_{3-1} + h_{4-3} = h$ et $p_1 = \gamma h$.

The second term of the equation "$\boldsymbol{\rho v^2/2}$ " is called "dynamic pressure " due to the flow's speed.

It is measured by a tube facing the flow in such a way the speed at point (2) is zero v_2=0, stagnation point).

If we apply Bernoulli between (1) and (2), ($v_2 = 0$ and $z_1 = z_2$),

We will have: $p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \gamma H$.



The stagnation pressure is larger than the static one by $\frac{1}{2}\rho v_1^2$ which is the dynamic pressure. So, the stagnation or stopping pressure equals the static and dynamic pressure. The third term $\rho g z$ is called "hydrostatic pressure" (already seen).

La pression de stagnation ou d'arrêt est la plus grande pression le long d'une ***LC***. Elle représente la conversion de toute l'énergie cinétique en pression.

La somme de la pression statique, hydrostatique et dynamique est dite pression totale p_T. La relation de Bernoulli énonce que la pression totale est constante le long d'une LC.

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = p_T$$

Stagnation pressure is the most significant pressure along streamline. It represents the conversion of all kinetic energy into pressure. The sum of static, hydrostatic and dynamic pressure is called total pressure. p_T. The Bernoulli relation states that the total pressure is constant along streamline.

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = p_T$$

3.2 Pitot tube:

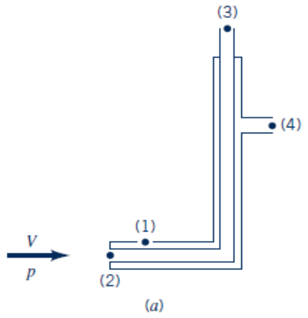
This tube measures flow velocity by converting pressure to speed. Knowledge of static and stagnation pressure implies that velocity can be calculated. This is the principle of the "Pitot static" tube. It is formed by two concentric tubes attached to two pressure gauges in such a way as to be able to calculate the difference between the stopping and static pressure. If the z elevations are negligible $z_2 = z_3$,

$$p_3 = p + \frac{1}{2}\rho v^2$$

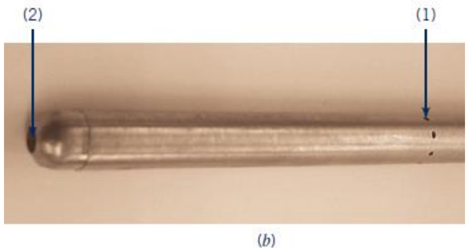
Also, we have the static pressure. $p_4 = p_1 = p$, which gives $p_3 - p_4 = \frac{1}{2}\rho v^2$ and finally

$$v = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_3 - p_4)}$$

which is the speed of the fluid

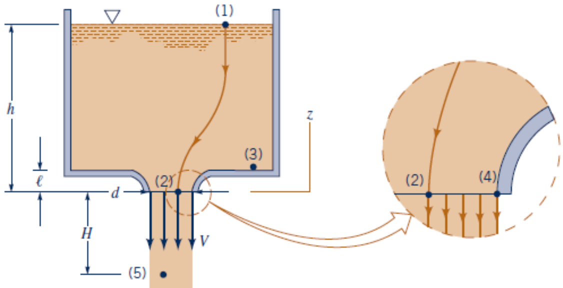


Tube de Pitot



Tube de Pitot dans un avion

3.3 free jets :



Consider a jet of liquid of diameter d, which flows through an orifice with a speed v to be calculated. Applying the Bernoulli equation between two points (1) and (2) of the current line gives (figure):

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$

We have $z_1 - z_2 = h$, $p_1 = p_2 = p_{atm}$ et $v_1 \approx 0$.

The equation simplifies to :

$$\gamma h = \frac{1}{2}\rho v^2 \text{ which gives}$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

Which is known as the Torricelli formula.

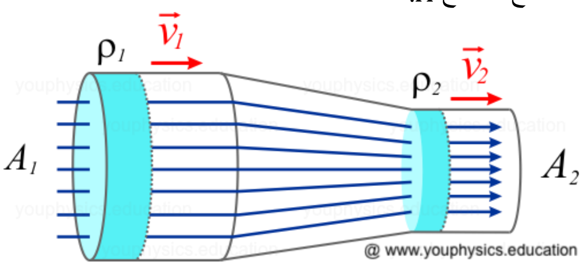
3.4 حساب التدفقات بواسطة صيغة برنولي:

التدفقات المحصورة: هي تدفقات للسوائل محدودة ماديًا بجدران صلبة، مثل الأنابيب. يوضح الشكل أنبوبًا ذو مقطع متغير يتدفق فيه مائع، نعرف الكميات التالية:

التدفق الحجمي: هو حجم السائل الذي يمر عبر سطح مغلق لكل وحدة زمنية، ويُعطى بواسطة: $\dot{Q} = vA \equiv \left[\frac{m^3}{s}\right]$

التدفق الكتلي: هو كتلة السائل الذي يمر عبر سطح مغلق لكل وحدة زمنية، ويعطى بواسطة: $\dot{m} = \rho\dot{Q} = \rho v A \equiv \left[\frac{kg}{s}\right]$

في هذه التعريفات، السرعة v متعامدة مع المقطع A.



معادلة انحفاظ الكتلة أو الاستمرارية:

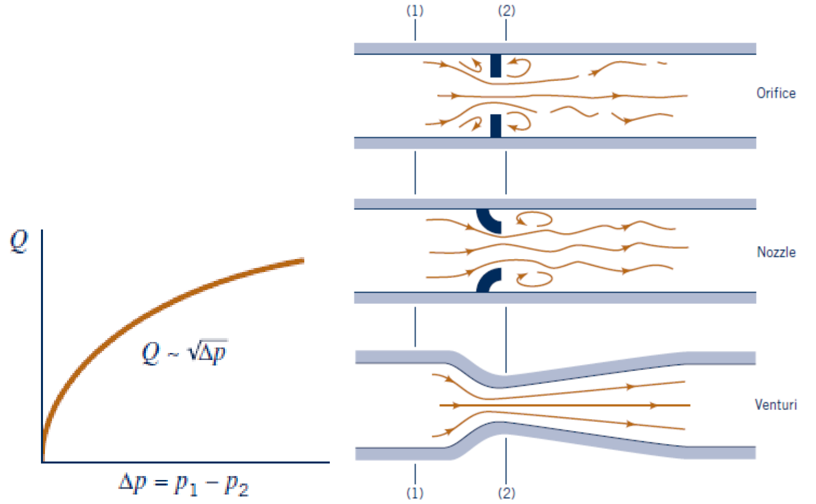
ينص مبدأ انحفاظ الكتلة على انه لا يمكن خلق الكتلة أو تدميرها، أي أن الكتلة الداخلة تساوي الخارجة، لذلك نكتب تبعا للشكل:

$$\dot{m} = cte \rightarrow \dot{m}_1 = \dot{m}_2 \leftrightarrow \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

إذا كانت الكتلة الحجمية ρ ثابتة، في حالة السوائل غير القابلة للضغط، نكتب أيضًا:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \leftrightarrow \dot{Q}_1 = \dot{Q}_2$$

قياس التدفق: تم تطوير عدة أنواع من الأدوات باستخدام معادلة برنولي لقياس سرعات التدفق وكميات التدفق، نقدم أنبوب البيتو كمثالاً. يتم عرض أمثلة أخرى لقياس التدفق في الشكل. الفكرة هي وضع قيد في الأنبوب وقياس فرق الضغط بين التدفق عند الضغط العالي والسرعة المنخفضة (1) والضغط المنخفض والسرعة العالية (2). تعتمد جميع الأدوات الثلاثة على مبدأ " زيادة السرعة تؤدي إلى انخفاض الضغط".



إذا كان التدفق أفقيًا $z_1=z_2$، مستقرا وغير قابل للانضغاط بين (1) و (2) ، تتم كتابة معادلة برنولي: $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

إذا كانت السرعات ثابتة في القسمين (1) و (2) فيمكننا كتابة: $\dot{Q} = \dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 \leftrightarrow v_1 A_1 = v_2 A_2$

مع $A_2 < A_1$ والذي يعطي:

$$\dot{Q} = A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]}}$$

4- أشكال أخرى لكتابة معادلة برنولي:

تتم كتابة معادلة برنولي بقسمة الحدود على الثقل الحجمي على النحو التالي:

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + z = cst = H \equiv [m]$$

لكل حد وحدة الطول $[m]$ ويمثل نوعًا من الارتفاع.

- المصطلح z، يتعلق بالطاقة الكامنة للجسيم ويسمى"الارتفاع ".
- مصطلح الضغط P/γ يسمى "ارتفاع الضغط" ويمثل ارتفاع عمود السائل الضروري لإنتاج الضغط P.
- مصطلح السرعة $v^2/(2g)$ هو "ارتفاع السرعة" الذي يمثل المسافة الرأسية اللازمة للسقوط الحر دون احتكاك السائل للوصول، من الركود أو السكون، إلى السرعة v.

تنص معادلة برنولي على أن مجموع الارتفاعات على طول الخط الانسيابي ثابت وهو "الارتفاع الكلي H".

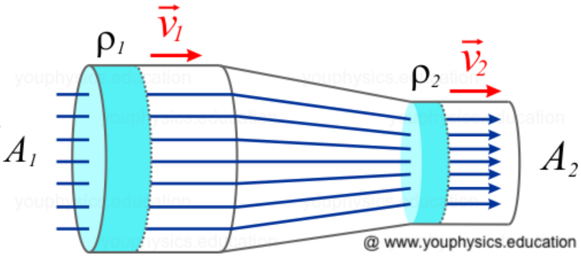
3.4 Calculation of flow rates using the Bernoulli formula

Confined flows are fluid flows physically limited by solid walls, such as tubes. The figure shows a pipe with a variable section in which a fluid flows.

We define the following quantities:

Volume flow: It is the volume of the fluid which passes through a closed surface per unit of time, it is given by:

$\dot{Q} = vA \equiv \left[\frac{m^3}{s}\right]$



Mass flow: It is the mass of the fluid which passes through a closed surface per unit of time; it is given by: $\dot{m} = \rho\dot{Q} = \rho vA \equiv \left[\frac{kg}{s}\right]$

Equation of conservation of mass or continuity:

It defines the principle of conservation of mass (mass cannot be created or destroyed); we then write:

$$\dot{m} = cte \rightarrow \dot{m}_1 = \dot{m}_2 \leftrightarrow \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

If the density ρ is constant, in the case of incompressible fluids, we also write:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \leftrightarrow \dot{Q}_1 = \dot{Q}_2$$

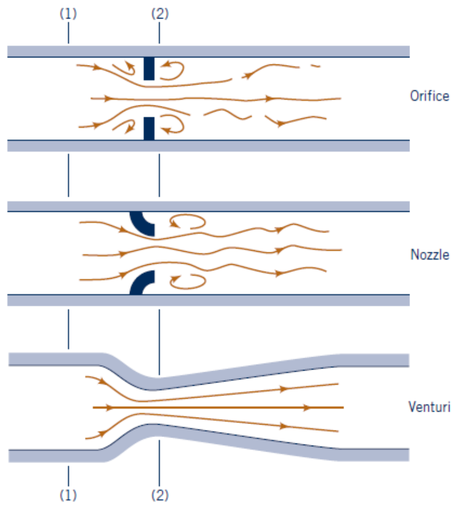
Flow rate measurement: Several instruments using the Bernoulli equation have been developed to measure flow velocities and flow rates. The pitot static tube presents an example. Other examples for measuring flow rates are shown in the figure. The idea is to place a restriction in the tube and measure the difference in pressures between the flow at high pressure and low speed (1) and low pressure and high speed and low pressure (2). All three instruments are based on the principle "an increase in speed causes a decrease in pressure".

If the flow is horizontal $z_1=z_2$, stationary, inviscid and incompressible between (1) and (2), the Bernoulli equation is written: $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

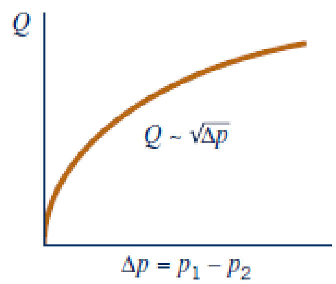
If the speeds are uniform at sections (1) and (2), we can write: $\dot{Q} = \dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 \leftrightarrow v_1 A_1 = v_2 A_2$

with $A_2 < A_1$ Which gives:

$$\dot{Q} = A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]}}$$



Exemples de venturi



Débit en fonction de Δp

4- Other forms of writing the Bernoulli equation:

The Bernoulli equation is written by dividing the terms by the density as follows:

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + z = cst = H \equiv [m]$$

Each term has a unit of length [m] and represents a type of height.

1. The term z relates to the particle's potential energy and says "height or elevation".
2. The pressure term P/γ is called "pressure height" and represents the height of a fluid column necessary to produce the pressure P.
3. The speed term $v^2/(2g)$ is the "velocity height," which represents the vertical distance necessary for the fluid to free fall without friction and to reach, from stagnation or stopping, the speed v.

The Bernoulli equation states that the sum of heights along a streamline is constant: the "total height H".