

Chapitre 2 :

Elasticité Linéaire Anisotrope

Objectif :

- Loi de comportement des matériaux anisotropes (Loi de Hook généralisée);
- Différentes formes d'anisotropie;
- Expression des tenseurs de souplesse et de rigidité.
- Forme technique des constantes élastiques (constantes ingénieur).

1. Introduction

2. Relations contraintes - déformations pour les matériaux anisotropes

Rappel : Barre en traction simple

$$\begin{aligned}\epsilon &= S.\sigma \quad \longrightarrow \quad \sigma \text{ appliquée} \\ \sigma &= C.\epsilon \quad \longrightarrow \quad \epsilon \text{ appliquée}\end{aligned}\tag{2.1}$$

$C \rightarrow$ Rigidité ou constante élastique

$S \rightarrow$ Fléxibilité ou coefficient de souplesse

Loi de Hook généralisée Généralisation des expressions de C et de S

Pour un comportement élastique linéaire

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= C_{ijkl} \epsilon_{kl} \\ \epsilon_{ij} &= S_{ijkl} \sigma_{kl}\end{aligned}\quad (2.2)$$

- C_{ijkl} : Tenseur de rigidité, d'ordre 4 ;
- S_{ijkl} : Tenseur de souplesse, d'ordre 4 ;

Forme matricielle

81 constantes
élastiques !

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1112} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} & C_{1132} & C_{1113} & C_{1121} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} & C_{2232} & C_{2213} & C_{2221} \\ --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- \\ --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- \\ --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- \\ --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- \\ --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- \\ --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- \\ C_{2111} & C_{2112} & C_{2133} & C_{2123} & C_{2131} & C_{2112} & C_{2132} & C_{2113} & C_{2121} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{32} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

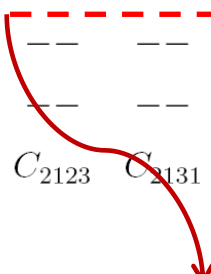
Symétrie du tenseur des contraintes

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \Rightarrow \quad C_{ijkl} = C_{jikl}$$

Symétrie du tenseur des déformations

(2.4)

$$\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk} \quad \Rightarrow \quad S_{ijkl} = S_{ijlk}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1112} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} & C_{1132} & C_{1113} & C_{1121} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} & C_{2232} & C_{2213} & C_{2221} \\ --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- \\ --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- \\ --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- \\ --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- \\ --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- \\ --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- \\ C_{2111} & C_{2112} & C_{2133} & C_{2123} & C_{2131} & C_{2112} & C_{2132} & C_{2113} & C_{2121} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{32} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$


Matrice de rigidité de dimensions 6x6

Loi de Hook généralisée sous forme contractée

$$\sigma_i = C_{ij}\epsilon_j \quad i, j = 1, \dots, 6 \quad (2.6)$$

Contraintes		Déformations	
Notation tensorielle	Notation contractée	Notation tensorielle	Notation contractée
σ_{11}	σ_1	ϵ_{11}	ϵ_1
σ_{22}	σ_2	ϵ_{22}	ϵ_2
σ_{33}	σ_3	ϵ_{33}	ϵ_3
$\tau_{23} = \sigma_{23}$	σ_4	$\gamma_{23} = 2\epsilon_{23}$	ϵ_4
$\tau_{31} = \sigma_{31}$	σ_5	$\gamma_{31} = 2\epsilon_{31}$	ϵ_5
$\tau_{12} = \sigma_{12}$	σ_6	$\gamma_{12} = 2\epsilon_{12}$	ϵ_6

C_{ij} possède 36 constantes élastiques

! Mais pas toutes indépendantes

> Concept de l'énergie de déformation

$$dW = \sigma_i d\epsilon_i \quad (2.7) \quad \leftarrow \sigma_i \text{ agissant le long des } d\epsilon_i$$

$$dW = C_{ij} \epsilon_j d\epsilon_i \quad \xrightarrow{\text{Intégration}} \quad W = \frac{1}{2} C_{ij} \epsilon_i \epsilon_j$$

$$W = \frac{1}{2} C_{ij} \epsilon_i \epsilon_j \quad \xrightarrow{\text{double différentiation}} \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_i \partial \epsilon_j} &= C_{ij} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_j \partial \epsilon_i} &= C_{ji} \end{aligned} \right\} (2.8)$$

D'une façon similaire, on peut écrire :

L'ordre de différentiation étant indifférent

$$C_{ij} = C_{ji} \quad (2.9)$$

Et ainsi, puisque $[s] = [C]^{-1}$

Elasticité linéaire anisotrope

$$S_{ij} = S_{ji}$$

$$\sigma_i = C_{ij}\epsilon_j \quad i, j = 1, \dots, 6$$

$$\varepsilon_i = S_{ij}\sigma_j \quad i, j = 1, \dots, 6$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Contraintes		Déformations	
Notation tensorielle	Notation contractée	Notation tensorielle	Notation contractée
σ_{11}	σ_1	ϵ_{11}	ϵ_1
σ_{22}	σ_2	ϵ_{22}	ϵ_2
σ_{33}	σ_3	ϵ_{33}	ϵ_3
$\tau_{23} = \sigma_{23}$	σ_4	$\gamma_{23} = 2\epsilon_{23}$	ϵ_4
$\tau_{31} = \sigma_{31}$	σ_5	$\gamma_{31} = 2\epsilon_{31}$	ϵ_5
$\tau_{12} = \sigma_{12}$	σ_6	$\gamma_{12} = 2\epsilon_{12}$	ϵ_6

3. Symétrie du matériau

Principe : La matrice de rigidité doit conserver les mêmes valeurs des coefficients C_{ij} pour une rotation de θ à travers le plan de symétrie considéré.

Loi de transformation des tenseurs (voir chapitre 1)

$$T' = A.T.A^T \quad (2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} A: \text{matrice de transformation (rotation)} \\ T : \text{Tenseur étudié} \end{array} \right.$$

Le tenseur de rigidité C'_{ij} sera donné par

$$\left. \begin{array}{l} C' = T_\sigma C T_\sigma^T \\ \text{Pour le tenseur de souplesse, } S'_{ij} \text{ on écrit:} \\ S' = T_\epsilon S T_\epsilon^T \end{array} \right\} (2.12)$$

T_σ et T_ϵ respectivement les matrices de transformation des tenseurs des contraintes et des déformations

3.1 Matériau triclinique

Matériau anisotrope

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{array} \right\} \quad (2.13)$$

21 constantes indépendantes

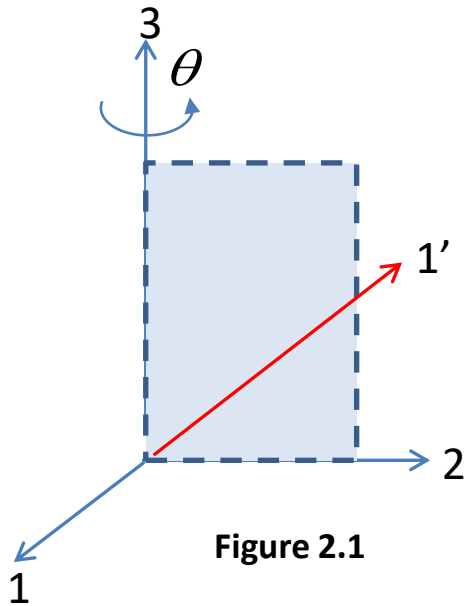
3.2. Matériau monoclinique

Le matériau admet un plan de symétrie

Exemple : plan 2-3

$Rot(3, \theta)$

Symétrie $\Rightarrow \theta = \pi$

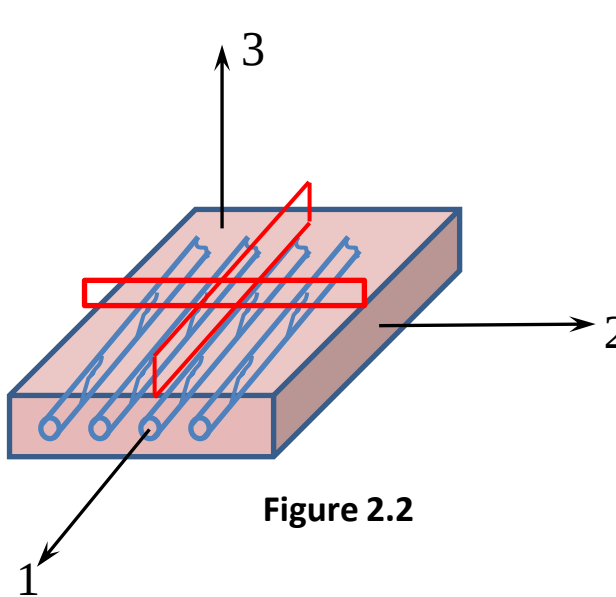


$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

13 constantes élastiques indépendantes

3.3. Matériau orthotrope

Le matériau admet deux plan de symétrie (et donc trois !)



The diagram shows a 3D rectangular element of an orthotropic material. The axes are labeled 1, 2, and 3. Two red lines on the top face represent planes of symmetry. An arrow points from the element towards the stress-strain equation.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

Figure 2.2

9 constantes élastiques indépendantes.

Remarques :

- une contrainte uniaxiale ne provoquera ni cisaillement ni torsion si elle est appliquée suivant une direction de symétrie ;
- un cisaillement ne provoquera ni allongement ni torsion s'il est appliqué dans un plan de symétrie.

3.4. Matériau isotrope transverse

Le matériau orthotrope présente en plus, un axe de révolution, c'est - à - dire dans l'un des plans de symétrie, les propriétés élastiques sont indépendantes de l'orientation considérée.

Plan 2-3 = Plan d'isotropie

Rot(1, θ) ; θ quelconque

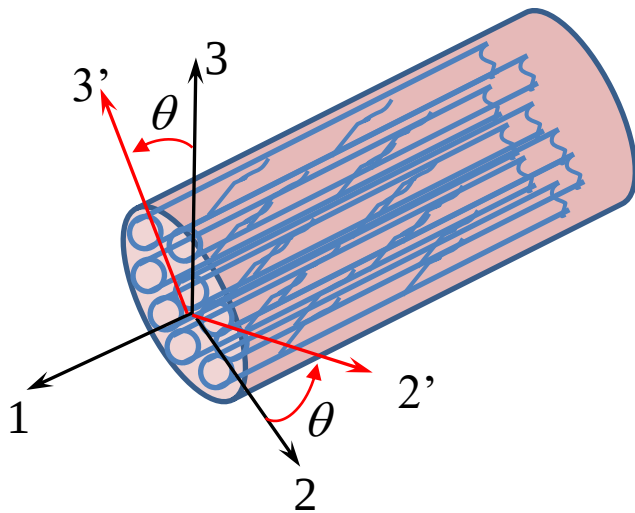


Figure 2.3

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

5 Constantes élastiques indépendantes

3.5. Matériau isotrope

Tous les plans sont des plans de symétrie

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

2 Constantes élastiques indépendantes

Coefficients de Souplesse :

Sachant que : $[S] = [C]^{-1}$

Anisotrope (21 constantes indépendantes)

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

Monoclique (13 constantes indépendantes) symétrie autour de $z = 0$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & S_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & S_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{45} & S_{55} & 0 \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

Orthotrope (9 constantes indépendantes)

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

Isotrope transverse (5 constantes indépendantes) Plan de symétrie 1-2

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

Isotrope (2 constantes indépendantes)

(2.18)

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

Forme explicite des coefficients de souplesse et de rigidité?

$$S_{ij} = ? ; C_{ij} = ?$$



4.1 Relation déformations – contraintes dans le cas d'un matériau orthotrope

L'exemple type d'un matériau composite à architecture orthotrope est : *Le pli composite unidirectionnel* (Figure)

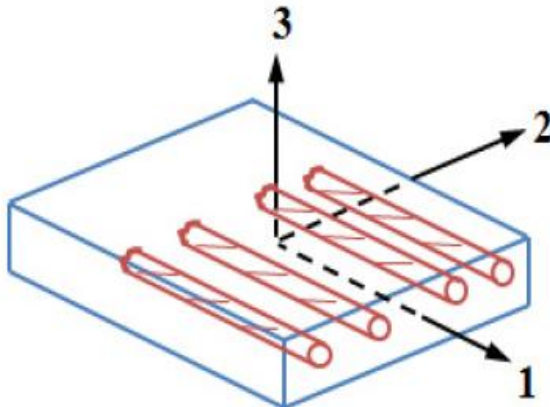


Figure 2.4

1, 2 et 3 sont appelés axes d'orthotropie.

La relation déformations – contraintes s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}}_{\text{Matrice de Souplesse}} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

$$S_{ij} \rightarrow ?$$

Principe :

Des sollicitations mécaniques simples sont appliquées à la structure, connaissant le chargement ou contraintes. Les déformations résultantes étant mesurées, on détermine directement les coefficients de souplesse S_{ij} .

Considérons l'état de contraintes défini par :

$$\sigma_1 = \sigma \text{ et } \sigma_i = 0, \quad i = 2, 6$$

La relation (*) donne :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= S_{11}\sigma_1 & \longrightarrow & S_{11} = \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} = \frac{1}{E_1} \\ \varepsilon_2 &= S_{21}\sigma_1 & \longrightarrow & S_{21} = \frac{\varepsilon_2}{\sigma_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{1}{E_1} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \\ \varepsilon_3 &= S_{31}\sigma_1 & \longrightarrow & S_{31} = -\frac{\nu_{13}}{E_1} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Module d'élasticité longitudinal dans la direction des fibres

Analogie avec le cas isotrope $\sigma = E.\varepsilon$

Coefficient de Poisson dans le plan 1-2

Considérons l'état de contraintes :

$$\sigma_4 = \sigma \text{ et } \sigma_i = 0$$

$$\gamma_{23} = S_{23} \tau_{23} \Rightarrow S_{44} = \frac{\gamma_{23}}{\tau_{23}} = \frac{1}{G_{23}} \quad (2.21)$$

Analogie
 $\tau = G \cdot \gamma$

*Module de cisaillement
dans le plan 2-3*

Module d'élasticité transversal dans le plan 2-3

Conclusion

- E_1, E_2, E_3 : les modules de Young dans les directions 1, 2 et 3 respectivement ;
- ν_{ij} : coefficient de Poisson pour une déformation transversale dans la direction j due à une contrainte dans la direction i , telle que,

$$\nu_{ij} = -\frac{\epsilon_j}{\epsilon_i} \quad (2.22)$$

for $\sigma_i = \sigma$ et toutes les autres composantes nulles

- G_{23}, G_{31}, G_{12} : les modules de glissement dans les plans 2-3, 3-1 et 1-2 respectivement.

On rappelle que, le matériau orthotrope considéré possède toujours 9 constantes indépendantes puisque :

Forme explicite de la relation (2.18)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.24)$$

Relation contraintes – déformations

$$\begin{matrix} & \text{Matrice de rigidité} \\ & \underbrace{\hspace{10em}} \\ \left\{ \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{matrix} \right\} & = & \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} & \left\{ \begin{matrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{matrix} \right\} \end{matrix}$$

Forme symbolique

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \frac{S_{22}S_{33} - S_{23}^2}{S} & C_{12} &= \frac{S_{13}S_{23} - S_{12}S_{33}}{S} \\
 C_{22} &= \frac{S_{33}S_{11} - S_{13}^2}{S} & C_{13} &= \frac{S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22}}{S} \\
 C_{33} &= \frac{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}{S} & C_{23} &= \frac{S_{12}S_{13} - S_{23}S_{11}}{S} \\
 C_{44} &= \frac{1}{S_{44}} & C_{55} &= \frac{1}{S_{55}} & C_{66} &= \frac{1}{S_{66}}
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

$$S = S_{11}S_{22}S_{33} - S_{11}S_{23}^2 - S_{22}S_{13}^2 - S_{33}S_{12}^2 + 2S_{12}S_{23}S_{13}$$

Forme Explicite

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_1 E_2 \Delta} \\
 C_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta} \\
 C_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta} \\
 C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} \\
 C_{23} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} \\
 C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \\
 C_{11} &= G_{23} & \Delta &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3} \\
 C_{55} &= G_{31} \\
 C_{66} &= G_{12}
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

4.2 Restrictions sur les constantes élastiques

Matériaux isotropes

www.auxcetictechnologies.com

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

E et G sont toujours positifs,

$$\nu > -1 \quad (2.27)$$

Déformation volumétrique sous l'action d'une pression hydrostatique p :

$$\vartheta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{p}{E/3(1 - 2\nu)} = \frac{p}{K} \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (1.25)$$

$$\nu < \frac{1}{2}$$

$$-1 < \nu < \frac{1}{2} \quad (2.28)$$

Matériaux orthotropes

$$S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{44}, S_{55}, S_{66} > 0 \quad \longrightarrow \quad E_1, E_2, E_3, G_{23}, G_{31}, G_{12} > 0 \quad (2.29)$$

$$C_{11}, C_{22}, C_{33}, C_{44}, C_{55}, C_{66} > 0 \quad \longrightarrow \quad (1 - \nu_{23}\nu_{32}), (1 - \nu_{13}\nu_{31}), (1 - \nu_{12}\nu_{21}) > 0 \quad (2.30)$$

$$\bar{\Delta} = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} > 0 \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} |S_{23}| &< (S_{22}S_{33})^2 \\ |S_{13}| &< (S_{11}S_{33})^2 \\ |S_{12}| &< (S_{11}S_{22})^2 \end{aligned} \quad \longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} |\nu_{21}| < \left(\frac{E_2}{E_1}\right)^{1/2} & |\nu_{12}| < \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{1/2} \\ |\nu_{32}| < \left(\frac{E_3}{E_2}\right)^{1/2} & |\nu_{23}| < \left(\frac{E_2}{E_3}\right)^{1/2} \\ |\nu_{13}| < \left(\frac{E_1}{E_3}\right)^{1/2} & |\nu_{31}| < \left(\frac{E_3}{E_1}\right)^{1/2} \end{array} \right. \quad (2.32)$$