

CHAPITRE 1

LES PLANCHERS (3 semaines)

1. Les planchers dalles et planchers champignons
 - Description et dispositions constructives des planchers dalles
 - Description et dispositions constructives des planchers champignons
- 1.2. Calcul des dalles
 - 1.2.1 Méthode forfaitaire du BAEL
 - 1.2.2 Méthode de Pigeaud
 - 1.2.3 **Méthode des lignes de rupture**

GÉNÉRALITÉS :

Les planchers sont des aires planes limitant les étages et supportant les revêtements de sol et les surcharges d'exploitation. Les fonctions principales des planchers sont :

- ✓ Résistance : Ils supportent en plus de leurs poids propres les surcharges d'exploitation ;
- ✓ Isolation : Ils isolent thermiquement et acoustiquement les différents étages ;
- ✓ Transmission : Ils transmettent les charges verticales et les charges horizontales (vent et séisme) aux structures porteuses.

On distingue deux genres de planchers :

- Les planchers coulés sur place ;
- Les planchers préfabriqués (préfabrication totale ou partielle).

Le terme plancher désigne l'ensemble des éléments horizontaux de la structure d'un bâtiment destiné à reprendre les charges et à les transmettre sur des éléments porteurs verticaux (poteaux, voiles ou murs). Ils peuvent être constitués de plusieurs des éléments suivants :

- Les dalles,
- Nervures ou poutrelles,
- Poutres,
- Linteaux.

Exemples de planchers :

- Plancher-dalle, sans poutres, ni nervures,
- Plancher à poutres dans une direction et dalles portant dans la direction perpendiculaire,
- Plancher à poutres croisées perpendiculaires et dalles portant dans une ou deux directions,
- Plancher à poutres parallèles dans une direction, nervures (poutrelles) perpendiculaires aux poutres, et dalle,
- Planchers mixtes,
- Planchers à corps creux...etc.

LES PLANCHERS À CORPS CREUX : (Rappel)

Ce type de planchers est très utilisé dans les bâtiments courants (surtout en Algérie pour les maisons individuelles). Cette solution consiste à utiliser des corps creux comme coffrage perdu, ces corps creux restent incorporés dans l'ouvrage entre les nervures (poutrelles), qui peuvent être coulées sur place ou préfabriquées (en B-A ou en B-Précontraint). La distance d'axe en axe des poutrelles est alors déterminée par le corps creux utilisé.

Le hourdis doit avoir une épaisseur minimale de 4 cm et être armée d'un quadrillage d'armatures (treillis soudé).

Le treillis soudé a pour fonction :

- La limitation du risque de fissuration du béton par retrait ;
 - La résistance aux effets des charges appliquées sur des surfaces de contact réduites ;
 - La répartition entre nervures voisines des charges localisées, notamment celles engendrées par les cloisons.
- ❖ Dans ce cas de plancher, on admet le seul calcul des nervures. Le principe de calcul est le même que celui des poutrelles (dites « secondaires ») des planchers à dalles pleines. **Les poutrelles sont placées parallèlement à la plus petite portée.**
 - ❖ De préférence le calcul des nervures est effectué à l'aide de la méthode forfaitaire pour les planchers à surcharge modérées (pas forcément) ;

- ❖ L'épaisseur (h_t) des planchers à corps creux doit être telle que leurs déformations restent suffisamment faibles.

Condition de flèche pour le pré dimensionnement :

$$\frac{h_t}{l} \geq \frac{1}{22.5} \text{ et } \frac{h_t}{l} \geq \frac{1}{15} \frac{M_t}{M_0}$$

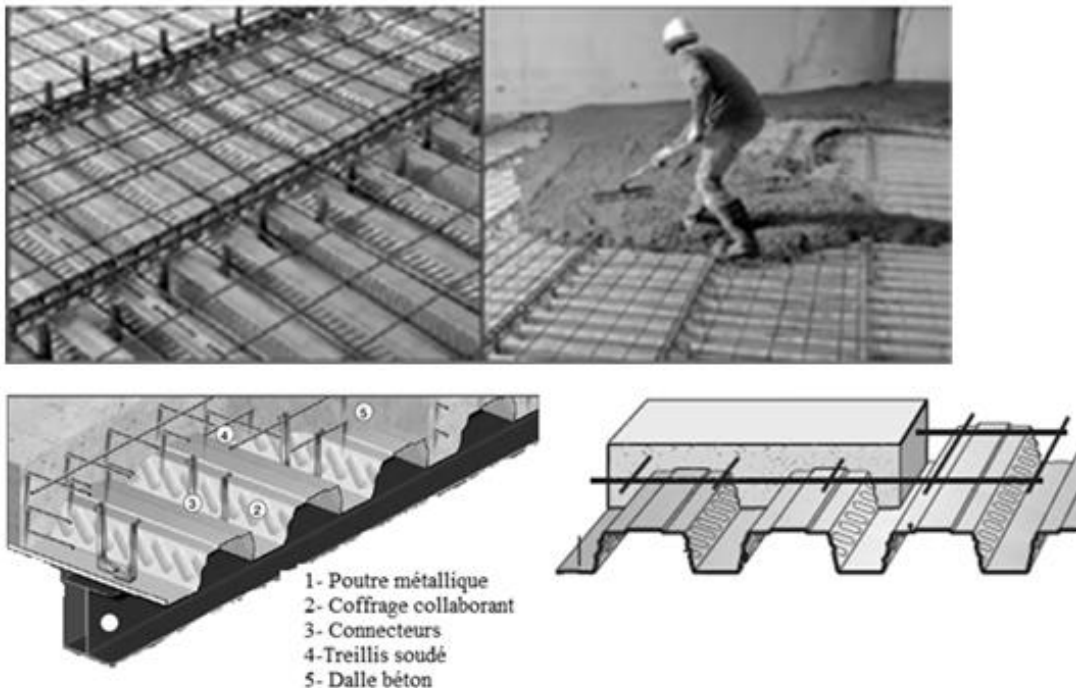
l = plus grande portée libre.

Avec : M_0 = moment de la travée considérée libre.

M_t = moment en travée de la portée considérée.

PLANCHERS MIXTES :

On appelle plancher mixte une dalle en béton armé reposant sur des poutres en acier dont elle est solidaire. L'ensemble est facile à réaliser, surtout si la poutre métallique peut supporter seule le poids de la dalle sans étai et que l'on peut coffrer les dalles sur des prédalles ou des bacs nervurés en aciers, donc gain de coffrage non négligeable.

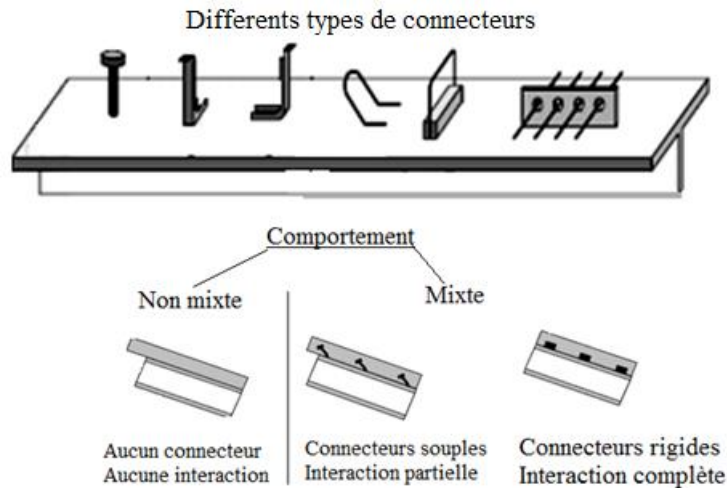


On peut aussi désigner l'ensemble tôle profilée + béton par les termes : dalles mixtes. Cette association entre le béton et l'acier est judicieuse comme l'a été avec le béton armé. Notons aussi :

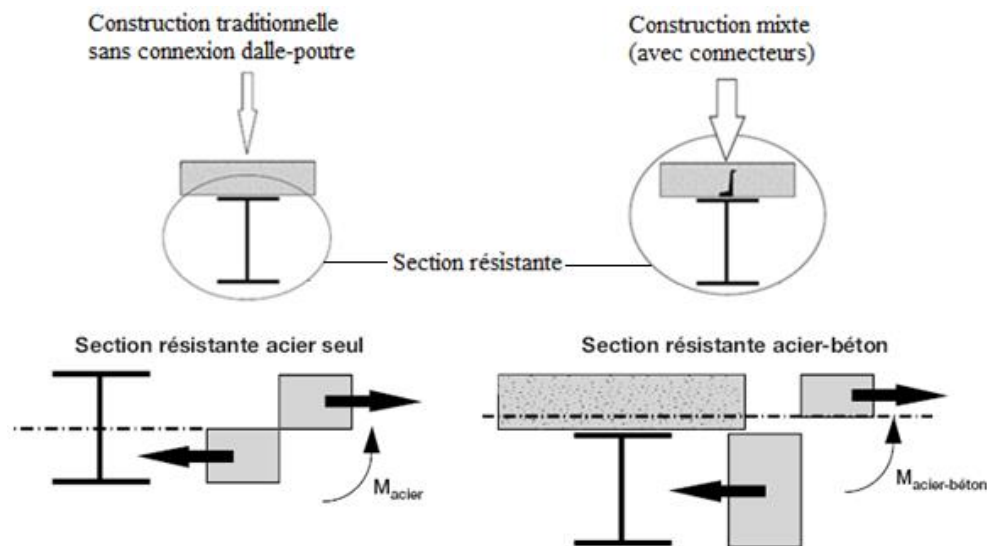
- Efficacité : Acier résistant en traction et béton en compression,
- Le béton peut réduire le danger de voilement,
- Le béton peut assurer une protection contre la corrosion et le feu,
- L'acier apporte la ductilité.

Principe de la construction mixte

Pour que la dalle et la poutre métallique travaillent ensemble, il faut que les efforts soient bien transmis entre les deux (existence de connexion). On dispose des connecteurs pour assurer ce rôle. En reprenant le glissement entre les poutres en acier et la dalle en béton, les connecteurs créent une section mixte en acier-béton plus résistante et plus rigide que la section de l'acier seul. Le béton n'est plus un poids mort et participe à la résistance de l'ensemble. Le béton est comprimé, l'acier est tendu, les deux matériaux travaillent dans leur domaine de prédilection.



La participation du béton engendre : Une augmentation de l'inertie, une augmentation du moment résistant et une augmentation de la rigidité de la structure ($\text{Moment}_{\text{acier-béton}} > \text{Moment}_{\text{acier seul}}$).



1.1 PLANCHERS DALLES – PLANCHERS CHAMPIGNONS :

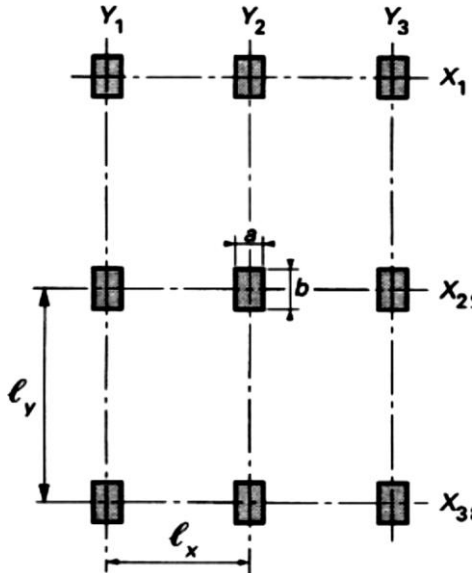
Description :

Un plancher dalle est un plancher sans aucune retombée pour les poutres s'appuyant directement sur les poteaux. Les poteaux peuvent être pourvus de têtes en forme de chapiteau ; ils sont alors dénommés planchers champignons, on peut également disposer d'une retombée locale au droit du poteau pour accroître sa résistance à la flexion et à l'effort tranchant. Dans les deux cas, les dalles sont pleines, en général d'épaisseur constante et pourvues d'armatures inférieures et supérieures disposées suivant deux directions orthogonales ; en principe, elles ne comportent pas d'étriers, sauf éventuellement très localement. Les dalles peuvent être prolongées en porte à faux au-delà des appuis de rive.

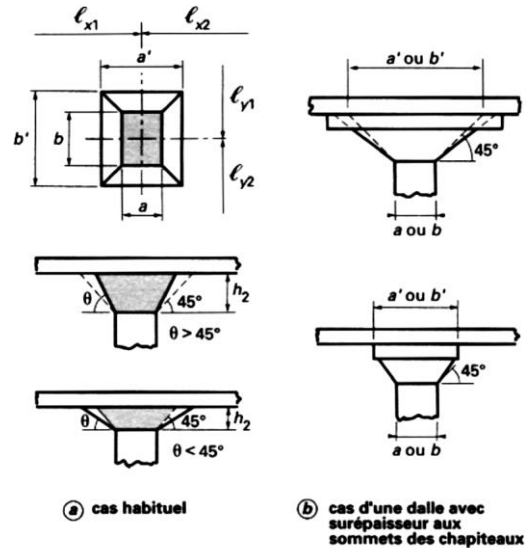
En raison de la présence des chapiteaux, les planchers-champignon ne sont pratiquement pas utilisés dans les bâtiments à usage d'habitation ou similaires où l'on a plutôt recours aux planchers-dalles ; ils sont en principe réservés aux planchers des bâtiments industriels à charge d'exploitation élevée.

Les chapiteaux d'un pilier intérieur est un tronc de pyramide ou de cône, dont la petite base est la section du pilier. La hauteur du chapiteau est la distance du plan de la petite base à la face inférieure du plancher.

$a' \leq 0.4 l_{x1}$ - $b' \leq 0.4 l_{y1}$ du panneau entourant le pilier qui a la plus faible surface.



Disposition des points d'appui dans les deux sens X et Y



Le volume utile est représenté par la zone trannée

Volume utile des chapiteaux.

Méthodes de calcul :

Dans le cas le plus général, la détermination des sollicitations dans les planchers-champignons et les planchers-dalles est très complexe.

Actuellement, de tels problèmes peuvent être traités par application de méthodes très élaborées telle la méthode des éléments finis, qui nécessite le recours au calcul automatique.

Méthode "portiques" : (BAEL91 annexe E4)

Cette méthode consiste à considérer un fonctionnement en portique, dans les deux directions indépendamment l'une de l'autre et pour chaque file de poteaux.

Ces portiques sont définis comme suit :

- Les piliers comme membrures verticales du portique ;
- Les dalles de chaque niveau, comprises entre deux parallèles à la direction étudiée et situées à mi-distance des axes des poteaux représentent les traverses des portiques.

Conditions d'application :

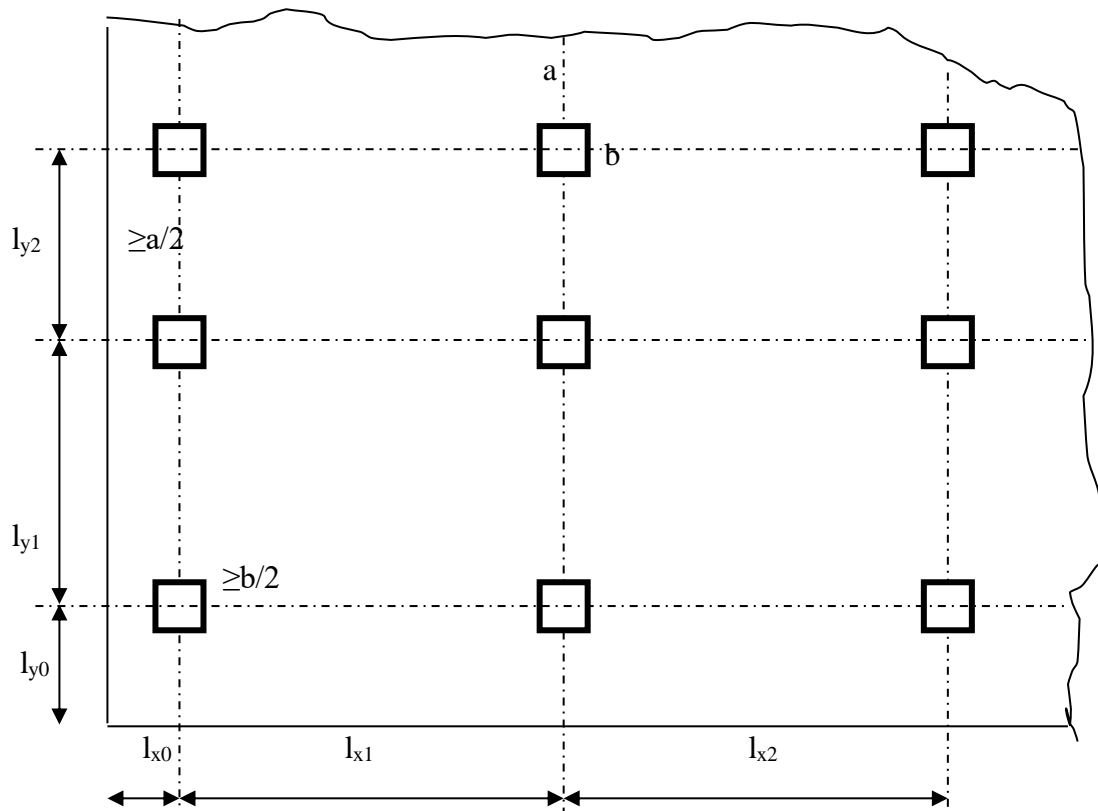
- La maille est régulière ;
- Les éléments porteurs filants peuvent exister aux rives seulement ;
- Des porte-à-faux sont autorisés ;
- La dalle est d'épaisseur constante ;
- Tous les poteaux intérieurs sont identiques ;
- Les poteaux de rive ont une section au moins égale à la moitié de celle des poteaux intérieurs ;
- La partie de chapiteau éventuel retenue est celle qui est située dans un cône à 45° à partir de sa base la plus petite, la dimension horizontale maximum d'un chapiteau ne doit dépasser 40 % de la portée de la dalle dans la même direction ;

- Le rapport des portées l_x et l_y dans deux directions perpendiculaires, doit être compris entre 0.5 et 2 ;
- Le rapport des côtés a et b des poteaux, doit être compris entre 0.5 et 2 ;
- Un côté de poteau ne doit dépasser 20 % de la portée dans la même direction.

$$L_y/2 \leq L_x \leq 2 L_y ; b/2 \leq a \leq 2b ; a \leq L'_x / 5 \text{ et } b \leq L'_y / 5$$

L'_x et L'_y : le plus petit des côtés des panneaux adjacents au poteau.

Chapiteaux éventuels : $b'/2 \leq a' \leq 2b'$



Charge de calcul :

La charge de calcul est supposée uniformément répartie sur le panneau chargé. On peut admettre des charges localisées limitées au 1/10 de la charge totale d'exploitation supportée par le panneau (charge répartie + charge localisée)

Détermination des portiques.

Méthode générale :

On délimite les portiques par bandes générales de dalles rattachées à une file de poteaux. Les portées des traverses sont prises entre axes des poteaux, les longueurs de calcul des poteaux de dessus de plancher (ou de dessus de fondation) à dessus de plancher.

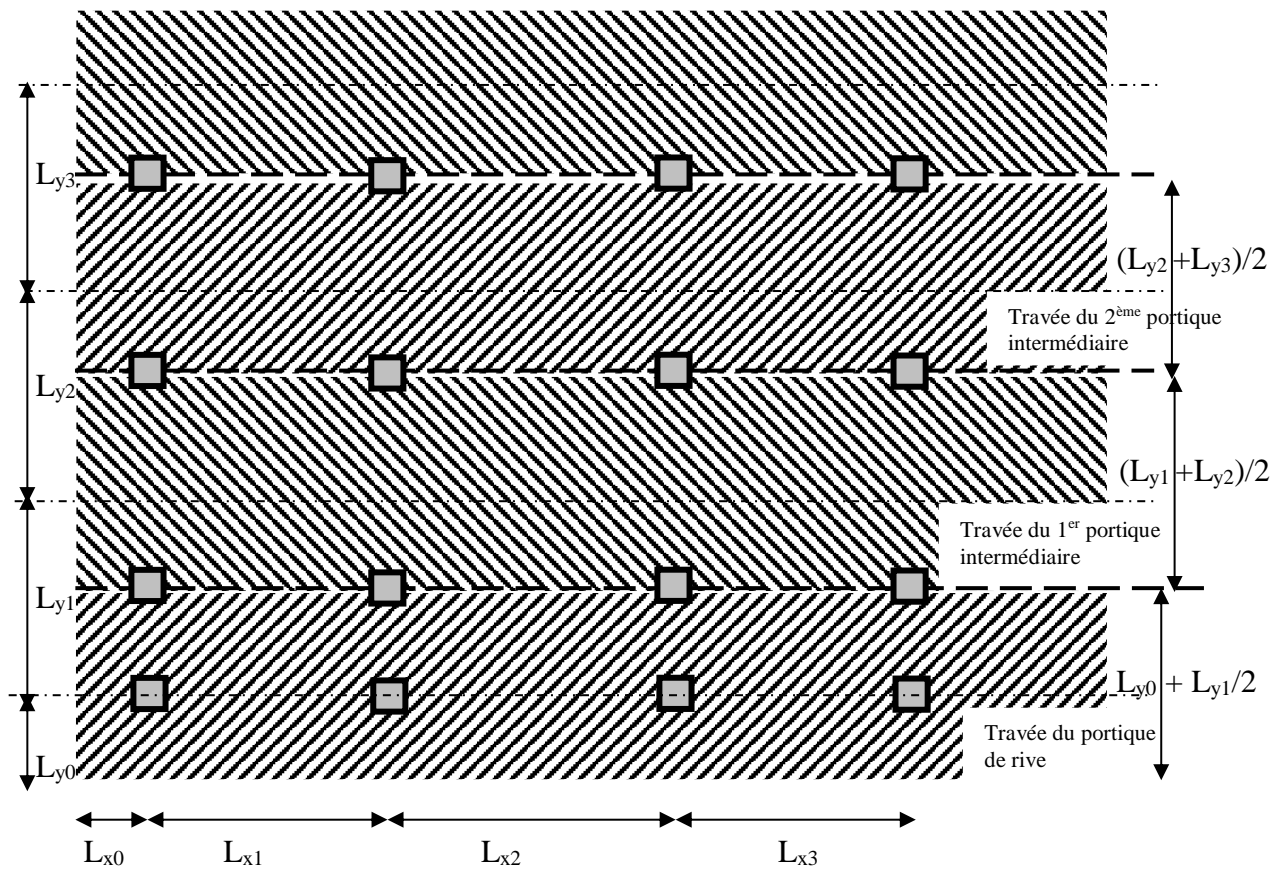
Calcul des portiques :

On peut soit, utiliser la méthode de Cross soit la méthode Caquot (extension aux portiques). Cette dernière peut être appliquée aux portiques précédemment définis soumis aux charges verticales sous réserve de tenir compte des conditions suivantes :

- $\frac{L_x}{L_y} \leq 1.50$ - et - $\frac{a}{b} \leq 1.50$
- $0.7 L_{xi-1} \leq L_{xi} \leq 1.3 L_{xi+1} ; 0.7 L_{xi+1} \leq L_{xi} \leq 1.3 L_{xi-1}$

$$\left. \begin{array}{l} |L_{xi} - L_{xi-1}| \\ |L_{xi} - L_{xi+1}| \end{array} \right\} \leq 30 \% L_{xi}$$

- La résistance aux forces horizontales (contreventement) est assurée par une structure rigide (murs refends, palées) ;
- Apport des modifications et hypothèses nécessaires dans la méthode approchée.



Évaluation des sollicitations :

Les sollicitations des portiques X ou Y peuvent être évaluées en considérant les poutres continues solidaires des poteaux qui les supportent.

Les valeurs des coefficients K et les valeurs absolues des moments M'_w et M'_e sont données par les relations :

$$K_w = \frac{I}{\lambda_{lw} I'_w} ; K_e = \frac{I}{\lambda_{le} I'_e}$$

$$K_s = \frac{2}{3} I_s \frac{(1 + 4\lambda_h)}{h'_s} ; K_N = \frac{2}{3} \frac{I_N}{h'_N} \left(1 + \frac{\lambda_H}{2} \right)$$

$$M'_w = \frac{p_w I_w^2}{8.5} \left(1.5 - \frac{\lambda_{lw}^2}{2} \right) \text{ et } M'_e = \frac{p_e I_e^2}{8.5} \left(1.5 - \frac{\lambda_{le}^2}{2} \right)$$

p : charge évaluée par mètre linéaire de bande de dalle constituant la traverse horizontale du portique.

λ_{le} ; λ_{lw} ; p_e ; p_w relatives aux travées de gauche et de droite du nœud considéré.

$$\lambda_h = \frac{h_2}{h_s} = \frac{\text{hauteur} - \text{du} - \text{chapiteau}}{\text{hauteur} - \text{du} - \text{poteau}} \quad \lambda_{ll} = \frac{l_{x(y)} - a'(b')}{l_{x(y)}} \text{ Selon la direction de calcul.}$$

La méthode approchée n'est applicable que pour : $\lambda_h \leq 0.3$ et $\lambda_l \geq 0.6$

Division des panneaux de la dalle en bandes :

Chaque bande générale comprise entre deux files de poteaux, est décomposée en :

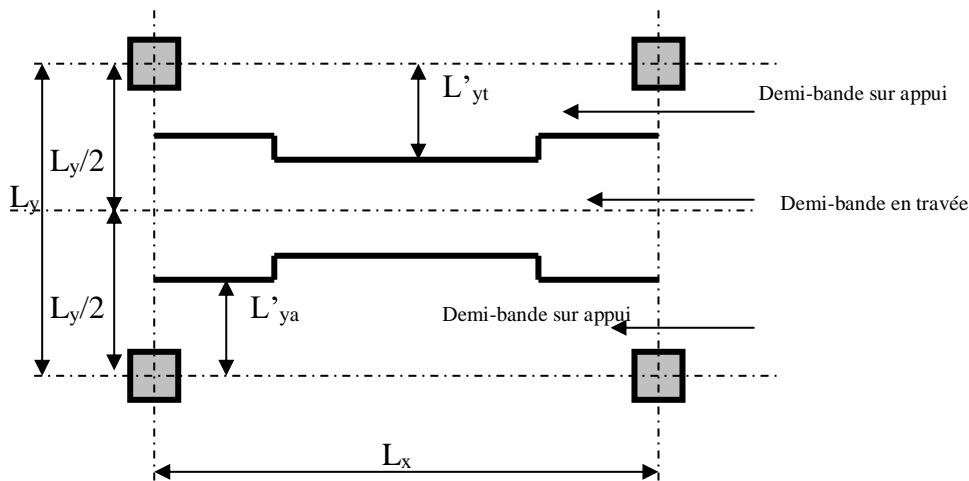
- Pour l'évaluation de la résistance de la dalle aux moments sur appuis.

Deux demi-bandes sur appuis de largeur : Max de
$$\begin{cases} L'_{ya} = \frac{b'}{2} + h \\ \text{et } L'_{ya} = 1.5 \left(\frac{b}{2} + h \right) \end{cases}$$

h : épaisseur de la dalle.

- Pour l'évaluation de la résistance de la dalle aux moments en travée.

Une bande en travée de largeur $L'_{yt} = L'_{ya} + \frac{L_x}{10}$ et on doit vérifier : $L'_{ya} - \text{et} - L'_{yt} \leq \frac{L_y}{4}$

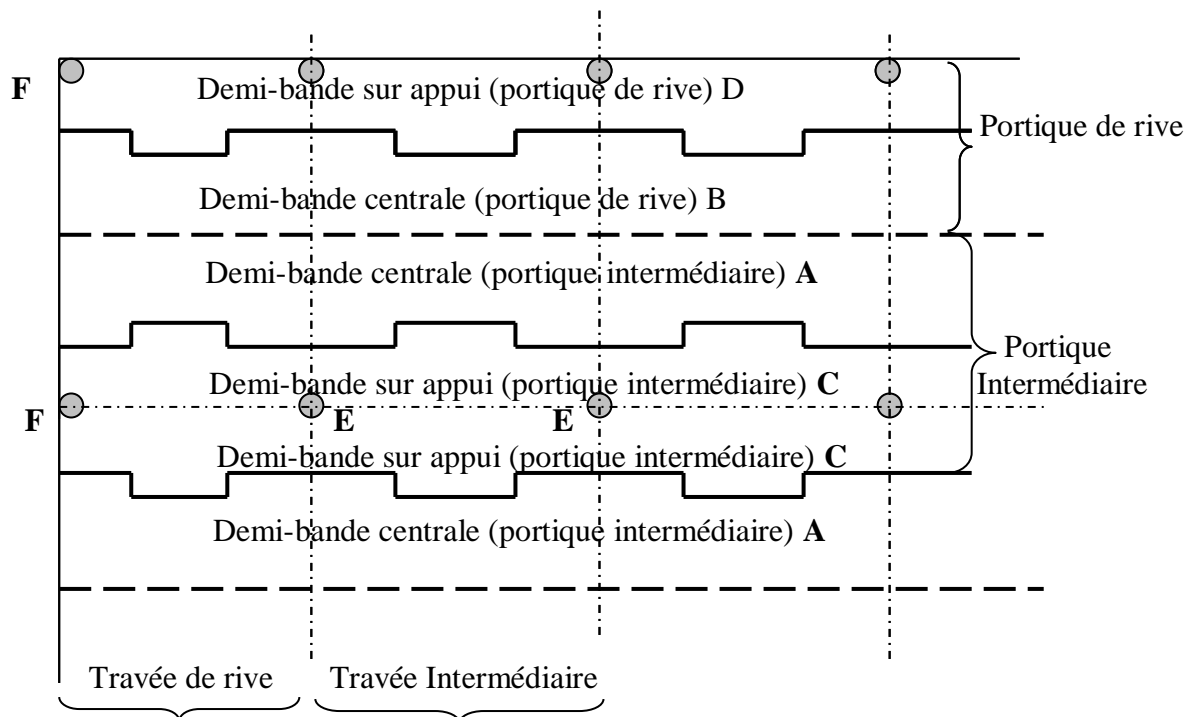


RÉPARTITION DES MOMENTS FLÉCHISSANTS ENTRE DIFFÉRENTES BANDES :

Les moments calculés pour une bande générale sont à répartir suivant les bandes en travée pour tenir compte de la transmission des charges vers les poteaux par les parties de dalle les moins déformables. Ces moments sont répartis entre les bandes centrales et les bandes sur appuis conformément aux indications suivantes dans lesquelles :

- ❖ M_u et M'_u représentent respectivement les valeurs absolues maximales des moments positifs et négatifs sollicitant une travée quelconque d'un portique intermédiaire.
- ❖ M_{1u} et M'_{1u} représentent respectivement les valeurs absolues maximales des moments positifs et négatifs sollicitant un portique de rive.

Ils doivent être déterminés en tenant compte des prolongements de la dalle en porte-à-faux lorsqu'ils existent.



Demi-bande considérée		Moments positifs	Moments négatifs au voisinage d'un pilier intérieur E	Moments négatifs au voisinage d'un pilier de rive F	
				Rive non supportée	Rive supportée
A		$0.20 M_u$	$0.12 M'_u$	$0.10 M'_u$	$0.20 M'_u$
B		$0.40 M_{1u}$	$0.24 M'_{1u}$	$0.20 M'_{1u}$	$0.40 M'_{1u}$
C		$0.30 M_u$	$0.38 M'_u$	$0.40 M'_u$	$0.30 M'_u$
Demi-bande sur appui d'un portique de rive D	Rive non supportée	$0.60 M_{1u}$	$0.76 M'_{1u}$	$0.80 M'_{1u}$	$0.60 M'_{1u}$
	Rive supportée*	$0.30 M_{1u}$	$0.38 M'_{1u}$	$0.40 M'_{1u}$	$0.30 M'_{1u}$

* dans ce cas M_{1u} et M'_{1u} sont calculés comme si la rive n'était pas supportée.

On fera de même pour L'ELS.

Rive supportée : cas où le long de la rive considérée existe, soit une poutre ayant une hauteur totale de section au moins égale à trois fois l'épaisseur h de la dalle, soit un mur capable de supporter celle-ci effectivement.

Si $h_{\text{poutre}} < 3h$, on prend les coefficients de répartition intermédiaires entre ceux donnés pour la rive non supportée et pour la rive supportée, déterminés par interpolation linéaire en fonction du rapport

$$\frac{h_{\text{poutre}}}{h_{\text{dalle}}}.$$

L'épaisseur minimale de la dalle h :

$l \leq 22 h$ (plancher supportant des revêtements ou cloisons fragiles).

$l \leq 30 h$ (autres).

Méthode simplifiée

Les chapiteaux étant rares, aussi en bâtiments courants les charges d'exploitation sont modérées, on pourra utiliser la méthode simplifiée qui dispense d'un calcul en portique fastidieux.

Conditions d'application de la méthode simplifiée :

En plus des conditions générales énumérées pour la première méthode on a :

- La structure est contreventée par voiles ou palés de contreventement ;
- Il existe au moins deux travées dans chaque direction ;
- Les charges d'exploitation ne dépassent pas les 2/3 des charges permanentes ;
- Les dimensions des poteaux ne dépassent pas le 1/4 de la portée adjacente la plus faible dans la même direction ;
- Les rapports des portées de deux travées consécutives sont compris entre 0.5 et 2 ;
- Les portées sont prises entre axes des poteaux.

Méthode de calcul :

Chaque bande est calculée comme une dalle continue en utilisant l'une des méthodes connues :

- Méthode des trois moments
- Méthode de Caquot
- Règles forfaitaires.

Les poteaux de rive devront être capables de reprendre :

- $0.20 M_0$ si la largeur du poteau est inférieure à deux fois l'épaisseur de la dalle.
- $0.40 M_0$ dans le cas contraire (poteau raide).

M_0 étant le moment isostatique de la travée considérée dans le sens étudié dans la direction OX par

exemple on a : $= \frac{1}{8} p L_y L_x^2$

Dans le cas d'application des règles forfaitaires, on est dispensé d'étudier les cas de travées chargées –déchargées, on vérifiera que les moments sur appuis sont au moins égaux à la moitié des moments isostatiques de chacune des deux travées adjacentes.

Découpage de bandes générales en bandes sur appuis et en bandes sur travées :

Chaque bande générale comprise entre deux files de poteaux est découpée en :

- Deux demi-bandes sur appuis, pour l'évaluation de la résistance de la dalle aux moments sur appuis ;
- Une bande en travée pour l'évaluation de la résistance de la dalle aux moments en travée.

Répartition des moments globaux et des aciers : (idem que pour la première méthode)

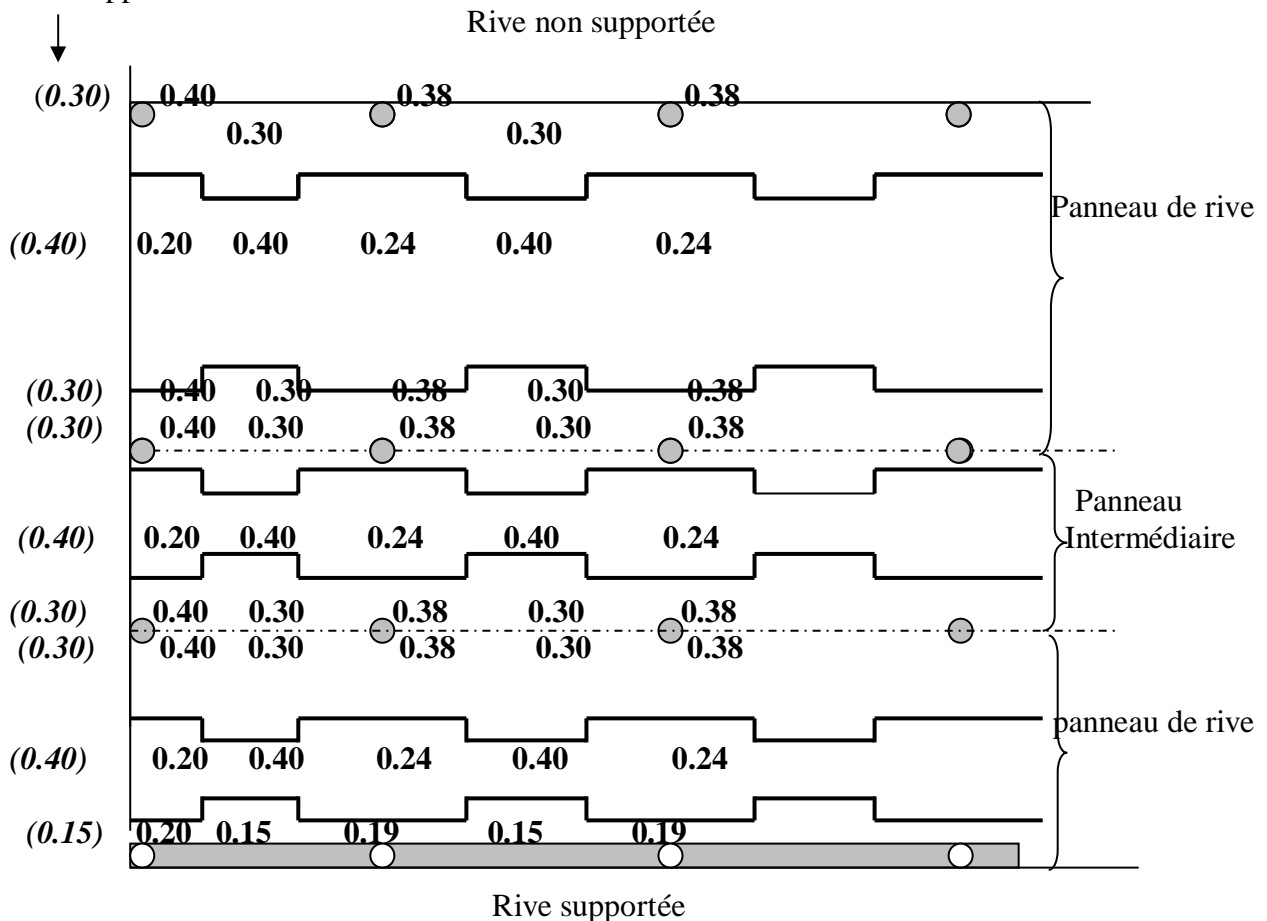
Les moments calculés pour une bande générale, de largeur $(L_{yi} + L_{yi+1}) / 2$, sont à répartir suivant les bandes sur appuis et les bandes en travée pour tenir compte de la transmission des charges vers les poteaux par les parties de dalle les moins déformables.

La répartition des armatures découle de la répartition des moments. Elle est uniforme dans chaque bande.

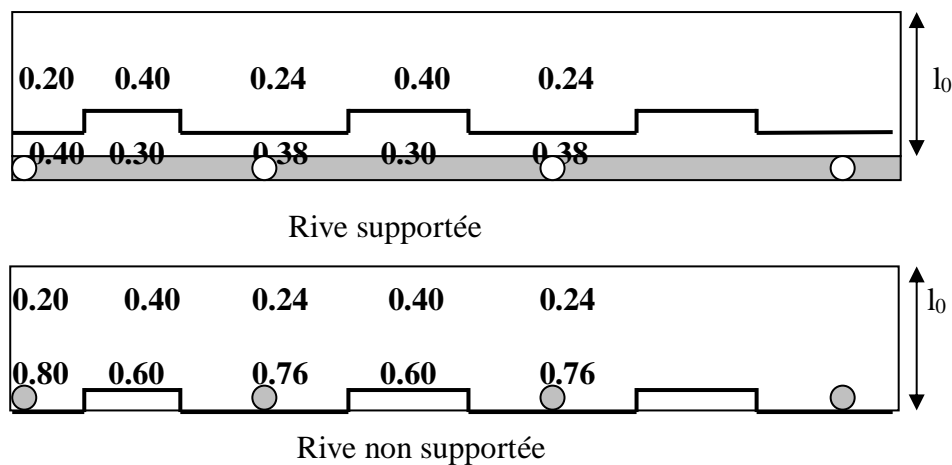
Le pourcentage minimum des aciers tendus est de 0.1 %.

Toutes ces dispositions sont valables pour les deux directions.

Rive supportée



En porte-à-faux :



Les moments fléchissants qui sollicitent les deux demi-bandes sur appuis situés de part et d'autre d'une file de poteaux, sont supposés uniformément répartis sur la totalité de la largeur de ces deux demi-bandes. En conséquence, la répartition des armatures est uniforme dans chaque bande sur appuis et dans chaque bande centrale. Les règles du BAEL pour les vérifications des sections et la détermination des armatures sont applicables.

🔗 Vérification à l'effort tranchant :

La vérification s'effectue au droit des poteaux et dans les deux directions. On admet de prendre la moitié de l'effort tranchant dans chaque direction. Ainsi, au nu d'appui du poteau suivant la coupe I-I, l'effort tranchant pour une charge répartie p vaut :

$$V = 0.5p \left(\frac{L_x - a}{2} \right) \left(\frac{L_{y1} + L_{y2}}{2} \right)$$

Si V''_u est la demi-somme des efforts tranchants qui sollicitent les deux panneaux de dalle voisins du poteau considéré dans la section parallèle située au nu de ce poteau (V''_u évalué avec des considérations poutres).

L'effort tranchant à prendre en compte dans la direction X a pour valeur :

$$V''_{ou} = V''_u \frac{\frac{L_{y1} + L_{y2}}{2} + b}{L_{y1} + L_{y2}} \quad (\text{Appui voisin de rive}).$$

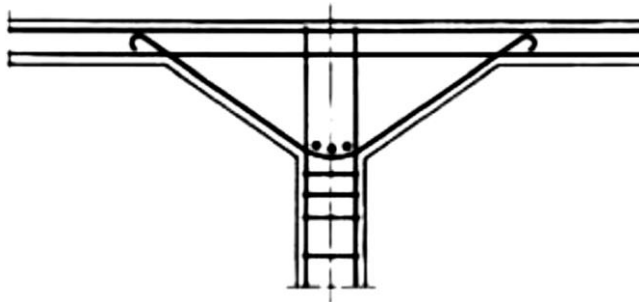
Sur un appui autre que le premier appui intermédiaire on a : $V''_{ou} = \frac{p}{8} (L_x - a) (L_{y1} + L_{y2} + 2b)$

Et il n'y a pas lieu de prévoir des armatures transversales si :

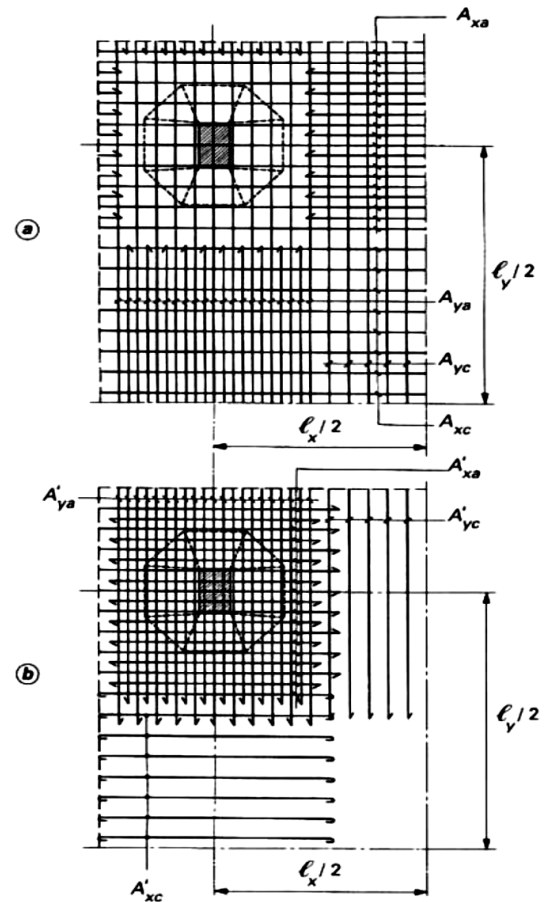
$$V''_{ou} \leq \frac{0.05}{\gamma_b} f_{c28} (b + h) d$$

On procède de même pour la direction OY.

Exemple de ferrailage :

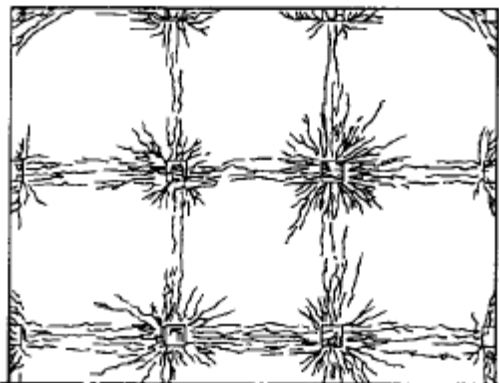


Armatures des chapiteaux



- A_{yb} armatures demi-bande centrale suivant l_y (1^{er} lit)
- A_{xc} armatures demi-bande centrale suivant l_x (2^e lit)
- A_{ya} armatures bande sur appuis suivant l_y (1^{er} lit)
- A_{xa} armatures bande sur appuis suivant l_x (2^e lit)
- A'_{ya} chapeaux sur appuis de la bande sur appuis suivant l_y (lit supérieur)
- A'_{xa} chapeaux sur appuis de la bande sur appuis suivant l_x
- A'_{xc} chapeaux sur bande centrale de la bande sur appuis suivant l_x (lit supérieur)
- A'_{yb} chapeaux sur bande centrale de la bande sur appuis suivant l_y
- (a) armatures inférieures**
- (b) armatures supérieures**

Essais de plancher-dalle – face supérieure



LES PLANCHERS À POUTRES ORTHOGONALES **(PLANCHERS AVEC DALLES) :**

Ce genre de plancher se compose d'un hourdis (dalle) d'épaisseur comprise entre 07 et 20 cm (voire plus), éventuellement de poutrelles (secondaires pour diminuer l'épaisseur de la dalle) et de poutres principales.

Une dalle est un élément structural horizontal généralement rectangulaire, dont une dimension (l'épaisseur) est faible (petite) vis-à-vis des deux autres dimensions (dimensions en plan que nous notons l_x et l_y). C'est un élément plan armé suivant une ou deux directions.

ÉTUDE DES DALLES PLEINES :

Méthodes de calcul des ouvrages ou éléments de structure en béton armé :

Les méthodes utilisées doivent satisfaire :

- aux conditions d'équilibre du premier ordre ;
- à l'ELU (l'ouvrage doit être résistant) ;
- à l'ELS (l'ouvrage doit avoir un bon comportement).

On distingue quatre types d'analyses :

- ✓ *L'analyse linéaire élastique : Le modèle suit la théorie de l'élasticité linéaire, c'est-à-dire la résistance des matériaux (RDM,*
- ✓ *L'analyse linéaire élastique avec redistribution : Le modèle doit suivre la théorie de l'élasticité linéaire, mais avec des redistributions assez limitées des moments sur appuis.*
- ✓ *L'analyse non linéaire : La théorie non linéaire tient compte du comportement non linéaire du matériau (analyse du second ordre) et ne s'applique qu'à l'ELU.*
- ✓ *L'analyse plastique : La théorie plastique pour des éléments suffisamment ductiles (et armés d'aciers à haute ductilité) permet d'envisager la création de mécanismes (lignes de rupture).*

Pour le calcul, la dalle sera considérée soit comme simplement appuyée, partiellement ou totalement encastree sur son pourtour. Les portées de calcul des dalles sont les distances entre les nus d'appuis (absence d'appareils d'appuis) des poutres ou voiles porteurs.

Généralement la dalle fléchit dans chacune des deux directions l_x , l_y et la flèche en tout point reste égale dans les deux sens. Et contrairement à ce que l'on pourrait penser, c'est dans le sens de la petite portée l_x que se développe le moment maximal, car sur la grande portée la flexion est davantage soulagée par l'appui longitudinal sur les côtés adjacents qui sont relativement proches et ce, plus que dans l'autre sens. Le moment fléchissant dans la grande portée devient d'ailleurs presque négligeable.

Par convention on a : $l_x < l_y$. Et $\alpha = l_x / l_y \leq 1$, ($l_x \geq 5$ fois l'épaisseur de la dalle)

Si le rapport α est inférieur à 0.4. On a :

- Si $\alpha < 0.40$ le panneau de dalle ne porte que dans le sens l_x ,
- Si $\alpha > 0.40$ le panneau porte dans les deux directions.

La dalle est aussi considérée porteuse dans une seule direction si, elle présente deux bords libres (sans appuis) sensiblement parallèles.

ÉPAISSEURS COURANTES : (A titre indicatif seulement)

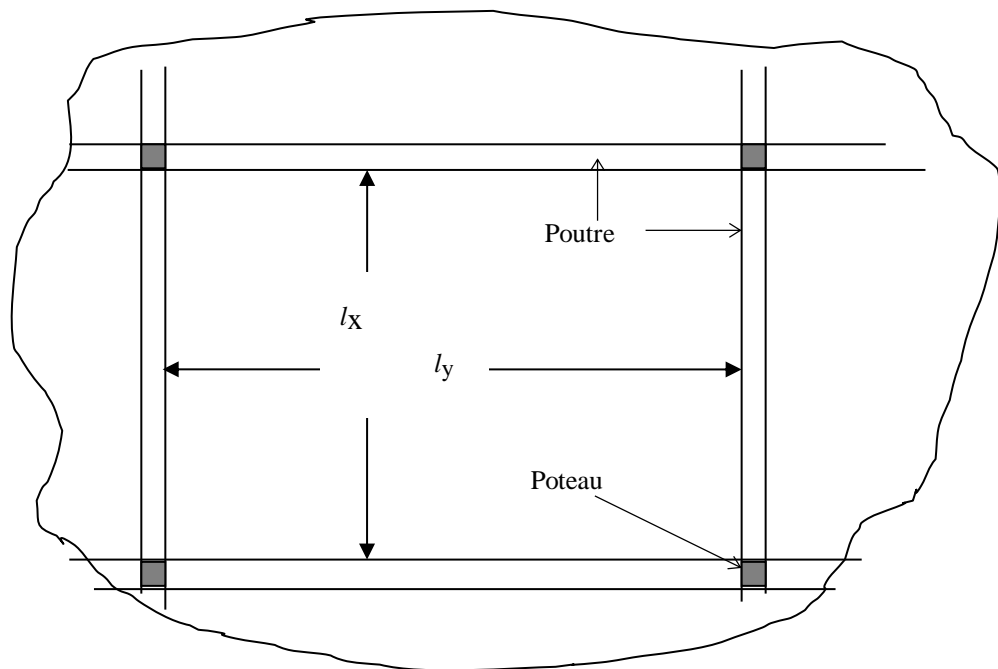
La dalle doit avoir une épaisseur **h** suffisante pour supporter son propre poids propre et les charges qui lui seront appliquées, pour assurer une flèche acceptable et aussi assurer une **isolation phonique** et une **résistance au feu** adéquates.

Condition de résistance :

- Pour les dalles portant dans un seul sens :
 - $h \geq l_x/20$ pour un panneau isolé
 - $h \geq l_x/25$ pour une dalle continue (plusieurs panneaux)
- Pour les dalles portant dans les deux sens :
 - $h \geq l_x/30$ pour un panneau isolé
 - $h \geq l_x/40$ pour une dalle continue.

NB :

- ✓ $h \geq 7\text{cm}$ pour 1 heure de coupe-feu ;
- ✓ $h \geq 11\text{cm}$ pour 2 heures de coupe-feu.

**CALCUL DES DALLES :**

D'une façon générale les dalles sont calculées en utilisant un modèle élastique et linéaire. Il est cependant loisible d'avoir recours à la méthode des lignes de rupture à condition de satisfaire aux conditions de validité qui lui sont propres (C.B.A 93).

La vérification de la sécurité d'une structure doit être effectuée vis-à-vis des divers états-limites correspondant aux différents critères de mise hors service.

Dans le cas particulier d'une structure plane, chargée normalement à son plan moyen, les états-limites à prendre en compte sont, dans le cas général :

- l'état-limite de fissuration,
- l'état-limite de déformation,
- l'état-limite ultime (de rupture).

Dans les structures planes en béton armé, l'état-limite ultime peut correspondre à :

- La rupture de poinçonnement,
- La rupture par épuisement de la résistance en flexion.

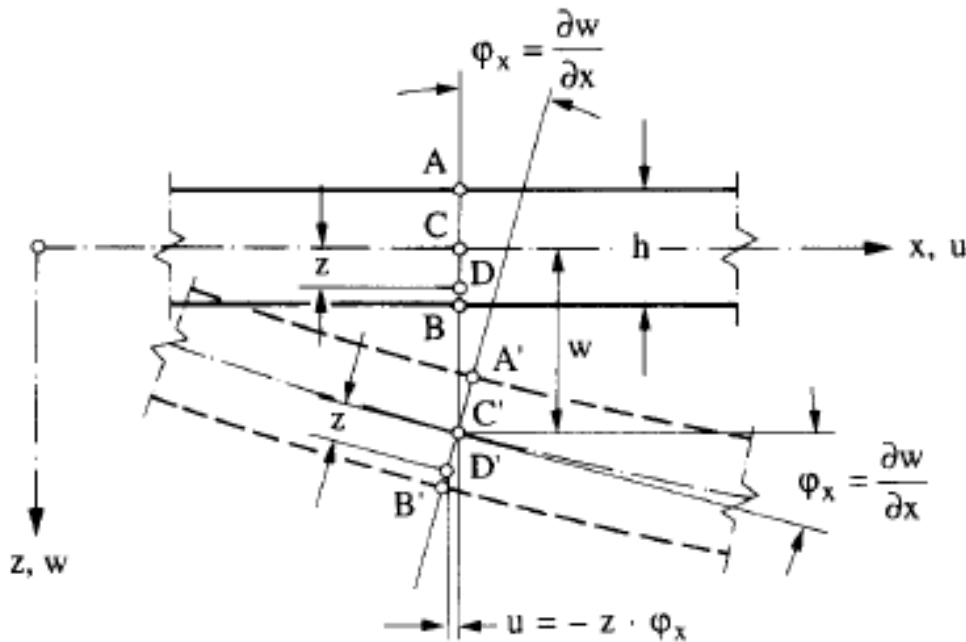
Dans le cas de la dalle encastree totalement ou partiellement sur son contour, l'usage avéré consiste à déterminer ces moments à partir du cas de la dalle simplement appuyée sur son pourtour. Les moments maximaux (au centre) ainsi trouvés M_x et M_y , servent à répartir les moments effectifs dans l'ouvrage en considérant un schéma de répartition en travée et sur appuis de manière à équilibrer tous les cas de combinaisons d'actions extérieures.

A/ CALCUL DANS LE DOMAINE ÉLASTIQUE :

La théorie de calcul des plaques minces chargées transversalement et dont les déformations restent petites, revient à résoudre l'équation aux dérivées partielles qui permet de déterminer les moments fléchissants. La relation entre la déformée $w(x, y)$ de la dalle et la charge répartie appliquée $q(x, y)$ a été établie par **Lagrange**.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{B}$$

B étant la rigidité.



Les moments en fonction de la déformée.

$$m_x = -B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \text{ et } m_y = -B \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$m_{xy} = -B(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\text{avec } B = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

La théorie d'élasticité donne des résultats précis à l'ELS, plus on se rapproche de la ruine, plus il faut s'attendre à des redistributions de moments.

La résolution de ce problème est généralement laborieuse et on utilise en pratique des méthodes approchées et des résultats fournis sous forme de tableaux et d'abaques.

MÉTHODE SIMPLIFIÉE : (calcul des sollicitations)

On distingue les dalles articulées sur leurs contours et les dalles continues.

1^{er} CAS : Dalle articulée sur son contour :○ **Charges uniformément réparties :**

- Cas où $\alpha < 0.40$: le panneau ne porte que dans le sens l_x

Le panneau de dalle sera considéré appuyé sur deux côtés seulement et sera étudié comme une poutre de largeur égale à un mètre et de hauteur égale à l'épaisseur de la dalle.

Au centre de la dalle et pour une bande de 1m de large (voir figure suivante), on aura :

$$M_{ox} = \frac{ql_x^2}{8} \longrightarrow A_x$$

Et $M_{oy} = 0$ Dans le sens l_y on disposera un ferraillage minimal.

$A_y = A_x/4$ pour des charges uniformément répartie et $A_y = A_x/3$ pour un chargement concentré.

Cas où $\alpha \geq 0.40$: le panneau porte dans les deux sens.

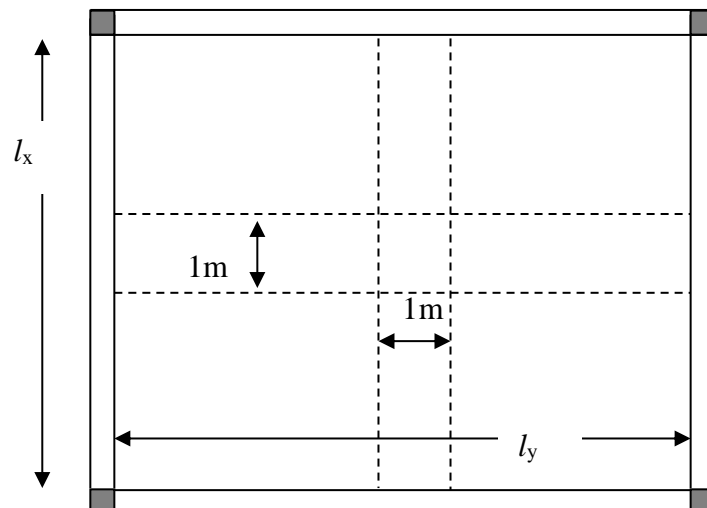
Toujours, au centre de la dalle et pour une bande de 1m de large on aura :

$M_{ox} = \mu_x ql_x^2$ (bande parallèle à l_x)

$M_{oy} = \mu_y M_{ox}$ (bande parallèle à l_y)

Avec pour valeurs approchées des coefficients μ_x et μ_y : ν étant le coefficient de poisson béton.

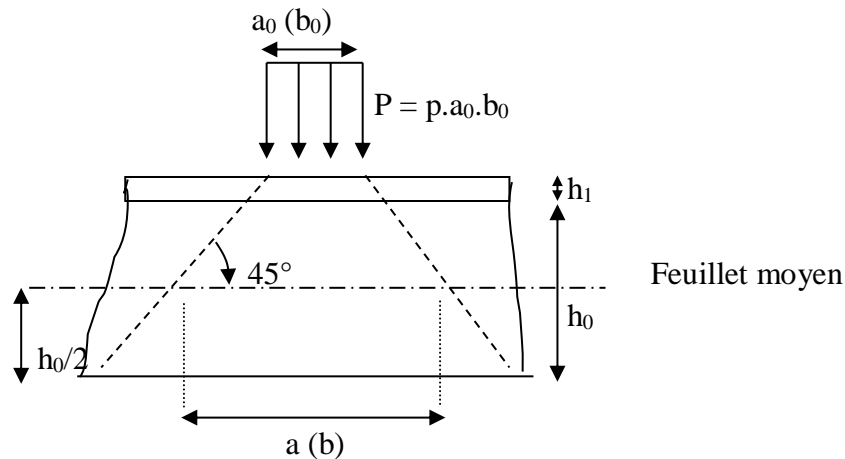
Calcul	μ_x	μ_y
Sollicitations à l'ELU et l'ELS ($\nu = 0.0$)	$\frac{1}{8(1 + 2.4\alpha^3)}$	$\alpha^3(1.9 - 0.9\alpha) \geq \frac{1}{4}$
Déformations (ELS) ($\nu = 0.2$)	$\frac{1}{8(1 + 2\alpha^3)}$	$\alpha^2\left(1 + \frac{3}{2}(1 - \alpha)^2\right) \geq \frac{1}{4}$



○ **Charges concentrées :**

Soit P une charge concentrée dont a_0 et b_0 sont les dimensions de contact de la charge avec la dalle.

On a pour la figure suivante :



a et a_0 : dimensions parallèles à l_x et b et b_0 : dimensions parallèles à l_y

$a = a_0 + h_0 + 2\xi h_1$ ($\xi = 1$ revêtement en béton et à 0.75 pour un revêtement moins résistant)

$b = b_0 + h_0 + 2\xi h_1$

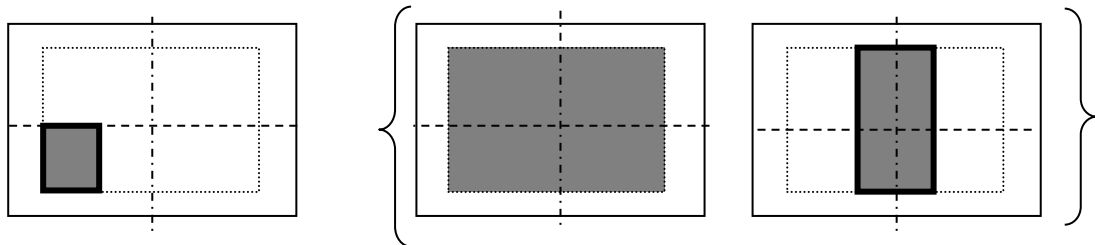
Moments dans la dalle :

$$M_{0x} = M_1 P \quad \text{pour le sens } l_x$$

$$M_{0y} = M_2 P \quad \text{pour le sens } l_y$$

$M_{1,2}$ sont donnés en fonction de α , a/l_x et b/l_y par les abaques de **Pigeaud** et ce pour des bandes de largeur unité au centre du panneau de dalle.

Pour une charge non centrée : on détermine les moments en travée par simple combinaison.



Moments aux encastremets : on prend $-0.15 M_{0x}$ si les bords sont liés à leurs supports et les valeurs des moments d'encastrement du 2^{ème} cas si la dalle est continue.

2^{ème} CAS : Dalles continues :

On désigne par M_{0x} et M_{0y} les moments évalués dans l'hypothèse où le panneau de dalle est articulé sur son contour.

- **Cas où $\alpha < 0.40$:** (charge uniformément répartie)

La dalle est calculée comme une poutre-dalle de largeur unitaire. Quand les fissures sont admises, on peut utiliser la méthode forfaitaire de calcul des poutres de plancher, avec les moments sur appuis = $-0.15 M_{0x}$ (M_{0x} de la travée de rive), ou la méthode de Caquot pour déterminer les moments de continuité.

Ou bien on prend forfaitairement :

$$\text{En travée : } M_t = \frac{ql_x^2}{10} \quad \text{En appui : } M_a = \frac{-ql_x^2}{20}$$

Quand les fissures ne sont pas tolérées, on peut utiliser les méthodes RDM (poutre sur appuis continus) et ce pour une bande de 1m de large.

- **Cas où $\alpha \geq 0.40$** : Pour les bâtiments courants, on peut utiliser la règle forfaitaire qui remplit les conditions suivantes :
 - Les moments en travée peuvent être réduits de 25% au maximum par rapport aux moments de la dalle articulée, selon les conditions de continuité aux appuis,
 - Les moments d'encastrement sur les grands côtés sont évalués à au moins 40 ou 50% du moment de la dalle articulée M_{0x} ,
 - Les moments d'encastrement sur les petits cotés prennent des valeurs du même ordre que sur les grands côtés,
 - Pour toute valeur de α , les moments d'encastrement sur les côtés sont de même ordre (M_{ax} partout et non pas M_{ay}).
 - Les armatures d'appui équilibrant ces moments sont appelées « chapeaux ».
 - Dans la portée principale l_x , on doit respecter :

$$M_{tx} + \frac{M_{ux} + M_{ex}}{2} \geq 1.25M_{0x}$$

$$\text{Et } M_{tx} \leq M_{0x}$$

Ce qui conduit à adopter les valeurs suivantes pour le moment en travée, en fonction des valeurs des moments sur appuis.

C O N T O U R G A U C H E		CONTOUR de DROITE			
		Appui simple 0	Encastrement faible 0.15 M_{0x}	Encastrement partiel 0.30 M_{0x}	Continuité 0.50 M_{0x}
	Appui simple 0	M_{0x}	M_{0x}	M_{0x}	M_{0x}
	Encastrement faible 0.15 M_{0x}	M_{0x}	M_{0x}	M_{0x}	0.925 M_{0x}
	Encastrement partiel 0.30 M_{0x}	M_{0x}	M_{0x}	0.95 M_{0x}	0.85 M_{0x}
	Continuité 0.50 M_{0x}	M_{0x}	0.925 M_{0x}	0.85 M_{0x}	0.75 M_{0x}

Ce même tableau est utilisé pour déterminer les moments dans la direction y.

Lorsque deux dalles ont un appui commun, on garde la plus grande des deux valeurs des moments calculés sur appui, sans changer la valeur des moments en travée.

ÉVALUATION DE L'EFFORT TRANCHANT :

La valeur de l'effort tranchant par unité de longueur sur le contour de la dalle, est évaluée comme suit :

- Charges uniformément réparties :

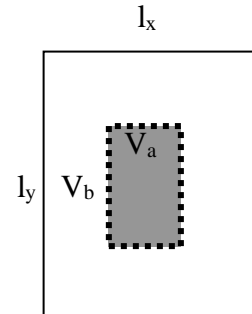
$$\text{Pour } \alpha < 0.40 \quad \begin{cases} V_x = ql_x/2 \\ V_y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Et pour } \alpha \geq 0.40 \quad \begin{cases} V_x = q \frac{l_x}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{2}} \\ V_y = \frac{ql_x}{3} \leq V_x \end{cases}$$

- Charges concentrées :

$$\text{Quelle que soit la valeur de } \alpha \text{ on a : } \begin{cases} V_a = \frac{P}{2a + b} \\ V_b = \frac{P}{3a} \leq V_a \end{cases}$$

$a > b$



Dans le cas où $a < b$, inverser dans les formules ci-dessus a et b .

- Cas général : (charges uniformes et concentrées appliquées simultanément)

$$V = V_x + V_b \text{ ou } V = V_y + V_a$$

NÉCESSITÉ D'ARMATURES D'ÂME :

On n'aura pas besoin d'armatures transversales si :

- La dalle est bétonnée sans reprise dans son épaisseur ;
- La contrainte tangente dans le béton vérifie :

$$\tau = \frac{V_u}{d} \leq 0.07 \frac{f_{cj}}{\gamma_b} \text{ (Pour une bande de 1 mètre).}$$

Si non, on fera l'étude au cisaillement, comme pour les poutres avec τ_{lim} multipliée par :

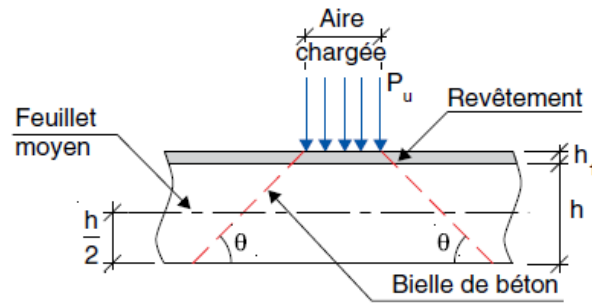
$$\frac{10}{3} . h_0 \text{ Si on a : } 0.15 \leq h \leq 0.30 \text{ m et } 1 \text{ si } h \geq 0.30 \text{ m.}$$

POINÇONNEMENT : (présentation du phénomène)

Le poinçonnement est un phénomène qui est susceptible de se produire au voisinage des zones d'application des charges concentrées sur les faces supérieures ou inférieures des dalles. Si une dalle est de faible épaisseur et si elle est soumise à une charge importante, concentrée sur une petite surface, on risque de voir la charge passer à travers la dalle par poinçonnement (perforation).

La transmission de la charge concentrée à la dalle (ou à la semelle) s'effectue par l'intermédiaire de bielles de béton : partant du contour de l'aire chargée et formant un angle avec le feuillet moyen de l'élément.

Si la charge concentrée est trop importante et/ou si l'aire d'application de cette charge est trop petite, il risque de se produire un « arrachement » d'une portion de la dalle entourant la zone de chargement par rapport au reste de la dalle :



Le poinçonnement a pour effet d'engendrer une fissuration suivant des plans orientés de 45° à partir du rectangle d'application de la charge et la rupture par poinçonnement peut être assimilée à une rupture par cisaillement le long de ces plans inclinés.

Pour éviter cela, on dispose d'armatures transversales. On se dispense de ces armatures si la charge concentrée Q_u (éloignée des bords de la dalle) remplit la condition suivante :

$$Q_u \leq 0.045 U_c \cdot h_0 \cdot \frac{f_{cj}}{\gamma_b}$$

Q_u : charge de calcul à l'ELU

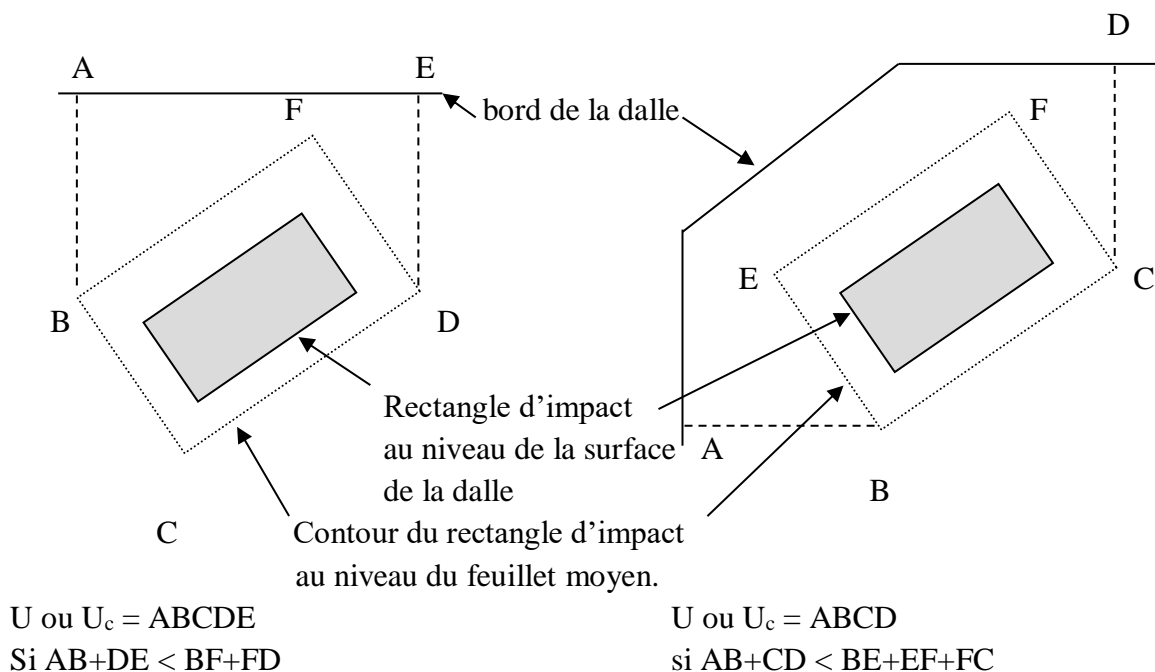
h_0 : épaisseur de la dalle

U_c : périmètre du rectangle d'impact au niveau du feuillet moyen de la dalle.

Si non, on prévoit des armatures d'âme (comme pour l'effort tranchant), disposées à l'intérieur du contour U situé à la distance x de U_c , telle que :

$$Q_u \leq 0.045 (U_c + 8x) \cdot h_0 \cdot \frac{f_{cj}}{\gamma_b} \quad (U > U_c)$$

- Charge concentrée voisine des bords de la dalle : on fait de même mais en modifiant éventuellement U_c comme suit :



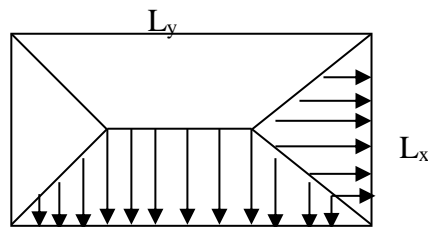
ÉTAT LIMITE DE DÉFORMATION : (CBA.93)

Les vérifications relatives aux déformations sont applicables. Toutefois, dans le cas des dalles rectangulaires appuyées sur leurs côtés, on peut admettre qu'il n'est pas nécessaire de procéder au calcul des flèches si les conditions suivantes sont respectées.

- $\frac{h_0}{l_x} > \frac{M_t}{20.M_{0x}}$ ($M_t \geq 0.75 M_{0x}$)
- $\frac{A}{b.d} \leq \frac{2}{f_e (MPa)}$

TRANSMISSION DES CHARGES DES DALLES AUX POUTRES :

Les lignes de rupture d'un panneau de dalle qui forment un angle de 45° avec les rives du panneau et celles qui sont parallèles à son grand côté, définissent la méthode de transmission des charges des dalles aux poutres.



Pour la simplification des calculs, on définit des charges uniformément réparties équivalentes sur les travées des poutres comme suit :

- p_v produisant le même effort tranchant sur appui de la poutre de référence que la charge apportée par la dalle ;
- p_M produisant le même moment fléchissant à mi-travée de la poutre de référence que la charge apportée par la dalle.

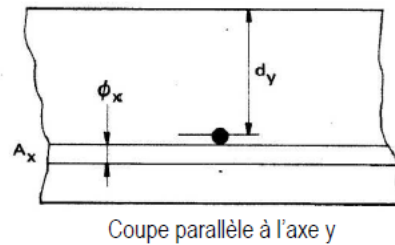
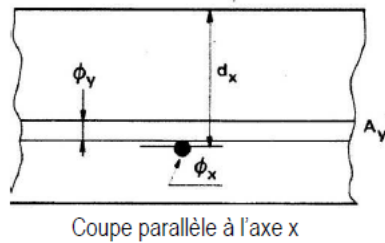
Pour un panneau de dalle, les expressions de p_v et p_M sont les suivantes :

Charge	Elément	Trapèze	Triangle
p_v		$(1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{p.l_x}{2}$	$\frac{p.l_x}{4}$
p_M		$(1 - \frac{\alpha^2}{3}) \frac{p.l_x}{2}$	$\frac{p.l_x}{3}$

- les formules des charges en trapèze deviennent celles des charges en triangle pour $\alpha = 1$;
- pour deux panneaux, de part et d'autre de la poutre considérée, les charges réparties déterminées précédemment pour chacun des panneaux contigus s'additionnent.

FERRAILLAGE DES DALLES

Connaissant les moments maximaux, le ferrailage est calculé en flexion simple comme pour une poutre, en considérant une largeur de dalle de $1,00m$, dans les directions x et y . La hauteur utile à considérer dans les calculs.



Le ferrailage peut être réalisé avec (ou sans) Treillis Soudés (TS) standardisés, quelques barres pouvant être ajoutées pour compléter le ferrailage.

On doit avoir :

- $A_y \geq A_x / 3$ si les charges appliquées comprennent des efforts concentrés,
- $A_y \geq A_x / 4$ si les charges sont uniquement réparties.

▪ Sections minimales : (conditions de non fragilité)

Sens l_y ; en exprimant h_0 en mètre :

$$A_{ymin}(cm^2/m) = \begin{cases} 12 h_0 \text{ (lisses)} \\ 8 h_0 \text{ (FeE400)} \\ 6 h_0 \text{ (FeE500)} \end{cases}$$

$$\text{Sens } l_x : A_{xmin}(cm^2/m) = A_{ymin} \cdot \frac{3 - \alpha}{2}$$

$$\text{Ou } A_{xmin} = 1.2 A_{ymin} \text{ (CBA.93)}$$

❖ Espacements minimaux :

- Cas de fissuration peu préjudiciable et charges uniformément réparties :

$$S_{tx} \leq \text{Min} \begin{cases} 3h_0 \\ 33 \text{ cm} \end{cases}$$

$$S_{ty} \leq \text{Min} \begin{cases} 4h_0 \\ 45 \text{ cm} \end{cases}$$

- Cas où la dalle supporte également des charges concentrées (fissuration peu préjudiciable)

$$S_{tx} \leq \text{Min} \begin{cases} 2h_0 \\ 25 \text{ cm} \end{cases}$$

$$S_{ty} \leq \text{Min} \begin{cases} 3h_0 \\ 33 \text{ cm} \end{cases}$$

- Cas où la fissuration est préjudiciable : (pour $h_0 \leq 40 \text{ cm}$)

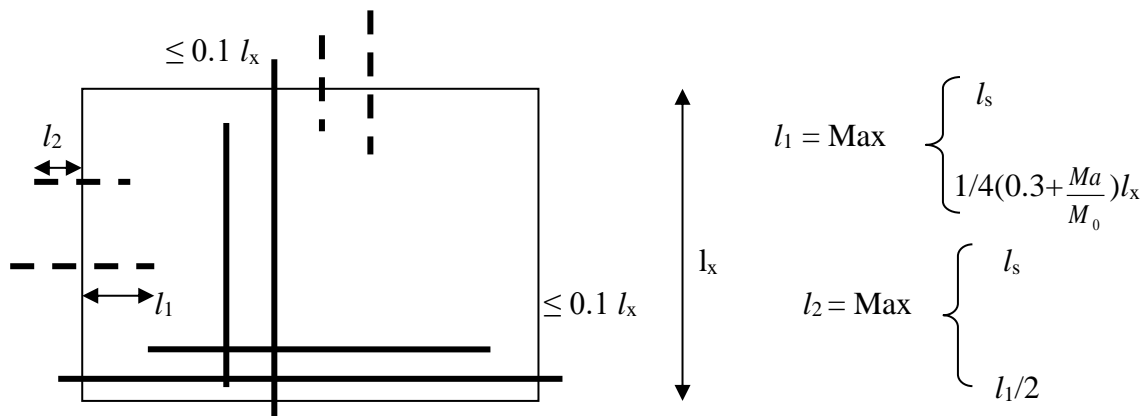
$$S_{tx} \text{ et } S_{ty} \leq \text{Min} \begin{cases} 2h_0 \\ 25 \text{ cm} \end{cases} \quad \Phi \geq 6 \text{ mm (pour le sens } l_x)$$

- Cas où la fissuration est très préjudiciable : (pour $h_0 \leq 40 \text{ cm}$)

$$S_{tx} \text{ et } S_{ty} \leq \text{Min} \begin{cases} 1.5h_0 \\ 20 \text{ cm} \end{cases} \quad \Phi \geq 8 \text{ mm (pour le sens } l_x)$$

❖ Arrêt des armatures :

- cas des charges uniformes : on procède à l'arrêt des armatures en travée et des chapeaux par moitié, les aciers (non arrêtés) traversant le contour de la dalle étant ancrés au-delà de celui-ci.



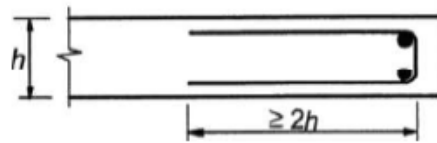
Dans le cas de charge uniformément répartie plus des charges concentrées :

Les armatures inférieures traversent toutes le contour d'appui et sont totalement ancrées au-delà.

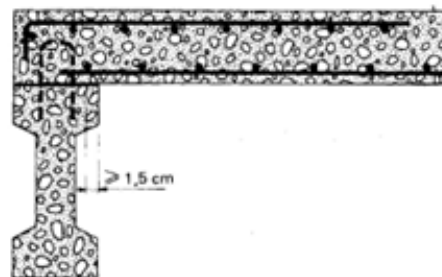
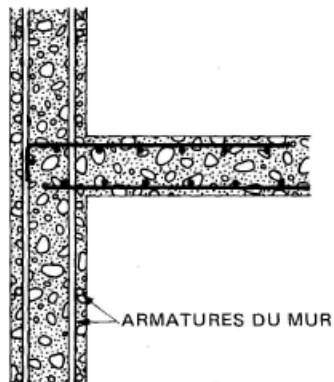
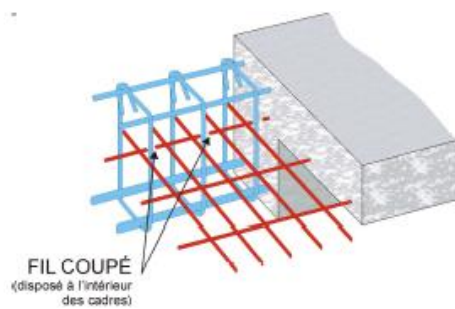
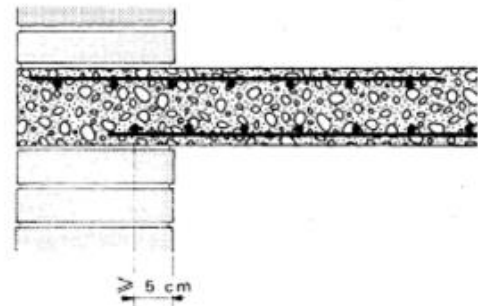
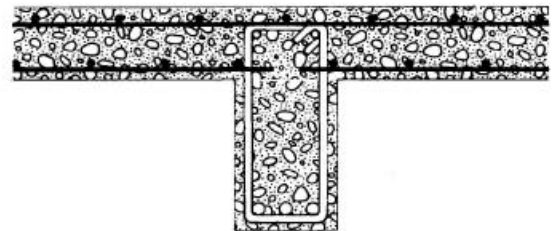
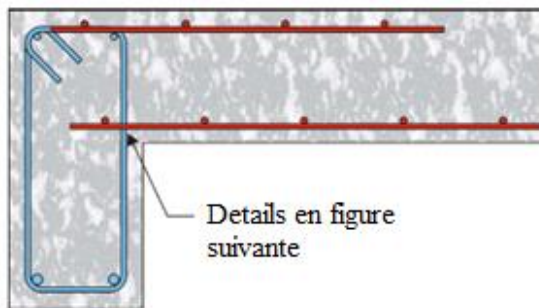
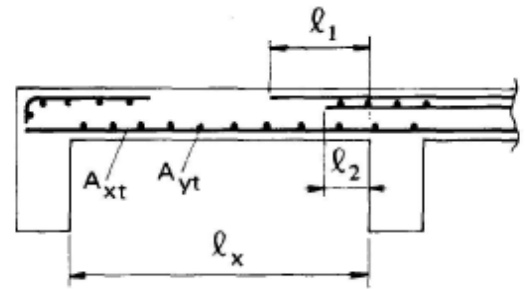
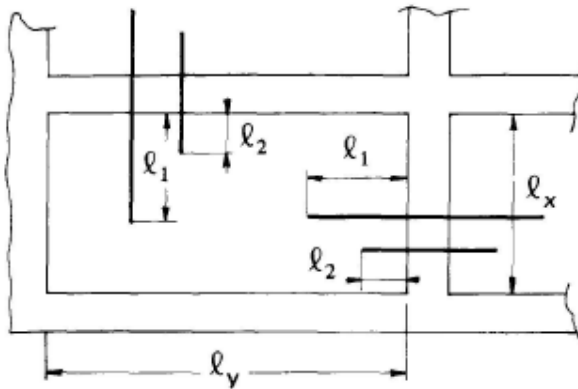
NB : Deux plans de ferrailage par dalle sont nécessaires, l'un pour le ferrailage de la nappe inférieure (en travée), l'autre pour le ferrailage de la nappe supérieure (chapeaux sur appuis).

DISPOSITIONS CONSTRUCTIVES

- Diamètre des armatures : $\Phi_{(x,y)} \leq \frac{h_0}{10}$ de préférence on prend $\Phi_x = \Phi_y$
- Disposition des barres :



Armatures de rive pour une dalle



B/ CALCUL DES DALLES DANS LE DOMAINE PLASTIQUE :

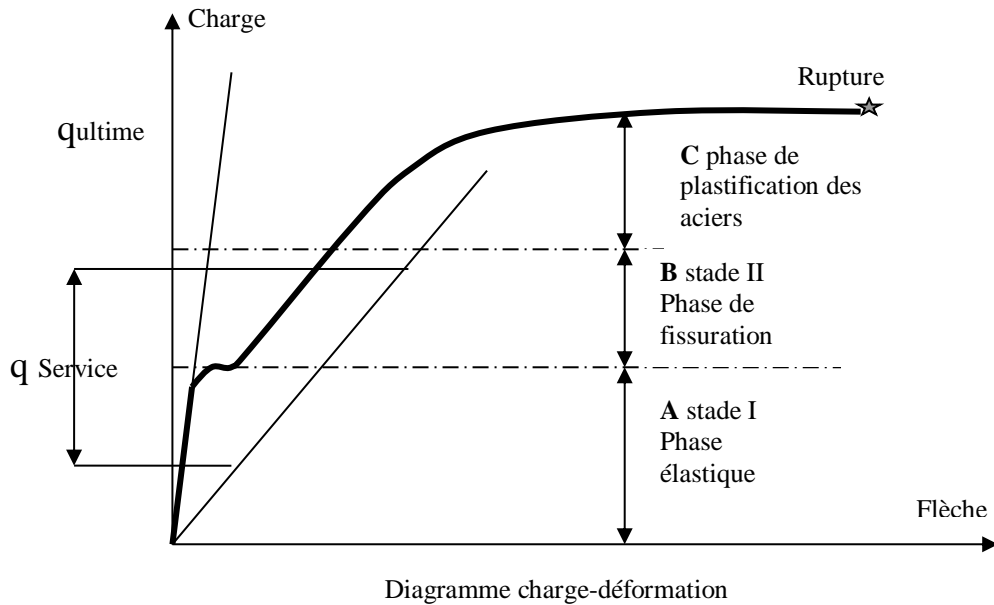
(Méthode des lignes de rupture)

L'analyse élastique d'une structure est importante pour étudier son comportement sous charge de service, charge pour laquelle elle a été conçue et qu'elle est destinée à supporter. Cependant, si la charge tend vers la charge ultime, les sections les plus sollicitées de la structure se plastifient et forment des rotules plastiques qui transforment la structure en un mécanisme pouvant conduire à son effondrement sous le moindre accroissement de charge.

Les nombreux essais de chargement effectués sur des plaques en B-A ont montré que la résistance ultime de la plaque est obtenue lorsque les fissures principales atteignent les bords de la plaque. Dans cet état-limite, la plaque est divisée par les lignes de rupture (rectilignes) en un certain nombre d'éléments de plaque, qui forment un mécanisme.

Le comportement d'une dalle au cours d'un chargement progressif jusqu'à sa rupture :

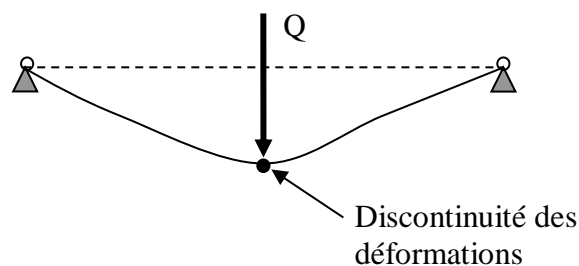
- ✓ Phase élastique : Répartition classique des moments de flexion. La dalle se comporte pratiquement comme un matériau élastique homogène et isotrope. N'étant pas fissurée elle se trouve en stade I.
- ✓ Phase de fissuration : Apparition de fissures dans le béton tendu, donc réduction progressive des inerties des sections fissurées, donc modification de la répartition des moments de flexion, les moments dans les zones non fissurées augmentant plus, pour un même accroissement de charge, que dans la phase élastique. Tant que l'armature travaille dans le domaine élastique, l'ouverture des fissures est limitée. La dalle est en stade II.
- ✓ Phase de plastification : À condition que le pourcentage d'armature de traction soit suffisamment faible, plus précisément qu'il soit inférieur au pourcentage critique supérieur, ce qui est le cas en général dans les structures planes en béton armé, on a la phase de plastification progressive des aciers dans les zones où les moments sont les plus élevés, donc plus importante redistribution des moments. La plastification gagne progressivement le long des bandes où sont concentrées les fissures les plus ouvertes (moments max). Ces bandes peuvent être assimilées à des lignes "d'articulation" qui se comportent comme des charnières plastiques permettant des déviations angulaires des parties de dalle qu'elles limitent.
Ces lignes se développent suivant un schéma qui dépend notamment de la forme de la structure, des conditions d'appui et du mode de chargement.
- ✓ Phase de rupture : Lorsque les lignes d'articulation ont atteint un stade de développement tel que la dalle soit transformée en un « mécanisme », une très légère augmentation des charges conduit alors à un état d'équilibre instable. La dalle continue alors de se déformer par rotation autour des lignes d'appui, jusqu'à ce que la rotation dans certaines zones atteigne une valeur suffisante pour entraîner la destruction par écrasement du béton comprimé et ce progressivement sur toute la longueur des lignes d'articulation (de rupture).



Cette méthode suppose donc une rupture le long de lignes droites séparant un certain nombre de plans qui tournent autour de ces lignes considérées comme des rotules plastiques.

FORMATION DU MÉCANISME DE RUINE :

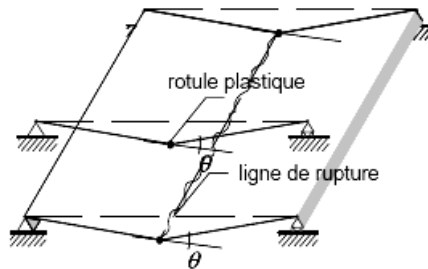
- **Moment plastique** : pour la résistance ultime d'une section vis-à-vis de la flexion, on adopte souvent les notations M_R (résistance ultime à la flexion ou moment de rupture) ou M_P (moment de plastification de l'armature ou simplement moment plastique). Tant qu'une section n'est pas surarmée et que la résistance ultime est donnée par l'écoulement ou plastification de l'acier d'armature, on a : $M_R = M_P = A_s \cdot f_s \cdot z$.
- **Rotule plastique** : lorsque le moment dans une section de poutre ou une dalle (voir figure suivante) atteint le moment plastique M_P , la courbure tend localement vers l'infini. Cette section se comporte comme une rotule et permet une rotation relative des deux segments de poutre adjacents. Cependant, cette rotule continue de transmettre le moment plastique et on l'appelle rotule plastique pour la distinguer des rotules mécaniques.



- Rotule mécanique sans frottement
- Rotule plastique

- **Mécanisme de ruine** : avec la formation d'une rotule plastique dans une structure hyperstatique, le degré d'hyperstaticité est réduit d'une unité. De cette façon, une poutre simple, isostatique au départ, se transforme en une structure statiquement instable lorsque la rotule plastique se forme, et on parle alors de **mécanisme de ruine**. Un mécanisme est

un ensemble de barres (ou plaques pour les dalles) reliées par des rotules (respectivement des lignes d'articulation pour les dalles) formant un système déformable à un degré de liberté. Ce système est statiquement instable ; il s'effondre sous une charge appelée charge ultime de la structure.



MÉTHODES DE CALCUL : sans entrer dans les détails, sachons qu'il existe deux méthodes de calcul plastique : la méthode statique et la méthode cinématique.

- **Théorème statique** : « Toute charge Q_i à laquelle correspond un champ de moment M_i stable ($M < M_p$) et statiquement admissible est inférieur ou égale à la charge ultime exacte Q_u . »
- **Théorème cinématique** : « Toute charge Q_i à laquelle correspond un mécanisme de ruine cinématiquement admissible est supérieure ou égale à la charge ultime exacte Q_u . »

APPLICATION AUX DALLES :

Pour le calcul plastique des dalles, les deux méthodes sont applicables. Quoique la méthode statique reste compliquée à cause de la multitude des champs de moments qui peuvent satisfaire l'équilibre des forces extérieures auxquels la dalle est soumise.

La méthode des lignes de rupture objet de notre cours est une méthode cinématique et fournit une borne supérieure de la charge ultime, en partant d'un mécanisme admis à priori. Cette méthode a été développée par Johansen qui permet l'estimation de la résistance à la flexion d'une dalle et par conséquent de l'armature nécessaire et ce même pour des dalles et des charges compliquées. Elle permet une estimation rapide de la capacité portante.

Deux approches différentes de la méthode des lignes de rupture sont possibles. La première est énergétique (**que nous développerons dans ce cours**) où le travail virtuel des charges extérieures est égalé au travail virtuel des efforts internes. La deuxième est une méthode d'équilibre où l'on étudie l'équilibre des différentes parties d'une dalle divisée par des lignes de rupture.

PRINCIPE DE LA THÉORIE DES LIGNES DE RUPTURE :

L'application de la méthode des lignes de rupture comporte deux étapes successives :

1. La première consiste à déterminer les différents types de mécanismes possibles, compte tenu de la forme de la dalle, des conditions d'appui et du chargement ;
2. La seconde consiste à rechercher (pour chaque mécanisme défini), la valeur de la charge limite correspondante, en utilisant soit la méthode d'équilibre des éléments rigides, soit la méthode des travaux virtuels.

CONDITIONS D'UTILISATION DE LA MÉTHODE :

1. Ferrailage de la dalle : pour pouvoir appliquer cette méthode la dalle doit présenter un système d'armatures homogène uniforme sur toute sa surface, donnant ainsi une section d'acier par unité de largeur de dalle pour chacune des directions considérées, bien qu'elle

puisse être différente entre les deux directions orthogonales ou les nappes supérieure et inférieure.

2. Ductilité de la section de la dalle : la dalle doit être assez ductile pour permettre aux sections plastifiées de subir les rotations plastiques, pendant que les lignes de rupture se propagent à travers la dalle. Cette propriété est généralement acquise pour les dalles du fait que le pourcentage d'armature de traction est inférieur au pourcentage critique qui sépare les ruptures ayant pour origine la plastification des armatures, des ruptures ayant pour origine la destruction de la zone comprimée du béton (section sous armée a un comportement différent de celui d'une section surarmée). La rupture ne doit se faire par écrasement du béton comprimé avant la plastification de l'acier, c'est-à-dire durant la formation du mécanisme de ruine. Avec un taux d'armature compris entre 0.15% et 1.5% les sections rectangulaires en béton armé remplissent cette condition.

Règles simples pour les dalles, les poutres et les portiques :

(Réf : calcul des structures en béton armé de Jean-Marie Paillé, afnor éditions)

L'Eurocode 2 permet de mener une analyse plastique sans justifier la capacité des rotules plastiques, sous réserve de vérifier que les dispositions suivantes sont respectées :

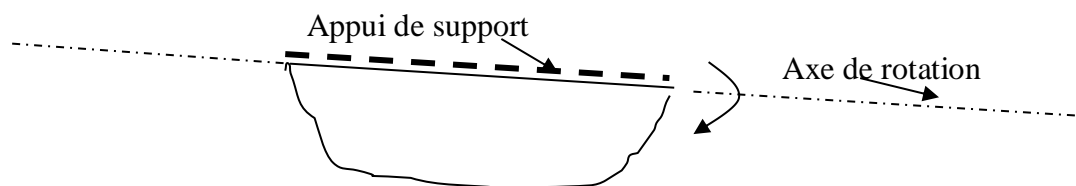
- aciers à haute ductilité, de classe B ou C ;
- $0,5 \leq \frac{M_a}{M_t} \leq 2$ avec : M_a le moment sur appui et M_t le moment en travée ;
- calcul à l'ELU en limitant la hauteur comprimée, soit $x/d \leq 0,25$ si béton de classe $\leq C50$ et $x/d < 0,15$ si béton de classe $> C55$.

Cette dernière condition permet aux sections de conserver un comportement plastique (une section de hauteur comprimée faible se plastifie davantage). La France reconduit dans ses règles professionnelles la méthode de M. Caquot, et la méthode forfaitaire du BAEL (voir ci-après). Ces méthodes seront utilisées avec les longueurs entre nus d'appuis.

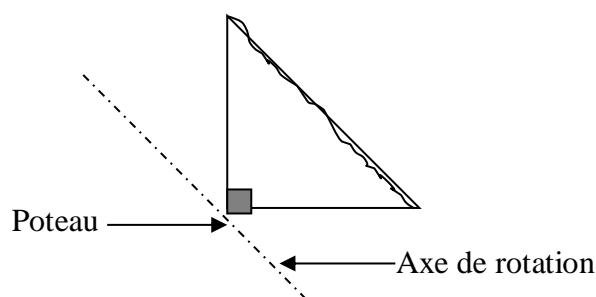
CONDITIONS CINÉMATIQUES DE MÉCANISMES DE RUPTURE :

Le choix du mécanisme de rupture d'une dalle se fait selon des règles de manière à aboutir à un mécanisme cinématiquement admissible.

1. Toute partie plane de la dalle appuyée sur un support rectiligne admet ce support comme axe de rotation.



2. Toute partie plane de la dalle reposant sur un appui ponctuel tourne autour d'un axe passant par ce support.

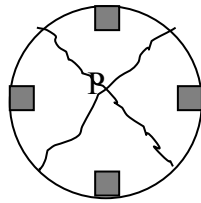


3. Une ligne de rupture appartenant aux deux parties qu'elle limite passe nécessairement par le point d'intersection des axes de rotation aux appuis.

Il en résulte que la configuration du mécanisme de rupture dépend d'un certain nombre de paramètres géométriques.

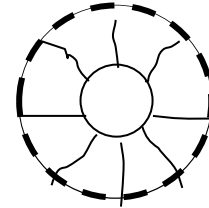
Pour illustrer nos propos donnant quelques exemples avec la légende qui suit :

- — — : Représente un bord appuyé simplement
- : Représente un bord libre
- ==== : Représente un bord encastré

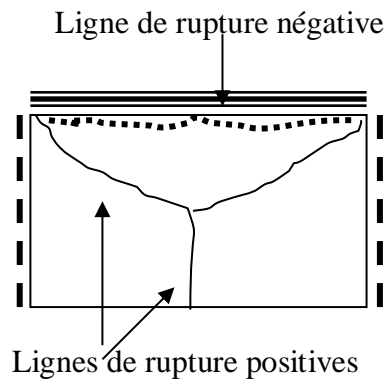
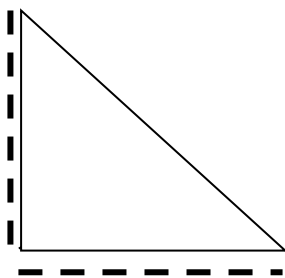
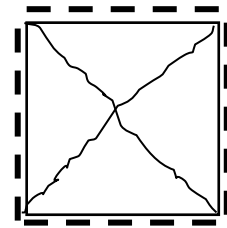
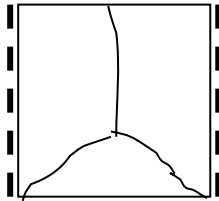
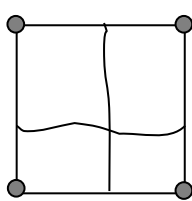


lignes "d'articulation"

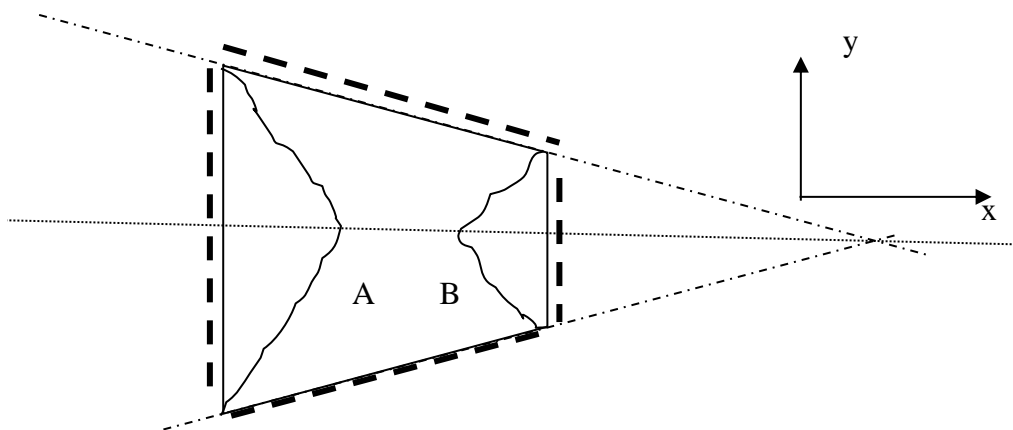
Plaque circulaire
P charge concentrée au centre
Ou uniformément répartie.



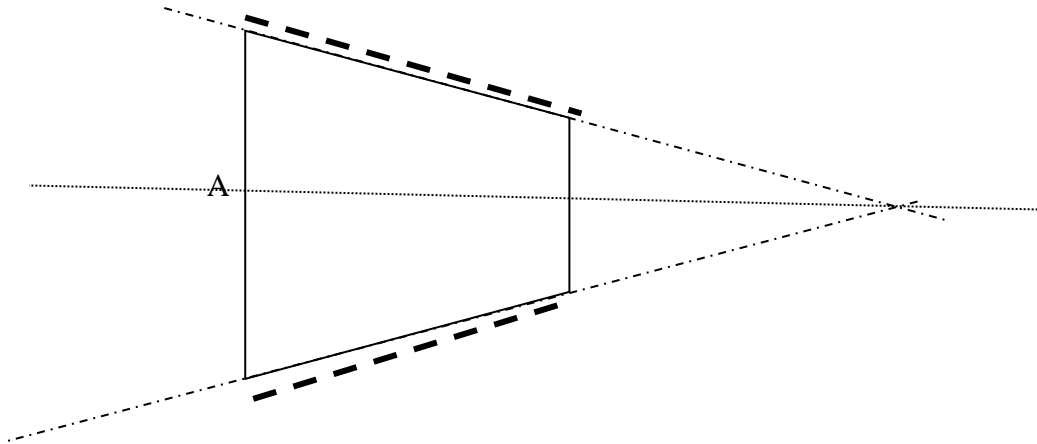
Plaque annulaire simplement appuyée
le long du cercle extérieur.



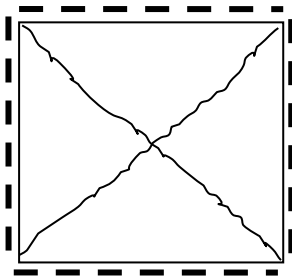
Cas N°1 : 03 paramètres à déterminer deux pour le point A et un pour le point B



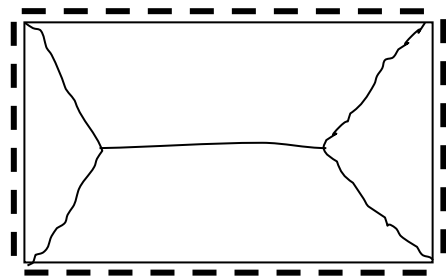
Cas N°2 : 01 seul paramètre pour déterminer la coordonnée y du point A.



Cas N°3 : pas de paramètre à déterminer



Cas N°4 : 01 seul paramètre (selon x)



Lorsqu'un mécanisme se crée l'état de déformation de la dalle est parfaitement défini à partir du déplacement de l'un de ses points, en particulier d'un point concours des lignes de rupture.

CRITÈRES DE PLASTIFICATION (JOHANSEN) :

Dans ce cours nous utilisons le critère de Johansen (*thèse de doctorat en 1943*) qui admet que chaque barre se plastifie dans la ligne de rupture suivant la direction initiale, c'est-à-dire que les deux parties de la barre séparées par la ligne de rupture restent alignées après rotation.

Soit une ligne de rupture et soit m_p le moment de plastification par unité de largeur de dalle. Soit Φ l'angle entre le vecteur \vec{m}_p et la ligne de rupture ($\Phi > 0$ dans le sens trigonométrique).

Selon Johansen, chaque barre d'armature se plastifie au droit de la ligne de rupture suivant sa direction initiale ; les deux parties d'une même barre, séparées par la ligne de rupture, restent alignées lorsque la rotation des deux éléments de dalle situés de part et d'autre de la ligne de rupture se produit. La direction réelle de l'allongement des barres n'est donc pas respectée lorsqu'on admet cette hypothèse.

Dans ce cas, la ligne de rupture peut être considérée comme une suite d'éléments droits alternativement parallèles et perpendiculaires à la direction des armatures (configuration dite en marches d'escalier). Puisque, selon Johansen, chaque barre d'armature se plastifie dans sa direction initiale, on trouve que chaque barre d'armature est soumise, au droit de la ligne de rupture, à l'effort de traction F_s sur 1 m de large, on a : $m_p = n \cdot F_s \cdot z$ (n étant le nombre de barres par m).

Le moment m_ϕ agissant le long de la ligne de rupture découle du moment plastique m_p .

Le polygone vectoriel de la figure montre que le moment $m_p \cdot \overline{AC}$ se décompose en $m_\phi \cdot \overline{AB}$ et $m_{T\phi} \cdot \overline{AB}$. où :

m_ϕ = moment de flexion le long de la ligne de rupture par mètre.

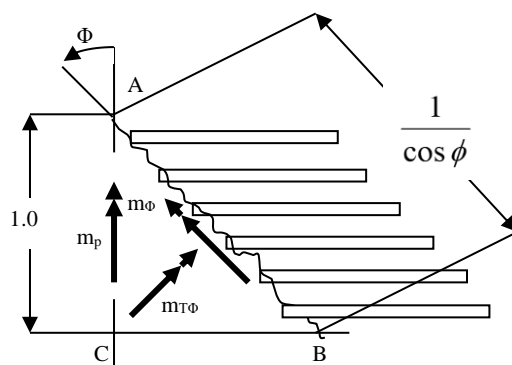
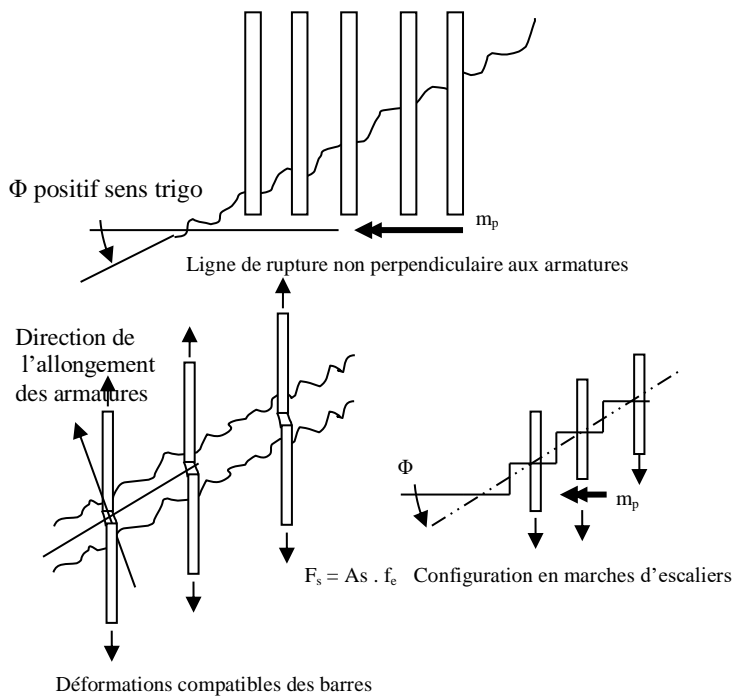
$m_{T\phi}$ = moment de torsion par mètre.

- ✓ Le moment de flexion par mètre linéaire de ligne de rupture, s'obtient à partir de la relation suivante :

$$\cos \phi = \frac{m_\phi \cdot \overline{AB}}{m_p \cdot \overline{AC}} \Rightarrow m_\phi = m_p \cdot \cos \phi \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = m_p \cdot \cos^2 \phi$$

- ✓ Le moment de torsion par mètre linéaire de ligne de rupture, s'obtient à partir de la relation suivante :

$$\sin \phi = \frac{m_{T\phi} \cdot \overline{AB}}{m_p \cdot \overline{AC}} \Rightarrow m_{T\phi} = m_p \cdot \sin \phi \cdot \cos \phi$$

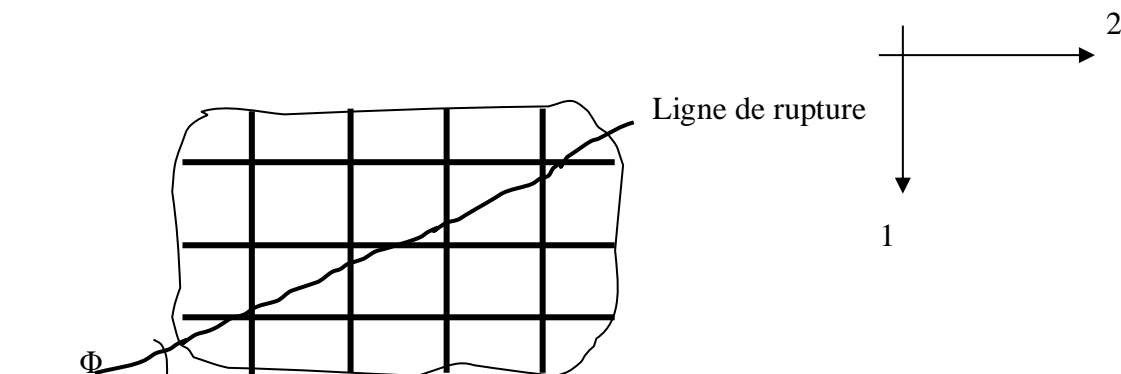


Pour deux directions d'armature faisant respectivement un angle Φ_1 et Φ_2 avec la ligne de rupture, les moments par unité de longueur de ligne de rupture s'obtiennent par addition.

D'où : $m_\Phi = m_{\Phi_1} + m_{\Phi_2}$ et $m_{T\Phi} = m_{T\Phi_1} + m_{T\Phi_2}$

$m_\Phi = m_{p1} \cdot \cos^2 \Phi_1 + m_{p2} \cdot \cos^2 \Phi_2$, $m_{T\Phi} = m_{p1} \cos \Phi_1 \sin \Phi_1 + m_{p2} \cos \Phi_2 \sin \Phi_2$

Avec $\Phi_2 = \Phi_1 - \pi/2$ ($\sin \Phi_2 = -\cos \Phi_1$; $\cos \Phi_2 = \sin \Phi_1$), pour une dalle usuelle (ferraillage orthogonal) avec m_1 et m_2 les moments ultimes correspondants selon la direction 1 et 2. Pour une ligne de rupture faisant un angle Φ avec la direction 2.



Et dans le cas d'une dalle isotrope c'est-à-dire $m = m_1 = m_2$ on aura $\mathbf{m}(\Phi) = \mathbf{m}$. Ce qui implique que quelle que soit l'orientation de la ligne de rupture le moment de plastification est constant. (Même si m_1 est supérieur à m_2 du fait que l'enrobage dans les deux directions n'est pas le même $d_1 > d_2$).

La méthode des lignes de rupture conduit à une évaluation par défaut des moments de flexion, c'est-à-dire des moments plus faibles que ceux obtenus par la méthode élastique. L'écart est d'autant plus important que le schéma de ruine retenu se trouve éloigné du mécanisme de ruine réel. Il faut donc envisager tous les mécanismes de ruine possibles afin de déterminer celui qui maximise les moments de flexion dans la dalle. La méthode nécessite de connaître les rapports entre les moments plastiques des différentes zones de la dalle. Un mauvais choix de ces rapports, bien que compatible avec la capacité d'adaptation plastique de la dalle, peut conduire à une fissuration excessive en service de la dalle. Afin de limiter ce risque, on doit choisir ces rapports en référence à ceux qui résulteraient d'une analyse élastique.

Remarque cette théorie ne prend en compte que le mécanisme de rupture. On ne peut vérifier le comportement de la dalle en service.

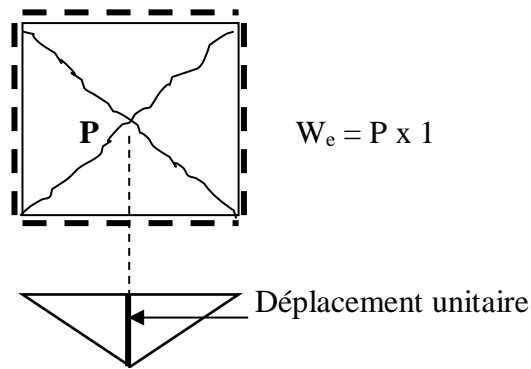
ÉTAPES À SUIVRE POUR LE CALCUL :

En premier, nous choisissons un système de lignes de rupture cinématiquement admissible (qui remplit les conditions de mécanismes définies précédemment), puis on écrit, que le travail des forces extérieures est égal au travail des forces internes et ce pour une déformation donnée de la dalle transformée en mécanisme. En général, on se donne le déplacement du point d'intersection des lignes de rupture égal à l'unité, la déformation de la dalle sera alors totalement définie.

✓ Travail des forces extérieures : (W_e)

- Cas général des forces concentrées : $W_e = \sum P_j \delta_j$ = Somme des produits des forces par leurs déplacements respectifs.

Ex : Panneau de dalle carrée, avec une charge concentrée en son centre.



- Cas d'une charge uniformément répartie :

$$W_e = \iint_{(s)} q \cdot \delta \, ds$$

ds : Élément de l'aire de la partie de la dalle
 δ : Déplacement de l'élément ds.

C'est-à-dire :

$$W_e = q \cdot s \cdot \delta_G \quad \text{Avec } \delta_G \text{ le déplacement du c-d-g de l'aire } s$$

✓ Travail des forces internes :

Simplification : si m_{pi} est le moment le long de la ligne par unité de longueur, le travail des forces intérieures s'exerce sur la longueur de la ligne de rupture considérée, mais projetée sur la direction normale aux aciers

$$W_i = \text{moment} \times \text{rotation} \times \text{longueur}$$

$$W_i = \sum m_{pi} \theta_i l_i$$

θ_i : Déviation angulaire au droit de la charnière ;

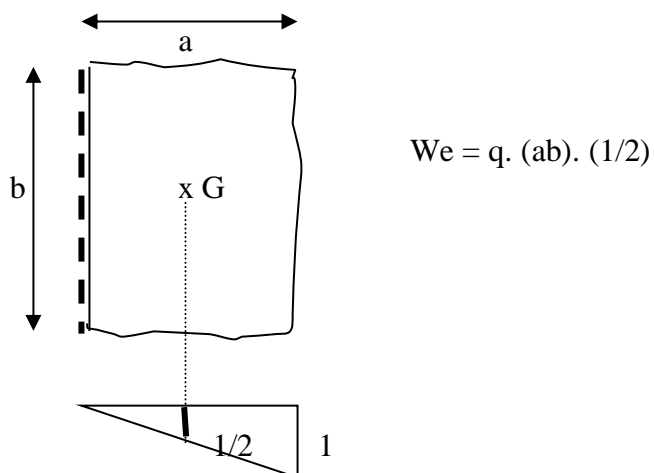
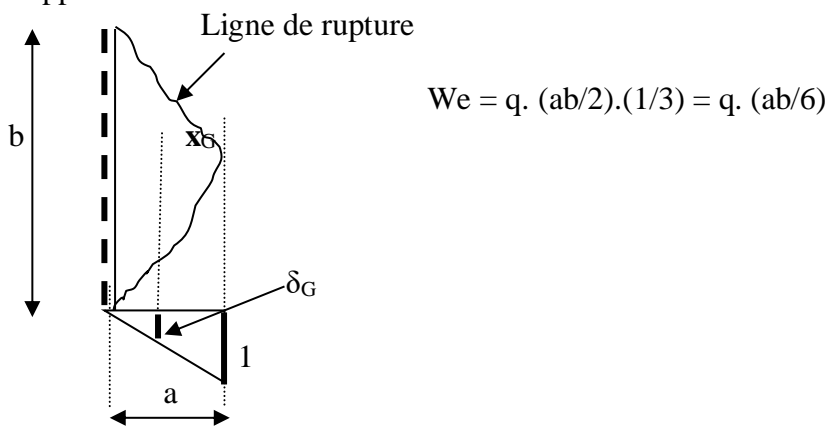
m_{pi} : Moment plastique correspondant ;

l_i : représente la longueur de la ligne de rupture subissant la rotation θ_i et ayant pour moment ultime m_{pi} .

Le signe Σ représente l'ensemble des lignes de rupture qui constitue le mécanisme.

Soit pour l'exemple:

Support

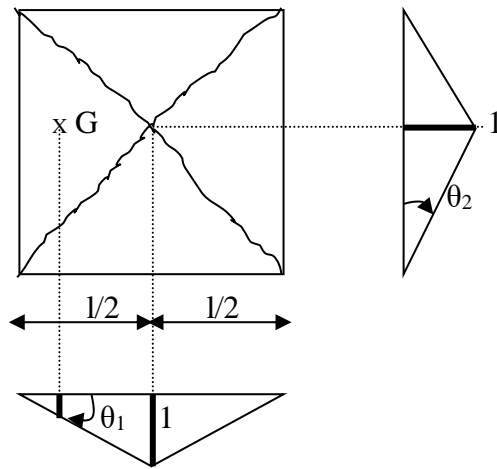
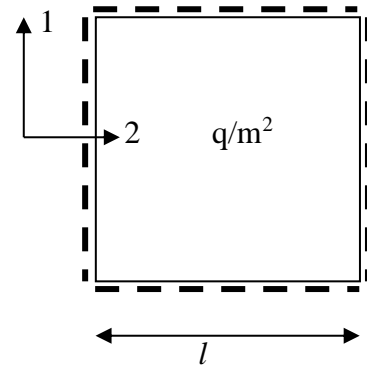


Exemples d'application :

1/ Pour la dalle carrée de la figure déterminer la relation qui relie la charge uniformément répartie q au moment ultime m . Ce moment ultime est le même dans les deux directions de la dalle qui est simplement appuyée sur son contour.

(On a $m_1 = m_2 = m$).

Les lignes de rupture du panneau de dalle donnent naissance à un mécanisme de 04 éléments triangulaires qui ont pour axe de rotation les supports (contour de la dalle)



$$\text{On a } \theta_1 = \theta_2 = 1/(l/2) = 2/l$$

On peut écrire :

$$W_i = 4 (2(m \cdot (2/l) \cdot (l/2))) = 8 m$$

$$W_e = 4(q \cdot s \cdot \delta_G)$$

$$s = (l/2) \cdot l \cdot 1/2 = l^2/4 \text{ et } \delta_G = 1/3.$$

$$W_e = 4 q (l^2/4) \cdot 1/3 = ql^2/3$$

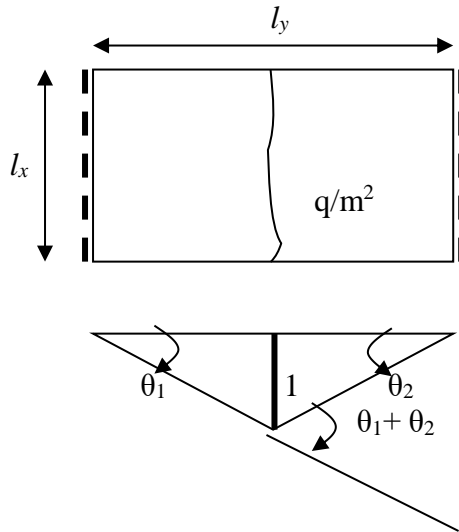
En posant $W_i = W_e$ on a : **$m = ql^2/24$**

En général le ferrailage de la dalle est déterminé en calcul élastique, donc le moment ultime que peut développer la dalle est connu à ce stade du calcul. Et on déduit la surcharge qui provoque la rupture de la dalle.

Donc $q_{(\text{rupture})} = 24 \cdot m / l^2$ et connaissant la charge de service, on tire le coefficient de sécurité qui est égal à :

$$\frac{q_{(\text{rupture})}}{q_{(\text{service})}}$$

2/ Une dalle rectangulaire simplement appuyée sur deux côtés.



On a : $\theta_1 = \theta_2 = 1/(l_y/2) = 2/l_y$

$W_i = m.l_x \theta_1 + m l_x \theta_2$

$W_i = (m.l_x(2/l_y))2 = 4.m.l_x/l_y$

$W_e = 2(q.l_x(l_y/2) (1/2)) = q l_x.l_y (1/2)$

$W_i = W_e \quad 4.m.l_x/l_y = q l_x.l_y (1/2)$

Donne : $m = (1/8) q l_y^2$

On retrouve le comportement d'une poutre simplement appuyée.