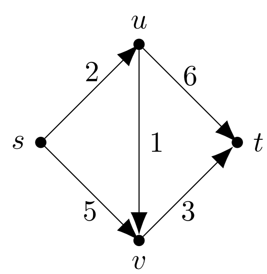
Shortest path and linear programming

Shortest path
Input: Graph $G = (V, E)$, costs $c : E \to \mathbb{R}$, and $s, t \in V$.
Output: s-t-path P, where $\sum_{e \in P} c(e)$ is minimized.

Suppose every edge has an orientation (direction). This gives a directed graph. Any ordinary graph can be converted to a directed graph by adding two edges in opposite directions.

1: Create a linear program solving the shortest path problem. Hints: Minimize, overall cost, for every edge decide if it is in the path or not, make sure that the path starts at s (and ends at t). Make sure that the path

2: Write the linear program for graph with directed edges $E = \{su, sv, uv, ut, vt\}$, where the costs are $c(su) = 2, c(sv) = 5, c(uv) = 1, c(ut) = 6, c(vt) = 3$.



Devoir à la maison :Problème du chemin le plus court.

1. Traduire et expliquer la méthode de programmation linéaire utilisée pour trouver le chemin le plus court dans un graphe orienté.

2. Appliquez cette méthode pour résoudre le problème décrit dans la partie 2 du document, avec le graphe donné et les coûts associés.

3. Justifiez les contraintes imposées sur les variables dans le programme linéaire.

Devoir à la maison :Problème de Transport

Objectif : Comprendre et résoudre un problème de transport en utilisant la programmation linéaire.

Énoncé du problème :
Supposons qu'il y ait m fournisseurs et n clients. Le i-ème fournisseur peut fournir jusqu'à s_i unités d'approvisionnement, et le j-ème client a une demande de d_j unités. Le coût pour transporter une unité de produit du i-ème fournisseur au j-ème client est c_{ij}. Nous voulons trouver un plan de transport qui satisfait toutes les demandes avec un coût de transport minimum.

Soit x_{ij} la quantité de produit transportée du i-ème fournisseur au j-ème client, pour i = 1, ..., m et j = 1, ..., n.

Questions :

1. Formulation du problème:
   a) Écrivez la fonction objectif du problème de transport.
   b) Écrivez toutes les contraintes du problème.

2. Application numérique:
   Considérez le problème de transport suivant :
   Fournisseurs (offre) : A (200), B (350), C (300)
   Clients (demande) : X (200), Y (300), Z (250), W (100)

   Coûts de transport :

	X	Y	Z	W
A	10	7	8	14
B	5	8	11	9
C	6	9	12	7

   - Formulez ce problème sous forme de programme linéaire.

Devoir à la maison : Problème de Flux Maximum

Objectif : Comprendre et résoudre un problème de flux maximum en utilisant la programmation linéaire.

Énoncé du problème :
Considérons un réseau représenté par un graphe orienté $G = (V, E)$, où V est l'ensemble des nœuds et E est l'ensemble des arcs. Soit s la source et t le puits. Pour chaque arc $(i, j) \in E$, soit x_{ij} le flux sur cet arc et c_{ij} sa capacité. Le but est de maximiser le flux total du réseau de la source au puits.

Questions :

1. Formulation du problème:
   a) Écrivez la fonction objectif du problème de flux maximum.
   b) Écrivez la contrainte de conservation de flux pour un nœud quelconque $i \neq s, t$.
   c) Écrivez la contrainte de capacité pour un arc quelconque (i,j)
   d) Expliquez la signification de chaque composante de votre modèle.

2. Application numérique:
   Considérez le réseau suivant :
   Nœuds : S (source), A, B, C, D, T (puits)
   Arcs et capacités :
   S->A: 10, S->C: 8, A->B: 6, A->C: 3, B->T: 7, C->D: 8, D->B: 5, D->T: 10

   a) Représentez ce réseau par un graphe orienté.
   b) Formulez ce problème sous forme de programme linéaire.