Intitulé du Master : Mathématiques appliquées
Semestre : S1
Intitulé de la matière : Programmation linéaire
Unité d'enseignement : Méthodologie
Crédits : 4
Coefficient : 2

Objectifs de l'enseignement :
Ce module a pour objectifs de sensibiliser l'étudiant à l'importance pratique des problèmes d'optimisation linéaires, de maîtriser l'ensemble théorique sous-jacent, et de pouvoir utiliser ces techniques dans des problèmes pratiques.

Connaissances préalables recommandées : Mathématiques et informatique générales

Contenu de la matière :

Chapitre 1 : Introduction générale
1.1 Historique de la programmation linéaire
1.2 Exemples de modélisation de problèmes pratiques sous forme de programme linéaire.
Chapitre 2 : Géométrie de la programmation linéaire
2.1 Espaces vectoriels, rang de matrice, systèmes d'équations linéaires
2.2 Ensemble convexe, hyperplan, polyèdre, simplexe, point extrême
Chapitre 3 : Méthode primale de résolution d'un programme linéaire
3.1 Position du problème
3.2 Caractérisation des points extrêmes
3.3 Optimalité en un point extrême
3.4 Critères d'optimalité : formule d'accroissement de la fonction objectif, critère d'optimalité, 3.5 condition suffisante d'existence de solution non bornée
3.6 Algorithme du simplexe : amélioration de la fonction objectif en passant d'un pont extrême à un
autre, algorithme du simplexe sous forme matricielle, finitude de l'algorithme du simplexe, algorithme et tableau du simplexe
3.7 Initiation de l'algorithme du simplexe : cas du programme linéaire sous forme normale, Mméthode,
méthode de deux phases,
Chapitre 4 : Méthodes duales en programmation linéaire
4.1 Définitions
4.2 Formule d'accroissement de la fonction duale et critère d'optimalité
4.3 Condition suffisante de solutions réalisables dans le problème primale
4.4 Algorithme dual du simplexe
Initialisation de l'algorithme duale du simplexe

Mode d'évaluation : Examen (60%) , contrôle continu (40%)

Références:
1. M. Sakarovicth, Graphes et programmation linéaire, Ed. Hermann. 1984.
2. H. Mauran, Programmation linéaire appliquée, Ed. Technip, 1967.
3. A. Kauffman, Méthodes et modèles de R.O., Ed. Dunod, 1976.
4. V. Chvatal, Linear programming. W.H. Freeman and Company, 1983.

Un voyage à travers l'histoire de la programmation linéaire : de l'aube des idées à la révolution numérique

La programmation linéaire est une science appliquée moderne qui a émergé pendant la Seconde Guerre mondiale en réponse à un besoin urgent de solutions scientifiques efficaces à de grands problèmes logistiques et économiques. Elle est aujourd'hui un outil essentiel dans divers domaines de la vie. L'histoire de la programmation linéaire est étroitement liée à celle de la recherche opérationnelle, et peut être divisée en plusieurs étapes :

Première étape : L'aube des idées (avant la Seconde Guerre mondiale) :

Frederick W. Lanchester : Lanchester fut l'un des premiers à comprendre l'importance des facteurs mathématiques dans la guerre. En 1914, il publia un article sur l'impact de la puissance de feu dans une bataille entre deux forces militaires.

Thomas L. Saaty : Saaty fut l'un des premiers à appliquer des méthodes de programmation linéaire à des problèmes économiques, en 1940.

Deuxième étape : La Seconde Guerre mondiale (1939-1945) :

Leonid Kantorovich : Kantorovich fut l'un des premiers à développer des méthodes mathématiques pour résoudre des problèmes de distribution et d'organisation dans les domaines de l'économie et de l'industrie. En 1939, il publia ses premiers travaux dans le domaine de la programmation linéaire, qu'il appela "programmation linéaire économique". En 1942, Kantorovich développa l'idée de la programmation linéaire pour résoudre le problème de la distribution des matières premières dans l'industrie. En 1948, il publia un livre sur la programmation linéaire et ses applications dans l'économie. En 1975, Kantorovich reçut le prix Nobel d'économie avec Tjalling C. Koopmans pour leurs travaux pionniers en programmation linéaire.

George B. Dantzig : Dantzig développa la méthode du simplexe en 1947, une méthode qui reste un outil fondamental en programmation linéaire et largement utilisée aujourd'hui.

Équipe de recherche opérationnelle : Cette équipe fut formée en Grande-Bretagne et aux États-Unis pour résoudre des problèmes logistiques et militaires pendant la guerre.

Troisième étape : Expansion et développement (après la Seconde Guerre mondiale) :

Développement de la programmation linéaire : Les applications de la programmation linéaire se sont étendues à divers domaines, grâce au développement des ordinateurs et à l'apparition de nouveaux outils logiciels dédiés à la programmation linéaire.

Programmation linéaire moderne : Les idées de Kantorovich et Dantzig ont été développées par plusieurs chercheurs, et les concepts ont été intégrés dans une seule méthode, connue sous le nom de programmation linéaire moderne.

Quatrième étape : Programmation linéaire à l'ère numérique :

Nouvelles applications : Aujourd'hui, la programmation linéaire est utilisée dans divers domaines tels que la planification de la production, la distribution, le marketing, l'investissement, la finance et la gestion.

Programmation linéaire intelligente : La programmation linéaire est désormais utilisée avec des technologies d'intelligence artificielle telles que l'apprentissage automatique (Machine Learning) et les réseaux neuronaux (Neural Networks) pour trouver des solutions plus efficaces et précises.

Évolution continue :

La recherche opérationnelle et la programmation linéaire continuent de se développer et de s'appliquer dans de nombreux domaines, et il est prévu qu'elles continueront à évoluer et à être utilisées à l'avenir.

En conclusion, de nombreux scientifiques ont joué un rôle clé dans le développement de la programmation linéaire, et cette évolution n'a pas été le fruit d'un seul travail, mais le résultat de la collaboration et de la coordination entre les idées et les efforts de plusieurs personnes de différents pays et écoles scientifiques.

رحلة عبر تاريخ البرمجة الخطية: من فجر الأفكار إلى الثورة الرقمية

تُعدّ البرمجة الخطية علمًا تطبيقيًا حديثًا نشأ خلال الحرب العالمية الثانية كاستجابة لحاجة ملحة لإيجاد حلول علمية فعالة لمشكلات تعبوية وسوقية كبيرة، و تُعتبر أداة أساسية في مختلف مجالات الحياة اليوم. كما ان تاريخ البرمجة الخطية مُتشابك مع تاريخ بحوث العمليات، و يُمكن تقسيمها إلى مراحل:

المرحلة الأولى: فجر الأفكار (قبل الحرب العالمية الثانية):

* **فريدريك لانجستر (Frederick W. Lanchester):** يُعدّ لانشستر أحد أوائل الذين أدركوا أهمية العوامل الرياضية في الحرب. في عام 1914، نشر مقالاً عن تأثير قوة النار في معركة بين قوتين عسكريتين.
* **توماس فيرمير (Thomas L. Saaty):** يُعَد فيرمير من أوائل الذين طبّقوا أساليب البرمجة الخطية على مشكلات اقتصادية، في عام 1940.

المرحلة الثانية: الحرب العالمية الثانية (1939-1945):

* **ليونيد كانتاروفيتش (Leonid Kantorovich):** كان كانتاروفيتش أحد أوائل الذين طوّر أساليب رياضية لحلّ مشكلات التوزيع و التنظيم في مجالات الاقتصاد و الصناعة. في عام 1939، نشر أول أعماله في مجال البرمجة الخطية، و أطلق عليها اسم "البرمجة الخطية الاقتصادية". في عام 1942، طوّر كانتاروفيتش فكرة

البرمجة الخطية لإيجاد حلول لمشكلة توزيع المواد الاولية في الصناعة. و في عام 1948، أصدر كانتاروفيتش كتاباً عن البرمجة الخطية و تطبيقاتها في المجالات الاقتصادية.
و في عام 1975، فاز كانتاروفيتش بجائزة نوبل في الاقتصاد مع تيموثي كوبر (Tjalling C. Koopmans) لأعماله الرائدة في مجال البرمجة الخطية.

* **جورج دانتزيج (George B. Dantzig):** طوّر دانتزيج طريقة السمبلكس (Simplex Method) في عام 1947، و تُعدّ هذه الطريقة أداة أساسية في البرمجة الخطية و لا تزال مستخدمة على نطاق واسع حتى اليوم.
* **فريق بحوث العمليات (Operational Research Team):** تَشكّلت هذه الفريق في بريطانيا و الولايات المتحدة لإيجاد حلول لمشكلات التعبوية و اللوجستية خلال الحرب.

المرحلة الثالثة: التوسع و التطور)بعد الحرب العالمية الثانية(:

* **تطور البرمجة الخطية:** توسّعت تطبيقات البرمجة الخطية في مختلف المجالات، بفضل تطور أجهزة الحاسوب و ظهور أدوات برمجية جديدة مُخصصة للبرمجة الخطية.
* **البرمجة الخطية الحديثة (Linear Programming):** تمّ تطوير أفكار كانتاروفيتش و دانتزيج من قبل عدّة باحثين و تم دمج المفاهيم في أسلوب واحد، هو ما يُعرف بالبرمجة الخطية الحديثة.

المرحلة الرابعة: البرمجة الخطية في العصر الرقمي:

* ** تطبيقات جديدة:** تُستخدم البرمجة الخطية اليوم في مختلف مجالات الحياة، من بينها التخطيط للإنتاج و التوزيع و التسويق و الاستثمار و المالية و الإدارة.
* ** البرمجة الخطية الذكية:** تُستخدم البرمجة الخطية مع تقنيات ذكاء اصطناعي مثل التعلم الآلي (Machine Learning) و الشبكات العصبية (Neural Networks) لإيجاد حلول أكثر كفاءة و دقة.

**** استمرارية التطور:**

تستمر بحوث العمليات و البرمجة الخطية في التطور و الاستخدام في مختلف المجالات، و من المتوقع أن تستمر في التطور و الاستخدام في المستقبل.

** في الختام، كان للعديد من العلماء دور هام في تطوير البرمجة الخطية، ولم يكن هذا التطور نتيجة لعمل واحد، بل نتيجة لتعاون و تنسيق بين أفكار و جهود عدّة أشخاص من مختلف البلدان و المدارس العلمية.**

2. Exemples de problèmes de programmation linéaire:

Avant de donner le modèle mathématique général du problème de la programmation linéaire, nous présentons deux exemples concrets et particuliers.

a. Problème de production :

Une unité de production de parpaings fabrique quatre types de produit :

Les parpaings de dimensions respectivement 10 cm (noté P_1), 15 cm (noté P_2), 20 cm (noté P_3) et l'ourdi (noté P_4).

Pour la fabrication de ces produits, on utilise quatre matières premières, le sable (M_1), le gravier (M_2), le ciment (M_3) et l'eau (M_4), disponibles en quantité respectivement de 5000, 3000 et 2000 unités. L'eau est disponible en quantité illimitée.

Le plan de production de l'unité est donné dans le tableau ci-dessous :

Produits / *Matières premières*	P_1	P_2	P_3	P_4	*Quantités de matières premières disponibles*
M_1	2	3	5	6	5000
M_2	1	2	3	3	3000
M_3	0.8	1	2	3	2000
M_4	1	1	2	2	/

Le tableau signifie que pour fabriquer un parpaings de 10 cm, il faut 2 unités de M_1, 1 unité de M_2, 0.8 unité de M_3 et 1 unité de M_4, et de la même manière pour P_2, P3 et P_4.

Les parpaings sont vendus respectivement à raison de 6, 7, 9 et 10 DA l'unité.

Le problème pour la direction de l'unité est de trouver le nombre maximal de produit P_1, P_2, P_3 et P_4 à fabriquer pour avoir un bénéfice maximal, tout en respectant les contraintes de l'unité.

➡ ***Résolution :***

Désignons par x_1, x_2, x_3 *et* x_4 les quantités de produits p_1, p_2, p_3 *et* p_4. Ces quantités doivent vérifier les conditions suivantes :

- Les quantités utilisées en matières premières ne doivent pas dépasser les quantités disponibles :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 5000 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 3000 \\ 0.8x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 2000 \end{cases} \qquad (1)$$

- Les quantités à produire sont toutes positives ou nulles :

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0,$

ou $x_j \geq 0, j = 1,2,3,4.$ (2)

Comme l'eau est disponible en quantité illimitée, donc on n'a aucune contrainte sur la matière première M_4.

Le chef de production de l'unité choisira le programme réalisable qui donnera le maximum de *la fonction bénéfice Z* :

$$Z(x_1, x_2, x_3, x_4) = 6x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 10x_4 \rightarrow max \qquad (3)$$

La fonction bénéfice (3) appelée aussi *fonction objective* ou *fonction but*, représente le bénéfice que va réaliser l'unité.

En résumé le chef de production aura pour objectif, de trouver la solution optimale du problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} Z(x_1, x_2, x_3, x_4) = 6x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 10x_4 \rightarrow max \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 5000 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 3000 \\ 0.8x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 2000 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3,4. \end{cases}$$

b. Problème de la coupe :

Un service de ravitaillement d'une usine a reçu d'un fournisseur 500 feuilles d'acier de longueur 5m.Celles-ci doivent être découpées en feuilles de 2m et 1.5 m désignées respectivement par A et B.

Avec ces dernières feuilles on fabrique un produit dénoté par P.Chaque produit P a besoin de 3 feuilles de A et 2 feuilles de B.

Le problème consiste à avoir un modèle mathématique en faisant un plan de découpage des feuilles, qui nous permet d'avoir une quantité maximale du produit P.

➡ *Résolution :*

On peut avoir trois variantes de découpage représentées par le tableau suivant :

Variante de découpage	*A*	*B*	*Reste*
1	2	0	1m
2	1	2	0
3	0	3	0,5m
Produit P	3	2	

La première variante de découpage par exemple consiste à découper une feuille de 5m en trois :

(2m+2m+1m), c'est à dire 2 unités de A et un reste de 1m.

Soit $Z = x =$ nombre d'unités de P, et soit $x_j =$ nombre de feuilles de 5m à couper par la $j^{ème}$ variante $\left(j = \overline{1,3}\right)$.

De là notre problème de découpe sera modélisé par :

$$\begin{cases} Z = x \rightarrow max \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\ 2x_1 + x_2 \geq 3x \\ 2x_2 + 3x_3 \geq 2x \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}, x \geq 0 \end{cases}$$