1

الفصل الأول

نماذج النقل

تمهيـــــــــد

تعتبر نماذج النقل احدى التطبيقات الخاصـــة في البرمجة الخطية، حيث يركز هذا النوع من النماذج على حل مشـكلة نقل موارد معينة أو أشـخاص من مكان معين الى مكان اخر، وبالرغم من ان هذا النوع من المشاكل يمكن التعبير عنه ببرنامج خطي يشبه البرامج الخطية، ومن ثم حل ذلك البرنامج بالطرق المدروسـة سـابقا، غير أن هذا الامر كان يتطلب جهد ووقت كبيرين، مما حث الباحثين على العمل من اجل تطوير نماذج حل تتناسب أكثر وهذه المشاكل.

لقـد تم تطوير نمـاذج النقـل لأول مرة من قبـل F. L. Hitchcock، عـام 1941، وهي عبـارة عن جداول يتم تلخيص معطيات مشـكلة النقل بها، حيث تهدف الى تخفيض تكلفة النقل (أو تعظيم الربح لعملية النقل) لموارد ذات خصـائص متشـابهة من أماكن تواجدها والتي يطلق عليها "مصـادر العرض"، الى أماكن أخرى تعرف بـــ "مراكز الطلب". وقد تكون مصـادر العرض والطلب تابعة لنفس المؤسـسـة، وقد تكون مصادر العرض تابعة لمؤسسة ما، ومراكز الطلب عبارة عن زبائن او موردين لتلك المؤسسة؛ كذلك يمكن ان تكون وسـيلة النقل تابعة للمؤسـسـة، أو قد تكون عبارة عن مؤسـسـة خارجية متعاقدة مع المؤسسة وفق شروط متفق عليها.

I. الشكل العام لنماذج النقل

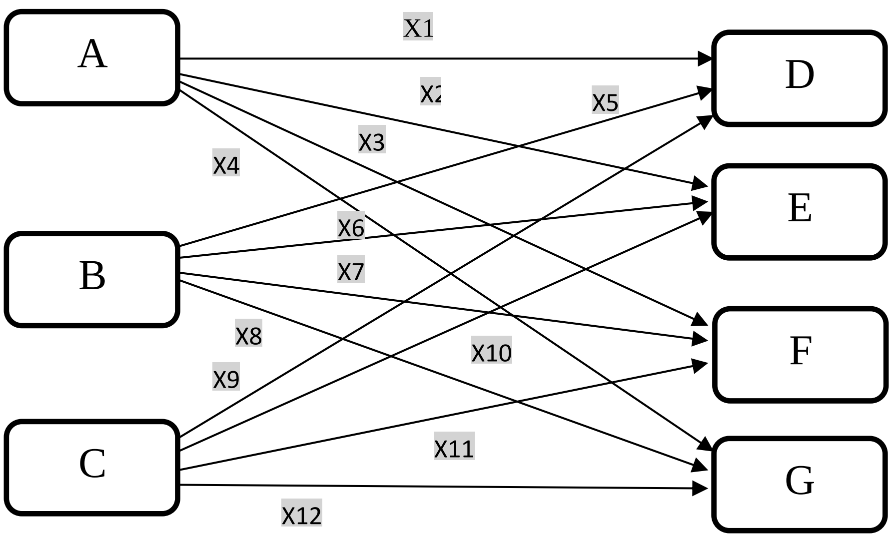
الجدول رقم (1-5): الشكل العام لجدول النقل

مراكز الطلب / مصادر العرض	D	E	F	G	كمية العرض
A	C11 X1	C12 X2	C13 X3	C14 X4	b1
B	C21 X5	C22 X6	C23 X7	C24 X8	b2
C	C31 X9	C32 X10	C33 X11	C34 X12	b3
كمية الطلب	a1	a2	a3	a4	

حيث يوضح الشـكل العام السـابق مشـكلة نقل لمؤسـسـة، تريد نقل مجموعة من المنتجات من ثلاث مصـادر عرض، يمكن ان تكون مصـانع او مخازن تابعة للمؤسـسة، الى 4 مراكز للطلب، يمكن ان يكونوا فروع تابعة للمؤسسة في مناطق مختلفة، او يمكن ان يكونوا زبائن لها. بحيث ان اجمالي ما يمكن ان ينقله كل مصــدر عرض له هو bi وحدة من المنتجات، يمكن له ان ينقلها الى أي مركز من مراكز

الطلب، بتكلفة وحدوية معلومة تقدر بـــــ Cij؛ كما ان اجمالي ما يمكن ان يحصـــل عليه كل مركز من مراكز الطلب هو ai من المنتجات، يجب ان يحصـــل عليها من أي مصـــدر من مصـــادر العرض. وبالتالي فان هدف المؤســـسة هو تحديد الكمية التي يجب نقلها من كل مصـــدر عرض الى كل مركز طلب، والتي تحقق أقل تكلفة ممكنة للمؤسـسة. أي ان متغيرات القرار لمشكلة النقل للمؤسسة، تتمثل في الكميات المنقولة من كل مصـــدر عرض الى كل مركز طلب. ويمكن التعبير عن مشـــكلة النقل لهذه المؤســـســـة بالمخطط التالي:

الشكل رقم (1): مخطط لمشكلة النقل



يوضح المخطط السابق ان برنامج النقل لهذه المؤسسة يتضمن على 12 خط نقل، لكل خط منها تكاليفـه الوحـدوية (أي تكاليف نقـل الوحـدة الواحـدة من المنتجـات)، ويبقى على متخـذ القرار في المؤســـسة العمل على تحديد الكمية المنقولة في كل خط من تلك الخطوط، بالشـــكل الذي يحقق اقل تكلفة اجمالية ممكنة لعملية النقل. ويمكن التعبير على مشكلة النقل السابقة بالبرنامج الخطي التالي:

$$\text{Min: } Z= C_{11}X_1 + C_{12}X_2 + C_{13}X_3 + C_{14}X_4+ C_{21}X_5+ C_{22}X_6+ C_{23}X_7+ C_{23}X_8+ C_{31}X_9+ C_{32}X_{10}+ C_{33}X_{11}+ C_{34}X_{12}$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4=b1 \\ X_5 + X_6 + X_7 + X_8=b2 \\ X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12}=b3 \\ X_1 + X_5 + X_9 =a1 \\ X_2 + X_6 + X_{10} =a2 \\ X_3 + X_7 + X_{11}=a3 \\ X_4 + X_8 + X_{12} =a4 \\ \Sigma ai=\Sigma bi \end{cases}$$

(قيد خاص بنماذج النقل المتوازنة)

$$X_1 ;X_2 ;X_3,X_4 ;X_5 ;X_6 ;X_7 ;X_8 ;X_9 ;X_{10} ;X_{11} ;X_{12}\geq 0$$

نلاحظ في البرنامج السابق انه تم إضافة قيد خاص بنماذج النقل المتوازنة وهي مجموعة النماذج التي يكون فيها اجمالي الكميات المعروضة مساوية لإجمالي الكميات المطلوبة، ولتوضيح الفكرة أكثر سنحاول التطرق الى المثال التالي، ومن ثم نحاول تشكيل نموذج النقل والبرنامج الخطي للمسألة.

مثال 01:

احدى الشركات الصناعية لديها ثلاثة مصانع هي A وB وC، تقدر الطاقة الانتاجية لكل مصنع من المصانع السابقة ب 6000، 2000 و2000 وحدة على التوالي؛ ويتم توزيع منتجات الشركة في 4 أسواق رئيسية متباعدة هي D وE وF وG، وتقدر الكميات المطلوبة في الاسواق الاربعة كما يلي: 5000، 2000، 2000 و1000 وحدة على التوالي؛ ويمثل الجدول التالي تكاليف النقل للوحدة الواحدة من منتجات الشركة من كل مصنع الى كل سوق:

المركز التسويقي / الوحدة الانتاجية	D	E	F	G
A	10	5	20	11
B	12	7	9	20
C	4	14	16	18

المطلوب:

شكل البرنامج الخطي الذي يسمح للمؤسسة بنقل منتجاتها بأقل تكلفة ممكنة؛

حل المثال 01:

الجدول الخاص بالمسألة يكون ممثلا بالشكل التالي:

المركز التسويقي / الوحدة الانتاجية	D	E	F	G	كمية العرض
A	$10 * X_1$	$5 * X_2$	$20 * X_3$	$11 * X_4$	= 6000
B	$12 * X_5$	$7 * X_6$	$9 * X_7$	$20 * X_8$	= 2000
C	$4 * X_9$	$14 * X_{10}$	$16 * X_{11}$	$18 * X_{12}$	= 2000
كمية الطلب	= 5000	= 2000	= 2000	= 1000	10000

حيث ان كل X_i تعبر عن الكمية المنقولة من وحدة إنتاجية ما الى مركز تسويقي معين، فعلى سبيل المثال نجد أن X_2 تعني الكمية المنقولة من الوحدة الإنتاجية A الى المركز التسويقي E. أما بالنسبة للقيود، فهي تتمثل في ان الكمية المنقولة لكل وحدة تكون مساوية لطاقتها الإنتاجية، والكمية المستلمة من كل مركز تسويقي تكون مساوية للكمية المطلوبة من قبله؛ وعلى هذا الأساس فان البرنامج الخطي للمسألة يكون كالتالي:

$$\text{Min: } Z = 10X_1 + 5X_2 + 20X_3 + 11X_4 + 12X_5 + 7X_6 + 9X_7 + 20X_8 + 4X_9 + 14X_{10} + 16X_{11} + 18X_{12}$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 6000 \\ X_5 + X_6 + X_7 + X_8 = 2000 \\ X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} = 2000 \\ X_1 + X_5 + X_9 = 5000 \\ X_2 + X_6 + X_{10} = 2000 \\ X_3 + X_7 + X_{11} = 2000 \\ X_4 + X_8 + X_{12} = 1000 \end{cases}$$

$$X_1 ; X_2 ; X_3, X_4 ; X_5 ; X_6 ; X_7 ; X_8 ; X_9 ; X_{10} ; X_{11} ; X_{12} \geq 0$$

ويمكن حل البرنامج الخطي الســـابق باســـتخدام طريقة الســـمبلكس، حيث يتطلب حل هذا البرنامج اعداد 9 جداول حتى يتم التوصـــل الى الحل الأمثل، والقيم التي يقدمها جدول الحل الأمثل (الجدول رقم 09) هي موضحة في الجدول التالي:

Cj	Basic Variables	10 X1	5 X2	20 X3	11 X4	12 X5	7 X6	9 X7	20 X8	4 X9	14 X10	16 X11	18 X12	0 artfcl 1	0 artfcl 2	0 artfcl 3	0 artfcl 4	0 artfcl 5	0 artfcl 6	0 artfcl 7	Quantity
5	X2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2 000
9	X7	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	2 000
11	X4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1 000
10	X1	1	0	1	0	0	-1	0	-1	0	-1	0	-1	0	-1	-1	1	0	1	0	3 000
12	X5	0	0	-1	0	1	1	0	1	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	-1	0	0
4	X9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	2 000
0	A7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	1	1	1	1	0
zj		10	5	33	11	12	7	9	27	4	29	31	31	-11	-13	-5	1	6	4	0	77 000
cj-zj		0	0	-13	0	0	0	0	-7	0	-15	-15	-13	11	13	5	-1	-6	-4	0	

حيث يوضح الجدول السابق حلول البرنامج الخطي السابق، وهي:

X_1=3000، X_2=2000، X_4=1000، X_7=2000، X_9=2000.

بينما بلغت قيمة التكلفة الاجمالية: 77000 دج.

ولنا ان نتخيل حجم الجهد المبذول والوقت اللازم لحل هذه الحجم من الجداول (09 جداول)، خاصة إذا وقع خطأ في احدى القيم، مما قد يجعل من الوصول الى الحل الأمثل امرا شبه مستحيل،

ولهذا تم تطوير نماذج النقل، حيث تسمح بالوصول الى الحل الأمثل للمسألة بجهد ووقت أقل من الطرق السابقة، وجدول النقل الخاص بالمسألة يكون على الشكل التالي:

مراكز الطلب / مصادر العرض	D	E	F	G	كمية العرض
A	10 X1	5 X2	20 X3	11 X4	6000
B	12 X5	7 X6	9 X7	20 X8	2000
C	4 X9	14 X10	16 X11	18 X12	2000
كمية الطلب	5000	2000	2000	1000	10 000

حيث يتم وضع التكاليف الوحدوية في المربعات الصغيرة، اما الكميات المنقولة فتكون في الخانة الكبيرة.

II. مراحل حل نماذج النقل المتوزانة

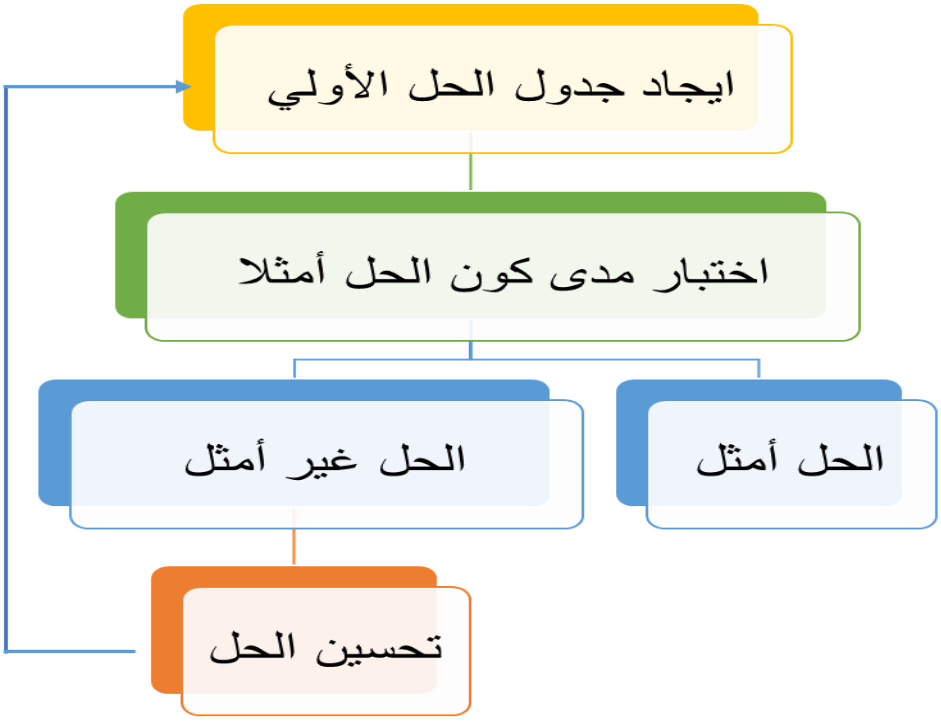
كغيرها من نماذج البرمجة الخطية، يتم حل نماذج النقل عبر مجموعة من الخطوات، تنتهي هذه الخطوات بالتوصل الى الحل الأمثل. والأساس في القدرة على اتباع هذه الخطوات هو أن يكون نموذج النقل متوازنا، أي ان اجمالي الكمية المعروضة تساوي اجمالي الكمية المطلوبة، وإذا لم يتحقق هذا الشرط في نموذج نقل ما، فان الامر يتطلب اعداد تعديلات عليه حتى نتمكن من تطبيق خطوات الحل السابقة عليه.

عموما تتضمن منهجية حل نماذج النقل على الخطوات التالية:

1. إيجاد الحل الأولي؛
2. اختبار مدى كون الحل أمثل؛
3. تحسين الحل غير الأمثل؛
4. تكرار الخطوات (2 و3) الى غاية التوصل الى الحل الأمثل.

والمخطط التالي يوضح كل تلك الخطوات السابقة.

مخطط رقم (2): خطوات حل نماذج النقل المتوازنة



1. إيجاد الحل الأولي

يمكن التوصل الى الحل الأولي عبر عدة طرق نذكر منها ما يلي:

- طريقة الركن الشمالي الغربي؛
- طريقة أقل تكلفة؛
- طريقة فوجل التقريبية.

وفيما يلي عرض لكل طرية من تلك الطرق.

1.1 طريقة الركن الشمالي الغربي

تعتبر هذه الطريقة ابسط طرق إيجاد الحل الأولي، حيث تعتمد هذه الطريقة على ملء خانات جدول النقل انطلاقا من اختيار الخانة الواقعة اعلى الجدول وفي اقصى يساره، أي الخانة الواقعة في الزاوية الشمالية الغربية لجدول النقل، ولهذا تم تسمية الطريقة بها الاسم؛ ثم يتم ملء هذه الخانة بأقصى كمية ممكنة من المنتجات، والمقصود بأقصى كمية ممكنة هو أقل قيمة بين كمية العرض لهذه الخانة (الكمية المتوفرة في سطر تلك الخانة) وكمية الطلب (أي الكمية المتوفرة في عمود تلك

الخانة). وهنا نكون امام حالتين، تتمثل الحالة الأولى في نفاذ الكمية المعروضة وأصبحت تساوي 0، وعندها ننتقل الى الخانة التي تقع أسفل الخانة السابقة، ونشطب باقي الخانات في سطر الخانة السابقة، ويصبح كمية الطلب في عمود الخانة السابقة يساوي القيمة السابقة له ناقص الكمية الموضوعة في الخانة السابقة.

وتتمثل الحالة الثانية في نفاذ الكمية المطلوبة، حيث أصبحت قيمتها مساوية لـ 0، عندها ننتقل الى الخانة الواقعة على يمين الخانة السابقة، ثم نشطب باقي الخانات الفارغة في عمود الخانة السابقة، وتصبح كمية العرض لسطر الخانة السابقة مساوية لقيمتها السابقة ناقص الكمية الموضوعة في الخانة.

بعد الانتقال الى الخانة الجديدة نقوم بملء تلك الخانة أيضا بأقصى كمية ممكنة من المنتجات، أي اقل قيمة بين كمية العرض الموجودة في سطرها، وكمية الطلب الموجودة في عمودها؛ بعدها يتم الانتقال الى خانة جديدة بنفس الطريقة التي ذكرناها سابقا، ونستمر على هذا المنوال الى غاية ملء كل خانات الجدول، وتوزيع كل الكميات المعروضة والمطلوبة. وفيما يلي سنحاول تطبيق طريقة الزاوية الشمالية الغربية على نموذج النقل الموجود في المثال 05-01.

مراكز الطلب / مصادر العرض	D	E	F	G	كمية العرض
A	10 X1	5 X2	20 X3	11 X4	6000
B	12 X5	7 X6	9 X7	20 X8	2000
C	4 X9	14 X10	16 X11	18 X12	2000
كمية الطلب	5000	2000	2000	1000	10 000

نلاحظ ان إجمالي كمية العرض لجدول النقل مساوية لإجمالي كمية الطلب وتساوي 10000 وحدة، وبالتالي فانه يمكن تطبيق خطوات الحل المذكورة سابقا على جدول النقل هذا؛ ولتطبيق طريقة الركن الشمالي الغربي على هذا الجدول، فإننا نبحث عن الخانة الموجودة في الركن الشمالي الغربي للجدول، حيث نجد انها تمثل الخانة X1، بعد هذا يتم تحميل هذه الخانة بأقصى كمية ممكنة من المنتجات، حيث نجد ان كمية العرض المتوفر لهذا الخانة هو 6000 وحدة، وكمية الطلب لعمودها هو

5000 وحدة، وبالتالي فان اقصى قيمة يمكن وضعها في هذه الخانة هو 5000 وحدة (ادنى قيمة بين 6000 و 5000). ويترتب عن هذا ان كمية الطلب الجديدة في عمود تلك الخانة (كمية الطلب في عمود D) أصبحت معدومة، بينما كمية العرض المتبقية في سطرها (سطر A)، أصبحت 1000 (أي 6000-5000=1000)، ولهذا سيتم شطب باقي الخانات الفارغة في العمود D، بينما ننتقل افقيا الى اليمين، وهذا الى الخانة الموالية للخانة السابقة في السطر A.

بعد اختيار الخانة الجديدة، نحمل تلك الخانة بأقصى كمية ممكنة من المنتجات، اقل قيمة بين كمية العرض 1000، وكمية الطلب لعمود تلك الخانة وهي 2000 (العمود E)، وبالتالي فان كمية العرض في سطر تلك الخانة (السطر A) ستصبح معدومة، مما يستدعي شطب باقي الخانات في ذلك السطر؛ بينما سيتبقى في العمود E كمية طلب تقدر بـ 1000، وعليه سيتم الانتقال الى الأسفل في ذلك العمود، للحصول على خانة جديدة من أجل ملئها. وتستمر العملية على هذا المنوال، الى ان يتم توزيع كل الكميات المعروضة على مراكز الطلب. والجدول التالي يوضح كيفية التوزيع.

مراكز الطلب / مصادر العرض	D	E	F	G	كمية العرض
A	10 5000	5 1000	20 /	11 /	~~6000~~ 1000
B	12 /	7 1000	9 1000	20 /	~~2000~~ 1000
C	4 /	14 /	16 1000	18 1000	~~2000~~ 1000
كمية الطلب	5000	~~2000~~ 1000	~~2000~~ 1000	1000	10 000

وعليه فان الحلول التي يقدمها جدول الحل الأولي هي:

X_{AD}=5000، X_{AE}=1000، X_{BE}=1000، X_{BF}=1000، X_{CF}=1000 ، X_{CG}=1000.

ملاحظة: تكلفة النقل الاجمالية يتم حسابها من خلال ضرب كل كمية منقولة في تكلفة النقل الوحدوية لخط النقل الذي نقلت فيه، ثم جمع نتائج عمليات الضرب.

وعليه يتم حساب تكلفة النقل الاجمالية لهذه المسألة كما يلي:

$$C_t = X_{AD} \times C_{AD} + X_{AE} \times C_{AE} + X_{BE} \times C_{BE} + X_{BF} \times C_{BF} + X_{CF} \times C_{CF} + X_{CG} \times C_{CG}$$

وعليه:

$$C_t = 5000 \times 10 + 1000 \times 5 + 1000 \times 7 + 1000 \times 9 + 1000 \times 16 + 1000 \times 18$$

$$C_t = 105000$$

وبالتالي فإن التكلفة الاجمالية لعملية النقل هي: 105000 دج.

2.1 طريقة أقل تكلفة

يتم التوصل الى الحل الأولي وفق هذه الطريقة من خلال البحث عن الخانة التي لها اقل تكلفة وحدوية في الجدول، ثم يتم تحميلها بأقصى كمية ممكنة من المنتجات، أي اقل قيمة بين العرض والطلب المتاحين لها؛ بعد ملء الخانة السابقة، يتم البحث من جديد عن الخانة الفارغة التي أصبحت تمثل اقل تكلفة ممكنة في الجدول، ويتم تحميلها أيضا بأقصى كمية ممكنة، ثم نستمر على هذا النحو الى غاية توزيع كل الكميات المعروضة والمطلوبة، وملء خانات الجدول. والجدول التالي يوضح كيفية تطبيق طريقة أقل تكلفة.

مراكز الطلب / مصادر العرض	D	E	F	G	كمية العرض
A	10 3000	5 2000	20 /	11 1000	6000
B	12 /	7 /	9 2000	20 /	2000
C	4 2000	14 /	16 /	18 /	2000
كمية الطلب	5000	2000	2000	1000	10 000

لملء الجدول السابق، سنبحث عن الخانة ذات التكلفة الوحدوية الأقل، حيث نجد انها الخانة التي تجمع السطر C والعمود D، وتكلفتها الوحدوية هي 4، حيث نحملها بكمية 2000 وحدة، فتصبح الكمية المعروضة في السطر C معدومة، مما يدفعنا الى شطب باقي الخانات الفارغة الموجودة به؛ حتى لا يتم استخدامها مرة أخرى. بعد هذا نبحث من جديد عن الخانة الأقل تكلفة، فنجدها الخانة التي تربط السطر A والعمود E، وتكلفتها الوحدوية هي 5، ويتم تحميل هذه الخانة بأقصى كمية ممكنة، وهي 2000 وحدة، ويتم شطب باقي الخانات الفارغة في عمودها، لأن الكمية المتبقية فيه هي 0، ونستمر بهذه الطريقة الى غاية توزيع كل الكميات في الجدول.

ملاحظة: إذا صادفنا في عملية البحث عن الخانة ذات التكلفة الوحدوية وجود خانتين لهما نفس التكلفة الوحدوية، وان هذه التكلفة الوحدوية هي الأقل في الجدول، فان الاختيار هنا سيقع على الخانة التي يمكن تحميلها بأقصى كمية ممكنة، أي الخانة التي يمكن نضع فيها كمية أكبر من المنتجات؛ اما إذا تساوت تلك الخانتين من حيث الكميات المنقولة اليها، فهنا سيكون الاختيار عشوائيا.

وعليه فان الحلول التي يقدمها جدول الحل الأولي هي:

$X_{AD}=3000$، $X_{AE}=2000$، $X_{BF}=2000$، $X_{CD}=2000$ ، $X_{AG}=1000$.

وعليه يتم حساب تكلفة النقل الاجمالية لهذه المسألة كما يلي:

$$C_t = X_{AD} \times C_{AD} + X_{AE} \times C_{AE} + X_{AG} \times C_{AG} + X_{BF} \times C_{BF} + X_{CD} \times C_{CD}$$

وعليه:

$$C_t = 3000 \times 10 + 2000 \times 5 + 1000 \times 11 + 2000 \times 9 + 2000 \times 4$$

$$C_t = 77000$$

وبالتالي فإن التكلفة الاجمالية لعملية النقل هي: 77000 دج. حيث نلاحظ ان جدول الحل الأولي بطريقة أقل تكلفة له تكلفة نقل اجمالية اقل من التكلفة الاجمالية لجدول الحل الأولي بطريقة الركن الشمالي الغربي.

3.1 طريقة فوجل التقديرية Vogel’s Approximation Method (VAM) :

تطبق هذه الطريقة أيضا على نماذج النقل المتوازنة، وتعتبر الطريقة الأكثر فعالية مقارنة بالطريقتين السابقتين، حيث ان الحل الأولي الذي تقدمه هذه الطريقة، في غالب الأحيان، يكون هو الحل الأمثل. عموما يتم تطبيق طريقة VAM باتباع مجموعة الخطوات التالية:

- نختار في كل سطر وعمود اقل تكلفة وحدوية، ثم نطرح تلك التكلفة من التكلفة الوحدوية الأكبر منها مباشرة في ذلك السطر او العمود، وسنطلق على الفرق تسمية رقم فوجل، فيصبح لكل سطر أو عمود رقم فوجل خاص به؛
- نختار السطر أو العمود الذي له أكبر فرق (أي أكبر رقم فوجل)، ثم نختار في ذلك السطر أو العمود الخانة ذات التكلفة الوحدوية الأقل، ونحمل تلك الخانة بأقصى كمية ممكنة من المنتجات (أي اقل كمية بين العرض والطالب المتاحين لتلك الخانة)؛
- نعيد حساب الكميات المتبقية في سطر وعمود تلك الخانة، ونقوم بشطب الخانات المتبقية في السطر او العمود الذي أصبحت به الكمية معدومة (أي تم نقل كل الكمية التي كانت متوفرة به)، مما يعني شطب ذلك السطر او العمود؛
- نعيد حساب الفوارق من جديد (ارقام فوجل)، مع استبعاد الخانات الخاصة بالسطر او العمود المشطوب؛ ثم نعيد اختيار سطر او عمود جديد، من خلال اختيار السطر او العمود ذو رقم فوجل الأكبر، ونطبق عليها الخطوات السابقة المذكورة أعلاه، ونستمر على هذا الحال الى غاية توزيع كل الكميات الموجودة في الجدول.

وفيما يلي تطبيق لكل تلك الخطوات السابقة على جدول النقل الموجود في المثال السابق.

مراكز الطلب مصادر العرض	D	E	F	G	كمية العرض	أرقام فوجل في الاعمدة	
A	10 3000	5 2000	20 /	11 1000	6000	5	
B	12 /	7 /	9 2000	20 /	~~2000~~	2	
C	4 2000	14 /	16 /	18 /	~~2000~~	~~10~~	
كمية الطلب	~~5000~~ 3000	2000	~~2000~~	1000	10 000		
أرقام فوجل في الاسطر	~~6~~	2	~~7~~	~~7~~			
	2		11	9			

رقم فوجل في السطر A تم حسابه من خلال اختيار اقل تكلفة في هذا السطر وهي 5 (الخانة الواقعة بين السطر A والعمود E)، والتكلفة الأعلى منها مباشرة هي 10 (الخانة الواقعة بين السطر A والعمود D)، والفارق بينهما هو 5 (10-5=5)، ولهذا تم كتابة هذا الرقم في عمود ارقام فوجل للأعمدة؛

رقم فوجل في الاعمدة يتم حسابه بنفس الطريقة الخاصة بالأسطر، فاذا اخذنا العمود D على سبيل المثال، يتم اختيار التكلفة الوحدوية الأقل في هذا العمود وهي 4 ()، والتكلفة الأعلى منها مباشرة هي 10 (الخانة الواقعة بين السطر A والعمود D)، والفارق بينهما هو 5 (10-4=6)، ولهذا تم كتابة هذا الرقم في سطر ارقام فوجل للأسطر؛

بعد حساب كل ارقام فوجل، نختار السطر C، لأن له أكبر قيمة لرقم فوجل مقارنة بباقي الاسطر والاعمدة، نختار في هذا السطر الخانة ذات التكلفة الأقل، فنجد انها الخانة الواقعة بين السطر C والعمود D، وتكلفتها الوحدوية هي 4، فنحمل هذه الخانة بأكبر كمية ممكنة من المنتجات، وهي 2000 وحدة، مما يعني أن الكمية المتبقية في العمود D أصبحت 3000، بينما نفذت كل الكمية الموجودة في السطر C، وعليه نقوم بشطب هذا السطر وكل الخانات الفارغة الموجودة فيه. ثم نعيد حساب ارقام فوجل من جديد مستبعدين السطر المشطوب.

بعد هذا نختار العمود F، لأنه أصبحت قيمة رقم فوجل الجديدة له هي الأكبر بين باقي الاسطر والاعمدة، ونستمر في عملية ملء خانات الجدول بنفس الطريقة الى ان يتم توزيع كل الكميات الموجودة في الجدول.

ملاحظة: إذا صادفنا في عملية البحث عن السطر او العمود ذات رقم فوجل الكبير، وجود سطرين او عمودين او سطر وعمود لهما نفس رقم فوجل، وان هذا الرقم هو الأكبر في الجدول، فان الاختيار هنا سيقع على السطر او العمود الذي توجد به اقل تكلفة وحدوية؛ وإذا وجدنا تساوي في تلك التكلفة الوحدوية الدنيا، يتم اختيار السطر او العمود الذي يستطيع استيعاب أكبر كمية من المنتجات، اما إذا تساوت تلك الكمية، فهنا سيكون الاختيار عشوائيا.

وعليه فان الحلول التي يقدمها جدول الحل الأولي هي:

$X_{AG}=1000$ ، $X_{CD}=2000$ ،$X_{BF}=2000$ ،$X_{AE}=2000$ ،$X_{AD}=3000$.

وعليه يتم حساب تكلفة النقل الاجمالية لهذه المسألة كما يلي:

$$C_t = X_{AD} \times C_{AD} + X_{AE} \times C_{AE} + X_{AG} \times C_{AG} + X_{BF} \times C_{BF} + X_{CD} \times C_{CD}$$

وعليه:

$$C_t = 3000 \times 10 + 2000 \times 5 + 1000 \times 11 + 2000 \times 9 + 2000 \times 4$$

$$C_t = 77000$$

وبالتالي فإن التكلفة الاجمالية لعملية النقل هي: 77000 دج.

2. اختبار أمثلية الحل الأولي وتحسين الحل غير الأمثل

ان مرحلة اختبار أمثلية الحل هي مرتبطة بالمرحلة التي بعدها (مرحلة تحسين الحل)، أي ان اختبار أمثلية الحل وتحسين الحل إذا كان غير امثلا يتمان بنفس الطريقة وفي نفس الوقت، وحتى نتمكن من اختبار أمثلية الحل الخاص بجدول النقل فانه يشترط في الحل الحالي الشرط التالي:

عدد الخانات المملوءة = عدد الأسطر + عدد الأعمدة -1

وفي حالة غياب هذا الشرط، أي ان عدد الخانات المملوءة اقل من الشرط السابق، فانه يتم ملء عدد من الخانات في الجدول يساوي الفرق بين العدد الحالي للخانات المملوءة والشرط السابق، حيث ملء هذه الخانات يكون بكمية $(\varepsilon = 0)$؛ بعد هذا نكمل ما تبقى من خطوات لاختبار أمثلية الحل.

يمكن اختبار أمثلية الحلول في جداول النقل من خلال حساب التكاليف الهامشية لكل خانة من الخانات الفارغة، أي مقدار التغير في التكاليف الوحدوية لنقل المنتجات الناتج عن استخدام تلك الخانة في عملية النقل، فاذا تحصلنا على خانة واحدة على الأقل لها تكاليف هامشية سالبة، فإننا نقول بأن الحل الحالي لجدول النقل هو غير أمثل. وإذا كانت التكاليف الهامشية لكل الخانات الفارغة موجبة، فهذا دليل على ان الحل الحالي هو أمثل، أما إذا ظهرت احدى الخانات بأن لها تكاليف هامشية معدومة فهذا يدل على وجود حلول بديلة للحل السابق، هذه الحلول البديلة تعتمد على تلك الخانات الفارغة ذات التكلفة الهامشية المعدومة، وتكلفة النقل الاجمالية لها هي مساوية للحلول السابقة.
وعموما يتم اختبار أمثلية الحل وتحسينه في جداول النقل بالاعتماد على طريقتين رئيسيتين هما:

- طريقة المسار المتعرج (طريقة الحجر المتنقل) Stepping-Stone Method؛
- طريقة التوزيع المعدل *Modified Distribution Method*.

1.2 طريقة المسار المتعرج

تتم هذه الطريقة عبر تشكيل مسارات مغلقة لكل خانة فارغة في جدول النقل، ثم يتم حساب التكاليف الهامشية بناء على المعطيات الخاصة بكل مسار، وعليه يتضمن تطبيق هذه الطريقة على الخطوات التالية:

- نرسم لكل خانة فارغة مسار مغلق، هذا المسار يتشكل من زوايا قائمة، يبدأ هذا المسار من الخانة الفارغة المدروسة وينتهي بها، ولا يتضمن هذا المسار الا على خانة فارغة واحدة فقط هي الخانة المدروسة، وأن الزوايا القائمة له لا تكون الا في الخانات المملوءة، أي انه لا يمكن ان يتحرك المسار قطريا، وتكون الحركة في هذا المسار عكس حركة عقارب الساعة، كما ان المسار يتضمن على عدد زوجي من الزوايا (الخانات)؛
- نضع على زوايا المسار المغلق إشارات متناوبة (+ و -)، حيث نبدأ بالخانة الفارغة ونضع بها إشارة "+"، والخانة التي تليها نضع بها إشارة "-"، ونستمر بهذا التناوب عبر كل زوايا المسار المغلق؛
- حساب التكلفة الهامشية للخانة المدروسة في هذا المسار عبر اخذ التكاليف الوحدوية لكل خانة (زاوية)، ونضيف لها الإشارة الموجودة على تلك الزاوية، ثم نجمع تلك التكاليف الوحدوية بإشاراتها الجديدة؛
- إذا تحصلنا على خانة فارغة واحدة على الأقل بتكاليف هامشية سالبة نقول عن الحل انه غير أمثل ويجب العمل على تحسينه، أما إذا كانت كل التكاليف الهامشية موجبة فنقول ان الحل هو أمثل ونكتفي بالكميات التي قدمها، وإذا تحصلنا على قيم هامشية موجبة ومعدومة فنقول عن الحل أنه أمثل ويقبل حلولا بديلة؛
- لتحسين الحل القائم، نحدد الخانات ذات التكاليف الهامشية السالبة ونقارن بينها، ونختار الخانة ذات التكلفة الهامشية السالبة الأصغر (أي الأكبر بالقيمة المطلقة)، ونحاول ان نحمل تلك الخانة بأكبر كمية ممكنة من المنتجات؛
- لتحديد الكمية المنقولة الى الخانة التي تم اختيارها لتحسين الحل، نقوم بتحديد الخانات الموجودة في مسارها والتي يوجد على زاويتها إشارة سالبة، ثم نحدد أصغر كمية موجودة في تلك الخانة، ثم يتم تحريك المسار كله بتلك الكمية، حيث يتم طرح تلك الكمية من الخانات ذات

الإشارة السالبة، واضافتها الى الخانات ذات الإشارة الموجبة، وبالتالي سيتم الحصول على حل جديد، وبتكلفة نقل اجمالية اقل من الحل السابق؛

- نعيد اختبار أمثلية الحل وتحسينه حتى نتوصل الى حل أمثل.

ملاحظة: عند اختيار الخانة المستخدمة في تحسين الحل غير الأمثل، قد تصادفنا وجود خانتين فارغتين لهما تكلفتين هامشيتين سالبتين متساويتين، وهما الأصغر مقارنة بباقي التكاليف الهامشية السالبة (أي الأكبر من حيث القيمة المطلقة)، هنا يتم المفاضلة بين الخانتين على أساس الكمية التي يتنقل بها المسار الخاص بكل الخانة، حيث يتم اختيار الخانة ذات الكمية الأكبر؛ أما إذا تساوت الكمية الخاصة بهما، فهنا يكون الاختيار عشوائيا.

وفيما يلي سنحاول تطبيق الخطوات السابقة على الحل الذي تم التوصل له بطريقة الركن الشمالي الغربي.

مراكز الطلب / مصادر العرض	D	E	F	G	كمية العرض
A	10 / 5000	5 / 1000	20	11	6000
B	12	7 / 1000	9 / 1000	20	2000
C	4	14	16 / 1000	18 / 1000	2000
كمية الطلب	5000	2000	2000	1000	10 000

نلاحظ ان الحل الموجود في الجدول السابق يحقق الشرط الخاص بعدد الخلايا المملوءة، أي:

عدد الخانات المملوءة = عدد الأسطر + عدد الأعمدة -1

حيث ان عدد الخانات المملوءة في هذا الجدول هو 6 خانات، وكذلك لدينا:

عدد الأسطر + عدد الأعمدة -1= 3+4-1= 6 وبالتالي فان الشرط محقق، وعليه نستطيع تطبيق طريقة المسار المتعرج في اختبار أمثلية هذا الحل وتحسينه.

نلاحظ ان عدد الخانات الفارغة في الجدول هو 6 خانات، وعليه سنقوم بإنشاء 6 مسارات من اجل اختبار أمثلية الحل، وذلك كما يلي:

<table>
<tr><th>الخانة المدروسة</th><th>المسار</th><th>التكلفة الهامشية</th></tr>
<tr><td>AF</td><td>
<table>
<tr><th>مراكز الطلب / مصادر العرض</th><th>D</th><th>E</th><th>F</th><th>G</th><th>كمية العرض</th></tr>
<tr><td>A</td><td>10
5000</td><td>− 5
1000</td><td>+ 20
/</td><td>11
/</td><td>6000</td></tr>
<tr><td>B</td><td>12
/</td><td>+ 7
1000</td><td>− 9
1000</td><td>20
/</td><td>2000</td></tr>
<tr><td>C</td><td>4
/</td><td>14
/</td><td>16
1000</td><td>18
1000</td><td>2000</td></tr>
<tr><td>كمية الطلب</td><td>5000</td><td>2000</td><td>2000</td><td>1000</td><td>10 000</td></tr>
</table>
</td><td>$\delta_{AF} = +20 - 5 + 7 - 9 = 13$</td></tr>
<tr><td>AG</td><td>
<table>
<tr><th>مراكز الطلب / مصادر العرض</th><th>D</th><th>E</th><th>F</th><th>G</th><th>كمية العرض</th></tr>
<tr><td>A</td><td>10
5000</td><td>− 5
1000</td><td>20
/</td><td>+ 11
/</td><td>6000</td></tr>
<tr><td>B</td><td>12
/</td><td>+ 7
1000</td><td>− 9
1000</td><td>20
/</td><td>2000</td></tr>
<tr><td>C</td><td>4
/</td><td>14
/</td><td>+ 16
1000</td><td>− 18
1000</td><td>2000</td></tr>
<tr><td>كمية الطلب</td><td>5000</td><td>2000</td><td>2000</td><td>1000</td><td>10 000</td></tr>
</table>
</td><td>$\delta_{AG} = +11 - 5 + 7 - 9 + 16 - 18 = 2$</td></tr>
<tr><td>BD</td><td>
<table>
<tr><th>مراكز الطلب / مصادر العرض</th><th>D</th><th>E</th><th>F</th><th>G</th><th>كمية العرض</th></tr>
<tr><td>A</td><td>− 10
5000</td><td>+ 5
1000</td><td>20
/</td><td>11
/</td><td>6000</td></tr>
<tr><td>B</td><td>+ 12
/</td><td>− 7
1000</td><td>9
1000</td><td>20
/</td><td>2000</td></tr>
<tr><td>C</td><td>4
/</td><td>14
/</td><td>16
1000</td><td>18
1000</td><td>2000</td></tr>
<tr><td>كمية الطلب</td><td>5000</td><td>2000</td><td>2000</td><td>1000</td><td>10 000</td></tr>
</table>
</td><td>$\delta_{BD} = +12 - 7 + 5 - 10 = 0$</td></tr>
</table>

BG

مراكز الطلب / مصادر العرض	D	E	F	G	كمية العرض
A	10 5000	5 1000	20 /	11 /	6000
B	12 /	7 1000	9 1000	20 /	2000
C	4 /	14 /	16 1000	18 1000	2000
كمية الطلب	5000	2000	2000	1000	10 000

$\delta_{BG} = +20 - 9 + 16 - 18 = 9$

CD

مراكز الطلب / مصادر العرض	D	E	F	G	كمية العرض
A	10 5000	5 1000	20 /	11 /	6000
B	12 /	7 1000	9 1000	20 /	2000
C	4 /	14 /	16 1000	18 1000	2000
كمية الطلب	5000	2000	2000	1000	10 000

$\delta_{CD} = +4 - 16 + 9 - 7 + 5 - 10 = -15$

CE

مراكز الطلب / مصادر العرض	D	E	F	G	كمية العرض
A	10 5000	5 1000	20 /	11 /	6000
B	12 /	7 1000	9 1000	20 /	2000
C	4 /	14 /	16 1000	18 1000	2000
كمية الطلب	5000	2000	2000	1000	10 000

$\delta_{CE} = +14 - 16 + 9 - 7 = 0$

نلاحظ من الجدول الســابق وجود تكلفة هامشــية ســالبة للخانة CD، حيث بلغت قيمتها (-15)، مما يعني ان الحل الحالي لجدول النقل هو غير أمثل، حيث ان كل وحدة من المنتجات يتم نقلها عبر الخط، ستساهم في تخفيض التكاليف الاجمالية لعملية النقل بـــ15دج، وعليه سنحاول نقل اقصى كمية ممكنة من المنتجات عبر هذه الخانة؛ ولتحديد هذه الكمية المنقولة، نعود الى المســار الخاص بهذه الخانة والموضح في الجدول السابق، ثم نحدد الكميات الموجودة في الخانات ذات الإشارة السالبة ونختار القيمة الصغرى منها، أي ادنى قيمة بين 5000، 1000 و1000، وهي 1000. وبالتالي فان اقصى كمية يمكن نقلها عبر مســار هذه الخانة هي 1000 وحدة، ولهذا ســنقوم بإضــافة هذه الكمية الى الخانات ذات الإشــارة الموجبة، وطرحها من الخانات ذات الإشــارة الســالبة، وعليه فان جدول النقل الأولي يصبح على الشكل التالي:

مراكز الطلب / مصادر العرض	D	E	F	G	كمية العرض
A	10 4000	5 2000	20	11	6000
B	12	7	9 2000	20	2000
C	4 1000	14	16	18 1000	2000
كمية الطلب	5000	2000	2000	1000	10 000

والسؤال الذي يطرح هنا، هل الحل الحالي هو أحسن من الحل السابق؟

يتم الإجابة على هذا الســؤال عبر حســاب التكلفة الاجمالية للنقل الجديدة، حيث ان الحلول التي قدمها هذا الجدول هي:

$X_{AD}=4000$، $X_{AE}=2000$، $X_{BF}=2000$، $X_{CD}=1000$ ، $X_{CG}=1000$.

وعليه يتم حساب تكلفة النقل الاجمالية لهذه المسألة كما يلي:

$$C_t = X_{AD} \times C_{AD} + X_{AE} \times C_{AE} + X_{BF} \times C_{BF} + X_{CD} \times C_{CD} + X_{CG} \times C_{CG}$$

وعليه:

$$C_t = 4000 \times 10 + 2000 \times 5 + 2000 \times 9 + 1000 \times 4 + 1000 \times 18$$

$$C_t = 90000$$

وبالتالي فإن التكلفة الاجمالية لعملية النقل هي: 90000 دج. وعليه فان جدول الحل الحالي يقدم حل أفضل من الجدول السابق الذي كانت تكلفة النقل الاجمالية له هي 105000. ولكن هل هذا الحل هو الأمثل؟ للتأكد من هذا سنقوم باختبار أمثلية الحل الجديد بنفس طريقة الحل السابق، وذلك كما يلي.

نلاحظ ان عدد الخانات الفارغة في الجدول هو 5 خانات، وعليه فان الشرط الخاص بعدد الخانات المملوءة هو غير محقق، وحتى يتحقق هذا الشرط فلابد من ملء خانة إضافية بقيمة معدومة من المنتجات هي ε، لذلك سنضعها في الخانة AF، مما يجعل لدينا 6 خانات مملوءة، وعليه سنقوم بإنشاء 6 مسارات من اجل اختبار أمثلية الحل، وذلك كما يلي:

<table dir="rtl">
<tr><th>الخانة المدروسة</th><th>المسار</th><th>التكلفة الهامشية</th></tr>
<tr><td>AG</td><td>
<table>
<tr><th>مراكز الطلب / مصادر العرض</th><th>D</th><th>E</th><th>F</th><th>G</th><th>كمية العرض</th></tr>
<tr><td>A</td><td>- 10
4000</td><td>5
2000</td><td>20
ε</td><td>+ 11</td><td>6000</td></tr>
<tr><td>B</td><td>12</td><td>7</td><td>9
2000</td><td>20</td><td>2000</td></tr>
<tr><td>C</td><td>+ 4
1000</td><td>14</td><td>16</td><td>- 18
1000</td><td>2000</td></tr>
<tr><td>كمية الطلب</td><td>5000</td><td>2000</td><td>2000</td><td>1000</td><td>10 000</td></tr>
</table>
</td><td>$\delta_{AG} = +11 - 10 + 4 - 18 = -13$</td></tr>
<tr><td>BD</td><td>
<table>
<tr><th>مراكز الطلب / مصادر العرض</th><th>D</th><th>E</th><th>F</th><th>G</th><th>كمية العرض</th></tr>
<tr><td>A</td><td>- 10
4000</td><td>5
2000</td><td>+ 20
ε</td><td>11</td><td>6000</td></tr>
<tr><td>B</td><td>+ 12</td><td>7</td><td>- 9
2000</td><td>20</td><td>2000</td></tr>
<tr><td>C</td><td>4
1000</td><td>14</td><td>16</td><td>18
1000</td><td>2000</td></tr>
<tr><td>كمية الطلب</td><td>5000</td><td>2000</td><td>2000</td><td>1000</td><td>10 000</td></tr>
</table>
</td><td>$\delta_{BD} = +12 - 9 + 20 - 10 = 13$</td></tr>
</table>

BE

مراكز الطلب / مصادر العرض	D	E	F	G	كمية العرض
A	10 4000	5 2000	20 ε	11	6000
B	12	7	9 2000	20	2000
C	4 1000	14	16	18 1000	2000
كمية الطلب	5000	2000	2000	1000	10 000

$\delta_{BE} = +7 - 9 + 20 - 5 = 13$

BG

مراكز الطلب / مصادر العرض	D	E	F	G	كمية العرض
A	10 4000	5 2000	20 ε	11	6000
B	12	7	9 2000	20	2000
C	4 1000	14	16	18 1000	2000
كمية الطلب	5000	2000	2000	1000	10 000

$\delta_{BG} = +20 - 9 + 20 - 10 + 4 - 18 = 7$

CE

مراكز الطلب / مصادر العرض	D	E	F	G	كمية العرض
A	10 4000	5 2000	20 ε	11	6000
B	12	7	9 2000	20	2000
C	4 1000	14	16	18 1000	2000
كمية الطلب	5000	2000	2000	1000	10 000

$\delta_{CE} = +14 - 5 + 10 - 4 = 15$

CF

مراكز الطلب / مصادر العرض	D	E	F	G	كمية العرض
A	10 4000	5 2000	20 ε	11	6000
B	12	7	9 2000	20	2000
C	4 1000	14	16	18 1000	2000
كمية الطلب	5000	2000	2000	1000	10 000

$\delta_{CF} = +16 - 20 + 10 - 4 = 2$

نلاحظ من الجدول السابق وجود تكلفة هامشية سالبة للخانة AG، حيث بلغت قيمتها (-13)، مما يعني ان الحل الحالي لجدول النقل هو غير أمثل، حيث ان كل وحدة من المنتجات يتم نقلها عبر الخط، ستساهم في تخفيض التكاليف الاجمالية لعملية النقل بـــ 13دج، وعليه سنحاول نقل اقصى كمية ممكنة من المنتجات عبر هذه الخانة؛ ولتحديد هذه الكمية المنقولة، نعود الى المسار الخاص بهذه الخانة والموضح في الجدول السابق، ثم نحدد الكميات الموجودة في الخانات ذات الإشارة السالبة ونختار القيمة الصغرى منها، أي ادنى قيمة بين 1000 و4000 ، وهي 1000. وبالتالي فان اقصى كمية يمكن نقلها عبر مسار هذه الخانة هي 1000 وحدة، ولهذا سنقوم بإضافة هذه الكمية الى الخانات ذات الإشارة الموجبة، وطرحها من الخانات ذات الإشارة السالبة، وعليه فان جدول النقل الأولي يصبح على الشكل التالي:

مراكز الطلب / مصادر العرض	D	E	F	G	كمية العرض
A	10 3000	5 2000	20	11 1000	6000
B	12	7	9 2000	20	2000
C	4 2000	14	16	18	2000
كمية الطلب	5000	2000	2000	1000	10 000

والسؤال الذي نعيد طرحه هنا، هل الحل الحالي هو أحسن من الحل السابق؟

يتم الإجابة على هذا السؤال عبر حساب التكلفة الاجمالية للنقل الجديدة، حيث ان الحلول التي قدمها هذا الجدول هي:

$X_{AD}=3000$، $X_{AE}=2000$، $X_{AG}=1000$، $X_{BF}=2000$، $X_{CD}=2000$.

وعليه يتم حساب تكلفة النقل الاجمالية لهذه المسألة كما يلي:

$$C_t = X_{AD} \times C_{AD} + X_{AE} \times C_{AE} + X_{BF} \times C_{BF} + X_{CD} \times C_{CD} + X_{CG} \times C_{CG}$$

وعليه:

$$C_t = 3000 \times 10 + 2000 \times 5 + 1000 \times 11 + 2000 \times 9 + 2000 \times 4$$

$$C_t = 77000$$

وبالتالي فإن التكلفة الاجمالية لعملية النقل هي: 77000 دج. وعليه فان جدول الحل الحالي يقدم حل أفضل من الجدول السابق الذي كانت تكلفة النقل الاجمالية له هي 90000. ولكن هل هذا الحل هو الأمثل؟ للتأكد من هذا سنقوم باختبار أمثلية الحل الجديد بنفس الطريقة السابقة، وذلك كما يلي.

نلاحظ ان عدد الخانات الفارغة في الجدول هو 5 خانات، وعليه فان الشرط الخاص بعدد الخانات المملوءة هو غير محقق، وحتى يتحقق هذا الشرط فلابد من ملء خانة إضافية بقيمة معدومة من المنتجات هي ε، لذلك سنضعها في الخانة AF، مما يجعل لدينا 6 خانات مملوءة، وعليه سنقوم بإنشاء 6 مسارات من اجل اختبار أمثلية الحل، وذلك كما يلي:

<table dir="rtl">
<tr><th>الخانة المدروسة</th><th>المسار</th><th>التكلفة الهامشية</th></tr>
<tr><td>BD</td><td>
<table>
<tr><th>مراكز الطلب / مصادر العرض</th><th>D</th><th>E</th><th>F</th><th>G</th><th>كمية العرض</th></tr>
<tr><td>A</td><td>10
4000</td><td>5
2000</td><td>20
ε</td><td>11
1000</td><td>6000</td></tr>
<tr><td>B</td><td>12</td><td>7</td><td>9
2000</td><td>20</td><td>2000</td></tr>
<tr><td>C</td><td>4
1000</td><td>14</td><td>16</td><td>18</td><td>2000</td></tr>
<tr><td>كمية الطلب</td><td>5000</td><td>2000</td><td>2000</td><td>1000</td><td>10 000</td></tr>
</table>
</td><td>$\delta_{BD} = +12 - 9 + 20 - 10 = 13$</td></tr>
<tr><td>BE</td><td>
<table>
<tr><th>مراكز الطلب / مصادر العرض</th><th>D</th><th>E</th><th>F</th><th>G</th><th>كمية العرض</th></tr>
<tr><td>A</td><td>10
4000</td><td>5
2000</td><td>20
ε</td><td>11
1000</td><td>6000</td></tr>
<tr><td>B</td><td>12</td><td>7</td><td>9
2000</td><td>20</td><td>2000</td></tr>
<tr><td>C</td><td>4
1000</td><td>14</td><td>16</td><td>18</td><td>2000</td></tr>
<tr><td>كمية الطلب</td><td>5000</td><td>2000</td><td>2000</td><td>1000</td><td>10 000</td></tr>
</table>
</td><td>$\delta_{BE} = +7 - 9 + 20 - 5 = 13$</td></tr>
</table>

BG

مراكز الطلب / مصادر العرض	D	E	F	G	كمية العرض
A	10 4000	5 2000	20 ε	11 1000	6000
B	12	7	9 2000	20	2000
C	4 1000	14	16	18	2000
كمية الطلب	5000	2000	2000	1000	10 000

$$\delta_{BG} = +20 - 11 + 20 - 9 = 20$$

CE

مراكز الطلب / مصادر العرض	D	E	F	G	كمية العرض
A	10 4000	5 2000	20 ε	11 1000	6000
B	12	7	9 2000	20	2000
C	4 1000	14	16	18	2000
كمية الطلب	5000	2000	2000	1000	10 000

$$\delta_{CE} = +14 - 5 + 10 - 4 = 15$$

CF

مراكز الطلب / مصادر العرض	D	E	F	G	كمية العرض
A	10 4000	5 2000	20 ε	11 1000	6000
B	12	7	9 2000	20	2000
C	4 1000	14	16	18	2000
كمية الطلب	5000	2000	2000	1000	10 000

$$\delta_{CF} = +16 - 20 + 10 - 4 = 2$$

CG

مراكز الطلب / مصادر العرض	D	E	F	G	كمية العرض
A	10 4000	5 2000	20 ε	11 1000	6000
B	12	7	9 2000	20	2000
C	4 1000	14	16	18	2000
كمية الطلب	5000	2000	2000	1000	10 000

$$\delta_{CG} = +18 - 11 + 10 - 4 = 13$$

نلاحظ من الجدول الســـابق أن كل التكاليف الهامشـــية للخانات الفارغة كانت موجبة، وعليه نقول بأن هذا الحل هو الحل الأمثل.

من جهة أخرى نلاحظ أن هذا الحل الأمثل هو نفسه الحل الأولي الذي تم التوصل اليه من خلال طريقة أقل تكلفة وطريقة فوجل التقريبية، مما يبين أن هاتين الطريقتين هما أحسن من طريقة الركن الشمالي الغربي من حيث سهولة التوصل الى الحل الأمثل. كما نشير بأن اختبار أمثلية الحل وتحسين الحل غير الأمثل يكون بنفس الطريقة مهما كان نوع الطريقة المتبعة في الحصول على الحل الأولي.

2.2 طريقة التوزيع المعدل

تعمل هذه الطريقة في اختبار أمثلية الحل وتحسين الحل غير الأمثل وفق نفس المبدأ الذي تعمل به طريقة المسار المنعرج، حيث تعتمد على حساب التكاليف الهامشية للخانات غير المملوءة في الجدول، وبناء على تلك التكاليف الهامشية يتم الحكم على أمثلية الحل، وكذلك العمل على تحسين الحل إذا كان غير أمثل؛ كما انها تشترط أيضا تحقق الشرط الخاص بعدد الخانات المملوءة في الجدول، أي:

عدد الخانات المملوءة = عدد الأسطر + عدد الأعمدة -1

وتعتبر هذه الطريقة أسهل وأقل جهد من الطريقة السابقة في عملية الاختبار، على اعتبار انها لا تتطلب اعداد مسارات لكل خانة فارغة في الجدول، مما يخفض من الجهد والوقت اللازمين لعملية الاختبار. وتتم طريقة التوزيع المعدل على مجموعة الخطوات التالية:

- نخصص لكل سطر معامل اسمه Ri، ولكل عمود معامل اسمه Kj، ثم نقوم بتشكيل جملة معادلات للخانات المملوءة في الجدول تكون على الشكل التالي:

Ri+Kj=Cij

حيث أن Cij هي التكلفة الوحدوية لتلك الخانة المملوءة؛

- حل جملة المعادلات السابقة، حيث نفترض ان أحد المعاملات المذكورة فيه هي معدومة، في الغالب نفترض أن R1 هو معدوم، وإذا لم يوجد R1 نقوم بافتراض معامل اخر انه معدوم، وعلى أساس هذا الافتراض نبحث عن قيم بقية المعاملات، عبر حل جملة المعادلات؛
- حساب التكلفة الهامشية للخانات الفارغة وفق المعادلة التالية:

$$\delta_{ij} = C_{ij} - R_i - K_j$$

- إذا وجدت خانة واحدة على الأقل تحمل تكلفة هامشية سالبة نقول على الحل انه غير أمثل، أما إذا كانت كل التكاليف الهامشية موجبة فنقول عن الحل انه أمثل؛ بينما إذا كانت التكاليف الهامشية تتضمن على قيم موجبة ومعدومة، نقول عن الحل انه أمثل ويقبل حلولا بديلة.
- إذا تبين ان الحل غير أمثل، نقوم بتحسينه عبر اختيار الخانة الفارغة المناسبة، والتي تكون تكلفتها الهامشية سالبة والأصغر مقارنة ببقية التكاليف الهامشية السالبة (أي الأكبر بالقيمة المطلقة)، بعد هذا نعد مسار لهذه الخلية فقط، ونحسن الحل الحالي بناء على القيم الموجودة في هذا المسار، وبنفس الطريقة الخاصة بطريقة المسار المنعرج.

وفيما يلي سنحاول تطبيق الخطوات السابقة على الحل الأولي لطريقة الركن الشمالي الغربي، حيث سنخصص لكل سطر معامل اسمه Ri، ولكل عمود معامل اسمه Kj، وذلك وفق الشكل التالي:

	مراكز الطلب / مصادر العرض	D (K_1)	E (K_2)	F (K_3)	G (K_4)	كمية العرض
R_1	A	10 / 5000	5 / 1000	20	11	6000
R_2	B	12	7 / 1000	9 / 1000	20	2000
R_3	C	4	14	16 / 1000	18 / 1000	2000
	كمية الطلب	5000	2000	2000	1000	10 000

بعد هذا نقوم بتشكيل جملة معادلات للخانات المملوءة، كما يلي:

$$R_1+ K_1 = 10$$
$$R_1+ K_2 = 5$$
$$R_2+ K_2 = 7$$
$$R_2+ K_3 = 9$$
$$R_3+ K_3 = 16$$
$$R_3+ K_4 = 18$$

وبافتراض أن R1 معدومة، نحاول حل المعادلات السابقة، وإيجاد قيمة المعاملات، كما يلي:

K4 = 9 ؛K3 = 7 ؛K2 = 5 ؛K1 = 10؛ ؛R3 = 9 ؛R2 = 2 ؛R1 = 0

وبناء على القيم السابقة، نحاول إيجاد التكاليف الهامشية للخانات الفارغة.

$$\delta_{AF} = 20 - 0 - 7 = 13$$
$$\delta_{AG} = 11 - 0 - 9 = 2$$
$$\delta_{BD} = 12 - 2 - 10 = 0$$
$$\delta_{BG} = 20 - 2 - 9 = 9$$
$$\delta_{CD} = 4 - 9 - 10 = -15$$
$$\delta_{CE} = 14 - 9 - 5 = 0$$

نلاحظ من الجدول السابق ان التكاليف الهامشية للخانات الفارغة هي نفسها التكاليف الهامشية التي تم حسابها بطريقة المسار المنعرج، أي ان الطريقتين تقدمان نفس النتائج، كما نلاحظ ايضا وجود تكلفة هامشية سالبة للخانة CD، حيث بلغت قيمتها (-15)، مما يعني ان الحل الحالي لجدول النقل هو غير أمثل، وعليه سنحاول نقل اقصى كمية ممكنة من المنتجات عبر هذه الخانة؛ ولحساب هذه الكمية نقوم بإنشاء مسار خاص بهذه الخانة فقط، وليس كل الخانات الفارغة، وبنفس الطريقة التي تم انشاء المسارات بها في الطريقة السابقة، ثم نحدد الكمية المنقولة عبر هذا المسار بنفس الطريقة السابقة أيضا. وذلك كما يلي:

مراكز الطلب / مصادر العرض	D	E	F	G	كمية العرض
A	10 - 5000	5 + 1000	20 /	11 /	6000
B	12 /	7 - 1000	9 + 1000	20 /	2000
C	4 + /	14 /	16 - 1000	18 1000	2000
كمية الطلب	5000	2000	2000	1000	10 000

وعليه فان الكمية المنقولة عبر هذا المسار هي 1000 (مثل ما تم شرحه في الطريقة السابقة)، وبالتالي فان جدول الحل الجديد يكون كما يلي:

مراكز الطلب / مصادر العرض	D	E	F	G	كمية العرض
A	10 4000	5 2000	20	11	6000
B	12	7	9 2000	20	2000
C	4 1000	14	16	18 1000	2000
كمية الطلب	5000	2000	2000	1000	10 000

حيث ان الحلول التي قدمها هذا الجدول هي:

$X_{AD}=4000$، $X_{AE}=2000$، $X_{BF}=2000$، $X_{CD}=1000$ ، $X_{CG}=1000$.

وبالتالي فإن التكلفة الاجمالية لعملية النقل هي: 90000 دج. وعليه فان جدول الحل الحالي يقدم حل أفضل من الجدول السابق الذي كانت تكلفة النقل الاجمالية له هي 105000. ولكن هل هذا الحل هو الأمثل؟ للتأكد من هذا سنقوم باختبار أمثلية الحل الجديد بنفس طريقة الحل السابق، وذلك كما يلي.

نلاحظ ان عدد الخانات الفارغة في الجدول هو 5 خانات، وعليه فان الشرط الخاص بعدد الخانات المملوءة هو غير محقق، وحتى يتحقق هذا الشرط فلابد من ملء خانة إضافية بقيمة معدومة من المنتجات هي ε، لذلك سنضعها في الخانة AF، مما يجعل لدينا 6 خانات مملوءة، بعد هذا نعيد تخصيص معاملات جديدة لكل سطر وعمود وكذلك نعيد حساب التكاليف الهامشية بنفس الطريقة السابقة، وذلك كما يلي:

	مراكز الطلب / مصادر العرض	K_1 D	K_2 E	K_3 F	K_4 G	كمية العرض
R_1	A	10 4000	5 2000	20 ε	11	6000
R_2	B	12	7	9 2000	20	2000
R_3	C	4 1000	14	16	18 1000	2000
	كمية الطلب	5000	2000	2000	1000	10 000

وعليه فان جملة المعادلات للخانات المملوءة هي:

$$
\begin{aligned}
R_1 + K_1 &= 10\\
R_1 + K_2 &= 5\\
R_1 + K_3 &= 20\\
R_2 + K_3 &= 9\\
R_3 + K_1 &= 4\\
R_3 + K_4 &= 18
\end{aligned}
$$

وبافتراض أن R1 معدومة، نحاول حل المعادلات السابقة، وإيجاد قيمة المعاملات، كما يلي:

$R1 = 0$ ؛ $R2 = -11$ ؛ $R3 = -6$ ؛ $K1 = 10$ ؛ $K2 = 5$ ؛ $K3 = 20$ ؛ $K4 = 24$

وبناء على القيم السابقة، نحاول إيجاد التكاليف الهامشية للخانات الفارغة.

$$
\begin{aligned}
\delta_{AG} &= 11 - 0 - 24 = -13\\
\delta_{BD} &= 12 - (-11) - 10 = 13\\
\delta_{BE} &= 7 - (-11) - 5 = 13\\
\delta_{BG} &= 20 - (-11) - 24 = 7\\
\delta_{CE} &= 14 - (-6) - 5 = 15\\
\delta_{CF} &= 16 - (-6) - 20 = 2
\end{aligned}
$$

نلاحظ وجود تكلفة هامشية سالبة للخانة AG، حيث بلغت قيمتها (-13)، مما يعني ان الحل الحالي لجدول النقل هو غير أمثل، وعليه سنحاول نقل اقصى كمية ممكنة من المنتجات عبر هذه الخانة؛ ولحساب هذه الكمية نقوم بإنشاء مسار خاص بهذه الخانة فقط، وليس كل الخانات الفارغة، وبنفس الطريقة التي تم انشاء المسارات بها في الطريقة السابقة، ثم نحدد الكمية المنقولة عبر هذا المسار بنفس الطريقة السابقة أيضا. وذلك كما يلي:

مراكز الطلب / مصادر العرض	D	E	F	G	كمية العرض
A	− 10 4000	5 2000	20 ε	+ 11	6000
B	12	7	9 2000	20	2000
C	+ 4 1000	14	16	− 18 1000	2000
كمية الطلب	5000	2000	2000	1000	10 000

وعليه فان الكمية المنقولة عبر هذا المســار هي 1000 (مثل ما تم شــرحه في الطريقة الســابقة)، وبالتالي فان جدول الحل الجديد يكون كما يلي:

مراكز الطلب / مصادر العرض	D	E	F	G	كمية العرض
A	10 / 3000	5 / 2000	20	11 / 1000	6000
B	12	7	9 / 2000	20	2000
C	4 / 2000	14	16	18	2000
كمية الطلب	5000	2000	2000	1000	10 000

حيث ان الحلول التي قدمها هذا الجدول هي:

$X_{AD}=3000$، $X_{AE}=2000$، $X_{BF}=2000$، $X_{CD}=2000$ ، $X_{AG}=1000$.

وبالتالي فإن التكلفة الاجمالية لعملية النقل هي: 77000 دج. وعليه فان جدول الحل الحالي يقدم حل أفضــل من الجدول الســابق الذي كانت تكلفة النقل الاجمالية له هي 90000. ولكن هل هذا الحل هو الأمثل؟ للتأكد من هذا ســـنقوم باختبار أمثلية الحل الجديد بنفس طريقة الحل الســـابق، وذلك كما يلي.

نلاحظ ان عدد الخانات الفارغة في الجدول هو 5 خانات، وعليه فان الشـــرط الخاص بعدد الخانات المملوءة هو غير محقق، وحتى يتحقق هذا الشرط فلابد من ملء خانة إضافية بقيمة معدومة من المنتجات هي ε، لذلك ســـنضـــعها في الخانة AF، مما يجعل لدينا 6 خانات مملوءة، بعد هذا نعيد تخصيص معاملات جديدة لكل سطر وعمود وكذلك نعيد حساب التكاليف الهامشية بنفس الطريقة السابقة، وذلك كما يلي:

		K_1	K_2	K_3	K_4	
	مراكز الطلب / مصادر العرض	D	E	F	G	كمية العرض
R_1	A	10 / 3000	5 / 2000	20 / ε	11 / 1000	6000
R_2	B	12	7	9 / 2000	20	2000
R_3	C	4 / 2000	14	16	18	2000
	كمية الطلب	5000	2000	2000	1000	10 000

جملة المعادلات للخانات المملوءة تكون كالتالي:

$$R_1 + K_1 = 10$$
$$R_1 + K_2 = 5$$
$$R_1 + K_3 = 20$$
$$R_1 + K_4 = 11$$
$$R_2 + K_3 = 9$$
$$R_3 + K_1 = 4$$

وبافتراض أن R1 معدومة، نحاول حل المعادلات السابقة، وإيجاد قيمة المعاملات، كما يلي:

K4 = 11 ؛K3 = 20 ؛K2 = 5 ؛K1 = 10؛ ؛R3 = -6 ؛R2 =-11 ؛R1 = 0

وبناء على القيم السابقة، نحاول إيجاد التكاليف الهامشية للخانات الفارغة.

$$\delta_{BD} = 12 - (-11) - 10 = 13$$
$$\delta_{BE} = 7 - (-11) - 5 = 13$$
$$\delta_{BG} = 20 - (-11) - 11 = 20$$
$$\delta_{CE} = 14 - (-6) - 5 = 15$$
$$\delta_{CF} = 16 - (-6) - 20 = 2$$
$$\delta_{CG} = 18 - (-6) - 11 = 13$$

وعليه نقول بأن الحل هو أمثل.

III. حل برامج النقل غير المتوازنة

في الواقع ليست كل نماذج النقل متوازنة، فقد نصادف وجود نماذج يكون فيها اجمالي العرض مختلف عن اجمالي الطلب، حين نميز في هذا النوع من نماذج النقل حالتين هما:

- حالة كون اجمالي الطلب أكبر من اجمالي العرض: في هذه الحالة فان الامر يتطلب إضافة مصدر عرض وهمي تكون قيمة العرض الخاص به تساوي الفرق بين اجمالي العرض والطلب، اما التكاليف الوحدوية للخانات الموجودة في سطره تكون معدومة، ولا تؤخذ التكاليف الوحدوية لهذه الخانات بعين الاعتبار عند اعداد الحل الأولي لجدول النقل وفق الطرق الثلاث السابقة؛
- حالة كون اجمالي العرض أكبر من اجمالي الطلب: في هذه الحالة فان الامر يتطلب إضافة مركز طلب وهمي تكون قيمة الطلب الخاص به تساوي الفرق بين اجمالي العرض والطلب، اما التكاليف الوحدوية للخانات الموجودة في عموده تكون معدومة، ولا تؤخذ أيضا التكاليف الوحدوية لهذه الخانات بعين الاعتبار عند اعداد الحل الأولي لجدول النقل وفق الطرق الثلاث السابقة.

بعد إضافة مصدر العرض او الطلب الوهمي، يصبح نموذج النقل متوازنا، مما يسمح بتطبيق طرق الحل السابقة، وكذلك اختبار أمثلية وتحسين الحل غير الأمثل بنفس الأسلوب الخاص بالنماذج المتوازنة.

مثال 02:

لنفترض ان جدول النقل لمؤسسة ما هو على الشكل التالي:

مراكز الطلب / مصادر العرض	D	E	F	كمية العرض
A	10	5	20	6000
B	12	7	9	2000
C	4	14	16	2000
كمية الطلب	5000	2000	2000	

المطلوب هو إيجاد برنامج النقل الذي يسمح بتحقيق أقل تكلفة اجمالية للنقل.

حل المثال 02:

نلاحظ ان اجمالي العرض لنموذج النقل السابق (10000 وحدة) هو أكبر من اجمالي الطلب لها (9000 وحدة)، أي انه عبارة عن نموذج نقل غير متوازن، وحتى يمكن حل هذا النموذج، فانه يتطلب علينا إضافة مركز طلب وهمي G، يكون اجمالي الطلب له هو 1000 وحدة (أي 10000-9000)، والتكاليف الوحدوية لخاناته هي معدومة، وذلك كما يلي:

مراكز الطلب / مصادر العرض	D	E	F	G مركز طلب وهمي	كمية العرض
A	10	5	20	0	6000
B	12	7	9	0	2000
C	4	14	16	0	2000
كمية الطلب	5000	2000	2000	1000	10 000

حيث يتضح أن جدول النقل أصبح متوازنا، ويمكن حله بالطرق التي تم ذكرها من قبل، ولهذا سنحاول حل جدول النقل هذا بطريقة VAM (طريقة فوجل التقريبية)، حيث سيتم حساب ارقام فوجل لكل سطر او عمود دون الأخذ بعين الاعتبار التكاليف الوحدوية المعدومة)، وذلك كما يلي:

مراكز الطلب / مصادر العرض	D	E	F	G مركز طلب وهمي	كمية العرض	أرقام فوجل في الاعمدة	
A	10 3000	5 2000	20 ε	0 1000	6000	5	
B	12 /	7 /	9 2000	0 /	~~2000~~	~~2~~	
C	4 2000	14 /	16 /	0 /	~~2000~~	~~10~~	
كمية الطلب	~~5000~~ 3000	2000	~~2000~~	1000	10 000		
أرقام فوجل في الاسطر	~~6~~	2	~~7~~				
	2		11				

حيث ان الحلول التي قدمها هذا الجدول هي:

X_{AD}=3000 ،X_{AE}=2000 ،X_{BF}=2000 ،X_{CD}=2000 .

وبالتالي فإن التكلفة الاجمالية لعملية النقل هي: 66000 دج. والســؤال المطروح هو هل هذا الحل هو الأمثل؟ سنقوم باختبار أمثلية الحل الجديد بنفس طريقة الحل السابق، وذلك كما يلي.

نلاحظ ان عدد الخانات الفارغة في الجدول هو 5 خانات، وعليه فان الشــرط الخاص بعدد الخانات المملوءة هو غير محقق، وحتى يتحقق هذا الشرط فلابد من ملء خانة إضافية بقيمة معدومة من المنتجات هي ε، لذلك ســنضــعها في الخانة AF، مما يجعل لدينا 6 خانات مملوءة، بعد هذا نعيد تخصيص معاملات جديدة لكل سطر وعمود وكذلك نعيد حساب التكاليف الهامشية بنفس الطريقة السابقة، وذلك كما يلي:

جملة المعادلات للخانات المملوءة تكون كالتالي:

$$\begin{aligned} R_1 + K_1 &= 10 \\ R_1 + K_2 &= 5 \\ R_1 + K_3 &= 20 \\ R_1 + K_4 &= 0 \\ R_2 + K_3 &= 9 \\ R_3 + K_1 &= 4 \end{aligned}$$

وبافتراض أن R1 معدومة، نحاول حل المعادلات السابقة، وإيجاد قيمة المعاملات، كما يلي:

R1 = 0 ؛R2 =-11 ؛R3 = -6 ؛ ؛K1 = 10 ؛K2 = 5 ؛K3 = 20 ؛K4 = 0

وبناء على القيم السابقة، نحاول إيجاد التكاليف الهامشية للخانات الفارغة.

$$\begin{aligned} \delta_{BD} &= 12-(-11)-10=13 \\ \delta_{BE} &= 7-(-11)-5=13 \\ \delta_{BG} &= 20-(-11)-0=31 \\ \delta_{CE} &= 14-(-6)-5=15 \\ \delta_{CF} &= 16-(-6)-20=2 \\ \delta_{CG} &= 18-(-6)-0=24 \end{aligned}$$

وعليه نقول بأن الحل هو أمثل.

IV. خـلاصـة

1. نماذج النقل هي عبارة عن جداول يتم تلخيص معطيات مشكلة النقل بها، حيث تهدف الى تخفيض تكلفة النقل (أو تعظيم الربح لعملية النقل) لموارد ذات خصائص متشابهة من أماكن تواجدها والتي يطلق عليها "مصادر العرض"، الى أماكن أخرى تعرف بـ"مراكز الطلب"؛
2. تتضمن منهجية حل نماذج النقل على الخطوات التالية:
   - إيجاد الحل الأولي؛
   - اختبار مدى كون الحل أمثل؛
   - تحسين الحل غير الأمثل؛
   - تكرار الخطوات (2 و3) الى غاية التوصل الى الحل الأمثل.
3. يمكن التوصل الى الحل الأولي عبر عدة طرق نذكر منها ما يلي:
   - طريقة الركن الشمالي الغربي؛
   - طريقة أقل تكلفة؛
   - طريقة فوجل التقريبية.
4. حتى نتمكن من اختبار أمثلية الحل الخاص بجدول النقل فانه يشترط في الحل الحالي الشرط التالي:

عدد الخانات المملوءة = عدد الأسطر + عدد الأعمدة -1

وفي حالة غياب هذا الشرط، فانه يتم ملء عدد من الخانات في الجدول يساوي الفرق بين العدد الحالي للخانات المملوءة والشرط السابق، حيث ملء هذه الخانات يكون بكمية $(\varepsilon = 0)$؛ بعد هذا نكمل ما تبقى من خطوات لاختبار أمثلية الحل.

5. يتم اختبار أمثلية الحل وتحسينه في جداول النقل بالاعتماد على طريقتين رئيسيتين هما:
   - طريقة المسار المتعرج (طريقة الحجر المتنقل) Stepping-Stone Method؛
   - طريقة التوزيع المعدل *Modified Distribution Method*.
6. في نماذج النقل غير المتوازنة يتطلب الامر إضافة مصدر عرض أو طلب وهي تكون الكمية الخاص به تساوي الفرق بين اجمالي العرض والطلب، اما التكاليف الوحدوية للخانات الموجودة في سطره أو عموده تكون معدومة، ولا تؤخذ التكاليف الوحدوية لهذه الخانات بعين الاعتبار عند اعداد الحل الأولي لجدول النقل وفق الطرق الثلاث السابقة؛