TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

EDP D'ORDRE 1-MÉTHODES DES CARACTÉRISTIQUES

1.1 E.D.P. linéaires du premier ordre

1.1.1 E.D.P. linéaires du premier ordre

Définition 1.1. *On appelle une E.D.P. linéaire du premier ordre une équation fonctionnelle de la forme :*

$$f_1(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+f_n(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=g(x_1,\ldots,x_n,u)$$

où f_i et g sont des fonctiones donnnèes de $x_1,\ldots,x_n$ et u, où u est une fonction non connue de $x_1,\ldots,x_n$.

Définition 1.2. *On appelle une E.D.P. linéaire du premier ordre à 2 variables réelles une équation fonctionnelle de la forme :*

$$f(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}+g(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}=h(x,y,u), \tag{E}$$

où f, g et h sont des fonctiones donnnèes de x,y et u.

Exemple 1.1.

1. $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$
2. $\dfrac{\partial u}{\partial x}+xy\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$
3. $(x^2-1)\dfrac{\partial u}{\partial x}+2xy\dfrac{\partial u}{\partial y}=-4xy$
4. $(x^2+y^2)\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=-x+y+u$

1.1.2 Systèmes différentiels-Intégrales premières

Définition 1.3. *Le système différentiel*

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(x,y,u)\\ \dfrac{dy}{dt}=g(x,y,u)\\ \dfrac{du}{dt}=h(x,y,u),\end{cases}$$

qui s'écrit plus symétriquement

$$\frac{dx}{f(x,y,u)}=\frac{dy}{g(x,y,u)}=\frac{du}{h(x,y,u)}, \tag{S}$$

s'appelle système caractéristique de (E).

Théorème 1.1. *Deux fonctions f et g sont fonctionnellement indépendantes dans D de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si :*

$$Le\,rang\,du\,dterminant\,\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial u} \end{vmatrix} est\,2\,dans\,D.$$

1.1.3 Solution générale d'une E.D.P. linaire du premier ordre

Théorème 1.2. *Les solutions de equation (E) sont les intégrales premières du système caractéristique (S).*

Théorème 1.3. *Pour résoudre l'équation (E), on considère deux cas*

1. *On examine si $h(x, y, z) = 0$ définit une solution.*
2. *Dans le domaine $h(x, y, z) \neq 0$, on cherche 2 intégrales premières φ_1 et φ_2 du système caractéristique (S)*

Toute solution est alors définie par $F(\varphi_1, \varphi_1) = 0$ ou $\varphi_1 = F(\varphi_2)$.

1.1.4 Exemples

Exemple 1.2. *Déterminer la solution générale de l'équation*

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u.$$

Solution.
Le système caractéristique associe est

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u}.$$

On cherche les intégrales premières :
on a

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} - \int \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \ln(y) - \ln(x) = k \Rightarrow \ln\left(\frac{y}{x}\right) = k \Rightarrow \frac{y}{x} = c_1,$$

alors le première intégrale

$$\varphi_1(x, y, u) = \frac{y}{x} = c_1$$

. D'autre part

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u} \Rightarrow \int \frac{du}{u} - \int \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \ln(u) - \ln(x) = k \Rightarrow \ln\left(\frac{u}{x}\right) = k \Rightarrow \frac{u}{x} = c_2,$$

alors le deuxième intégrale

$$\varphi_2(x, y, u) = \frac{u}{x} = c_2.$$

Par conséquent, la solution général s'écrit

$$F(\varphi_1(x, y, u), \varphi_2(x, y, u)) = F(\frac{y}{x}, \frac{u}{x}) = 0,$$

d'où

$$\varphi_2 = G(\varphi_1) \Rightarrow \frac{u}{x} = G(\frac{y}{x}) \Rightarrow u = xG(\frac{y}{x}),$$

où F et G sont des fonctions arbitraires de classe C^1.

Exemple 1.3. *Déterminer la solution générale de l'équation*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} + u = 0.$$

Solution.

Le système caractéristique associe est

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} = \frac{du}{-u}.$$

On cherche les intégrales premières.

on a

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} \Rightarrow \int dx - \frac{1}{2}\int dy = 0 \Rightarrow x - \frac{1}{2}y = k \Rightarrow 2x - y = c_1,$$

alors le première intégrale

$$\varphi_1(x, y, u) = 2x - y = c_1$$

. D'autre part

$$\frac{dx}{1} = \frac{du}{-u} \Rightarrow \int dx + \int \frac{1}{u}du = 0 \Rightarrow x + \ln(u) = k \Rightarrow u\exp(x) = c_2,$$

alors le deuxième intégrale

$$\varphi_2(x, y, u) = u\exp(x) = c_2.$$

Par conséquent, la solution général s'écrit

$$F(\varphi_1(x, y, u), \varphi_2(x, y, u)) = F(2x - y, u\exp(x)) = 0,$$

d'où

$$\varphi_2 = G(\varphi_1) \Rightarrow u\exp(x) = G(2x - y) \Rightarrow u = \exp(-x)G(2x - y),$$

où F et G sont des fonctions arbitraires de classe C^1.

Exemple 1.4. *Déterminer la solution générale de l'équation*

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Solution.
Le système caractéristique associe est

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}, \;\; du = 0.$$

On cherche les intégrales premières :
on a

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \Rightarrow xdx + ydy = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}Y^2 = k \Rightarrow x^2 + Y^2 = c_1,$$

alors le première intégrale

$$\varphi_1(x, y, u) = x^2 + Y^2 = c_1$$

. D'autre part, on

$$du = 0 \Rightarrow u = c_2,$$

alors le deuxième intégrale

$$\varphi_2(x, y, u) = u = c_2.$$

Par conséquent, la solution général s'écrit

$$F(\varphi_1(x, y, u), \varphi_2(x, y, u)) = F(x^2 + y^2, u) = 0,$$

d'où

$$\varphi_2 = G(\varphi_1) \Rightarrow u = G(x^2 + y^2),$$

où F et G sont des fonctions arbitraires de classe C^1.

1.1.5 Problème de Cauchy

Définition 1.4. *On appelle* ***courbe caractéristique*** *de l'équation (E) les solutions de son système caractéristique (S).*

Théorème 1.4.
1. *Par chaque courbe caractéristique il passe une infinité de* ***surfaces solutions****.*
2. *Par toute courbe γ caractéristique en aucun point passe une solution unique de (E), on l'appelle la solution au probléme de Cauchy relatif à γ.*

Remarque 1.1. *Si* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \lambda \Leftrightarrow \dfrac{a+c}{b+d} = \lambda$.

1.1.6 Série de TD

Exercise 01. Déterminer la la surface de l'E.D.P suivante

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = x + y,$$

qui contient la droite D

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 0. \end{cases}$$

Solution.
Le système caractéristique associe est

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{x+y}.$$

On cherche les intégrales premières :
on a

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|y| - \ln|x| = k \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{x}\right| = k \Rightarrow \frac{y}{x} = c_1,$$

alors le première intégrale

$$\varphi_1(x, y, u) = \frac{y}{x} = c_1.$$

D'autre part, on

$$\frac{dx + dy}{x + y} = \frac{du}{x + y} \Rightarrow du = dx + dy \Rightarrow u = x + y + c_2 \Rightarrow u - x - y = c_2,$$

alors le deuxième intégrale

$$\varphi_2(x, y, u) = u - x - y = c_2.$$

Indépendance
D'après le théorème (1.1), on trouve φ_1 et φ_2 sont independante, par conséquent, la solution général s'écrit

$$c_2 = \varphi_2 = G(\varphi_1) \Rightarrow u = x + y + G\left(\frac{y}{x}\right),$$

où G est fonctions de classe C^1.
On cherche la surface intégrale

$$\begin{aligned} x &= 1, & (1) \\ u &= 0, & (2) \\ x + y + G\left(\frac{y}{x}\right) &= u, & (3) \end{aligned}$$

De (1), (2) et (3) on a

$$u = 1 + y + G\left(y\right) = 0 \Rightarrow G\left(y\right) = -1 - y,$$

ce qui définie la fonction G comme suit

$$G(\alpha) = -1 - \alpha.$$

par conséquent, l'équation de la surface cherchée est

$$u = x + y + G\left(\frac{y}{x}\right) = x + y - 1 - \frac{y}{x}.$$

Exercise 02. Déterminer la la surface de l'E.D.P suivante

$$y\frac{y\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{u},$$

qui et passant par la circonférence

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ u = 3. \end{cases}$$

Solution.
Le système caractéristique associe est

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{udu}{-2xy}.$$

On cherche les intégrales premières :
on a
$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \Rightarrow -xdx = ydy \Rightarrow xdx + ydy = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = c_1,$$
alors le première intégrale

$$\varphi_1(x, y, u) = x^2 + y^2 = c_1.$$

D'autre part, on

$$\frac{dy}{-x} = \frac{udu}{-2xy} \Rightarrow dy = \frac{udu}{2y} \Rightarrow udu = 2ydy \Rightarrow u^2 = 2y^2 + c_2 \Rightarrow u^2 - 2y^2 = c_2,$$

alors le deuxième intégrale

$$\varphi_2(x, y, u) = u^2 - y^2 = c_2.$$

Indépendance
D'après le théorème (1.1), on trouve φ_1 et φ_2 sont independante, par conséquent, la solution général s'écrit

$$c_2 = \varphi_2 = G(\varphi_1) \Rightarrow u^2 = 2y^2 + G\left(x^2 + y^2\right),$$

où G est fonctions de classe C^1.
On cherche la surface intégrale

$$\begin{array}{rcll} x^2 + y^2 &=& c_1, & (1) \\ u^2 - 2y^2 &=& c_2, & (2) \\ x^2 + y^2 &=& 16, & (3) \\ u &=& 3, & (4). \end{array}$$

on a

$$c_2 + c_1 = u^2 + x^2 + y^2 - 2y^2 \Rightarrow c_2 + c_1 = 9 + 16 - 2y^2 \Rightarrow c_2 = -c_1 + 25 - 2y^2$$

ce qui définie la fonction G comme suit

$$G(\alpha) = -\alpha + 25 - 2y^2.$$

par conséquent, l'équation de la surface cherchée est

$$u^2 = 2y^2 + G\left(x^2 + y^2\right) = 2y^2 - x^2 - y^2 + 25 - 2y^2 \Rightarrow u^2 = -x^2 - y^2 + 25$$

$$\Rightarrow u^2 + x^2 + y^2 = 25.$$

Exercise 03. Déterminer la solution de l'équation suivante

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

qui passent par l'ellipse

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = r^2 \\ u = my, \end{cases} \quad m,\, y \in \mathbb{R}.$$

Solution.
Le système caractéristique associe est

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = 0, \;\; du = 0.$$

On cherche les intégrales premières :
on a

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \Rightarrow -xdx = ydy \Rightarrow xdx + ydy = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = c_1,$$

alors le première intégrale

$$\varphi_1(x, y, u) = x^2 + y^2 = c_1.$$

D'autre part, on

$$du = 0 \Rightarrow u = c_2,$$

alors le deuxième intégrale

$$\varphi_2(x, y, u) = u = c_2.$$

Indépendance
D'après le théorème (1.1), on trouve φ_1 et φ_2 sont independante, par conséquent, la solution général s'écrit

$$\varphi_2 = G(\varphi_1) \Rightarrow u = G(x^2 + y^2),$$

où G est fonctions de classe C^1.
On cherche la surface intégrale

$$\begin{array}{rcll} x^2 + y^2 &=& c_1, & (1) \\ u &=& c_2, & (2) \\ x^2 + (y-1)^2 &=& r^2, & (3) \\ u &=& my, & (4). \end{array}$$

De (1) et (3) on a

$$x^2 + (y-1)^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1 = r^2 \Rightarrow c_1 - 2y + 1 = r^2 \Rightarrow c_1 - r^2 + 1 = 2y.$$

De (2) et (4) on a

$$c_2 = my \Rightarrow y = \frac{c_2}{m}.$$

On a

$$c_1 - r^2 + 1 = 2y \Rightarrow c_1 - r^2 + 1 = \frac{2c_2}{m}.$$

d'où

$$c_2 = \frac{m}{2}(c_1 - r^2 + 1) \Leftrightarrow G(c_1) = \frac{m}{2}(c_1 - r^2 + 1),$$

ce qui définie la fonction G comme suit

$$G(\alpha) = \frac{m}{2}(\alpha - r^2 + 1).$$

par conséquent, l'équation de la surface cherchée est

$$u = G(\varphi_1) = \frac{m}{2}(x^2 + y^2 - r^2 + 1).$$

Exercise 04. Déterminer la solution générale de l'équation suivante

$$(x+1)\frac{\partial u}{\partial x} + (y-1)\frac{\partial u}{\partial y} = (x+y).$$

Solution.
Le système caractéristique associe est

$$\frac{dx}{x+1} = \frac{dy}{y-1} = \frac{du}{x+y}.$$

On cherche les intégrales premières :
on a

$$\frac{dx}{x+1} = \frac{dy}{y-1} \Rightarrow \ln|y-1| - \ln|x+1| = k \Rightarrow \ln\left|\frac{y-1}{x+1}\right| = k \Rightarrow \frac{y-1}{x+1} = c_1,$$

alors le première intégrale

$$\varphi_1(x,y,u) = \frac{y-1}{x+1} = c_1.$$

D'autre part, on

$$\frac{dx+dy}{x+1+y-1} = \frac{du}{x+y} \Rightarrow du = dx + dy \Rightarrow u = x + y + c_2 \Rightarrow u - x - y = c_2,$$

alors le deuxième intégrale

$$\varphi_2(x,y,u) = u - x - y = c_2.$$

Indépendance
D'après le théorème (1.1), on trouve φ_1 et φ_2 sont independante, par conséquent, la solution général s'écrit

$$c_2 = \varphi_2 = G(\varphi_1) \Rightarrow u = x + y + G\left(\frac{y-1}{x+1}\right),$$

où G est fonctions de classe C^1.

Exercise 05. Déterminer la solution générale de l'équation suivante

$$xy^2\frac{\partial u}{\partial x} + yx^2\frac{\partial u}{\partial y} = (x^2+y^2)u.$$

Solution.
Le système caractéristique associe est

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{yx^2} = \frac{du}{(x^2+y^2)u}.$$

On cherche les intégrales premières :
on a

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{yx^2} \Rightarrow \frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \Rightarrow xdx = ydy \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 = k \Rightarrow x^2 - y^2 = c_1,$$

alors le première intégrale

$$\varphi_1(x,y,u) = x^2 + y^2 = c_1.$$

D'autre part, on a

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{yx^2} = \frac{du}{(x^2+y^2)u} \Rightarrow \frac{ydx}{xy^3} = \frac{xdy}{yx^3} = \frac{du}{(x^2+y^2)u}$$

$$\Rightarrow \frac{ydx+xdy}{xy^3+yx^3} = \frac{du}{(x^2+y^2)u} \Rightarrow \frac{ydx+xdy}{xy(y^2+x^2)} = \frac{du}{(x^2+y^2)u}$$

alors

$$\frac{ydx+xdy}{xy} = \frac{du}{u} \Rightarrow \frac{d(xy)}{xy} = \frac{du}{u} \Rightarrow \ln|xy| + k = \ln|u| \Rightarrow \ln\left|\frac{u}{xy}\right| = k \Rightarrow \frac{u}{xy} = c_2,$$

alors le deuxième intégrale

$$\varphi_2(x,y,u) = \frac{u}{xy} = c_2.$$

Indépendance
D'après le théorème (1.1), on trouve φ_1 et φ_2 sont independandante, par conséquent, la solution général s'écrit

$$\varphi_2 = G(\varphi_1) \Rightarrow \frac{u}{xy} = G(x^2-y^2) \Rightarrow u = xyG(x^2-y^2),$$

où G est fonctions de classe C^1.

Exercise 06. Déterminer la la surface de l'E.D.P suivante
$$\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=4,$$
qui et passant par la parabole
$$\begin{cases} y^2=u \\ x=0. \end{cases}$$

Solution.
Le système caractéristique associe est
$$\frac{dx}{\frac{1}{x}}=\frac{dy}{\frac{1}{y}}=\frac{du}{4}\Leftrightarrow xdx=ydy=\frac{du}{4}.$$
On cherche les intégrales premières :
on a
$$xdx=ydy\Rightarrow ydy-xdx=0\Rightarrow y^2-x^2=c_1,$$
alors le première intégrale
$$\varphi_1(x,y,u)=y^2-x^2=c_1.$$
D'autre part, on
$$ydy=\frac{du}{4}\Rightarrow du-4ydy=0\Rightarrow u-2y^2=c_2,$$
alors le deuxième intégrale
$$\varphi_2(x,y,u)=u-2y^2=c_2.$$
Indépendance
D'après le théorème (1.1), on trouve φ_1 et φ_2 sont independante, par conséquent, la solution général s'écrit
$$\varphi_2=G(\varphi_1)\Rightarrow u-2y^2=G(y^2-x^2)\Rightarrow u=2y^2+G(y^2-x^2),$$
où G est fonctions de classe C^1.
On cherche la surface intégrale
$$\begin{array}{rcll} 2y^2+G(y^2-x^2) & = & u, & (1) \\ y^2 & = & u, & (2) \\ x & = & 0, & (3). \end{array}$$

De (1) et (3) on a

$$u = 2y^2 + G(y^2) \leftrightarrow G(y^2) = u - 2y^2$$

De (2), on a

$$G(y^2) = u - 2y^2 = y^2 - 2y^2 = -y^2$$

ce qui définie la fonction G comme suit

$$G(\alpha) - \alpha.$$

par conséquent, l'équation de la surface cherchée est

$$u = 2y^2 + G(y^2 - x^2) = 2y^2 - y^2 + x^2 = y^2 + x^2.$$

$$u = x^2 + y^2.$$

1.2 E.D.P. non linéaires du premier ordre

1.2.1 E.D.P. non linéaires du premier ordre

Définition 1.5. *On appelle une E.D.P. non linéaire du premier ordre une équation fonctionnelle de la forme :*

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{E}$$

où $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, $z = u(x, y)$.

Exemple 1.5.

1. $p^2 + q = y$
2. $pq - 1 = 0$
3. $upq - p - q = 0$

1.2.2 Résolution de l'équation (E)

On notera par

$$X = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad P = \frac{\partial F}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial q}.$$

Définition 1.6. *On sait que si on en connaît une intégrale compléte les solution de cette équation sont :*

1. *Les surfaces d'intégrale compléte.*
2. *l'enveloppe à deux paramètres.*
3. *Les enveloppes de famille à un paramètre.*

Remarque 1.2. *Une famille à deux paramètres de solution de (E). Cette famille s'appelle une intégrale complète de (E).*

Le théorème suivant permet de trouver une intégrale complète

Théorème 1.5. *Recherche d'une intégrale complète :*

1. *On cherche une intégrale première H du système (S) suivant*

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = -\frac{dp}{X + pZ} = -\frac{dq}{Y + qZ},$$

tell que $\frac{D(F,H)}{D(p,q)}$.

2. *Pour chaque valeur de λ, on calcule p et q solutions du système*

$$\begin{cases} F(x,y,z,p,q) = 0 \\ H(x,y,z,p,q) = \lambda. \end{cases}$$

p et q fonctions de x, y, z et λ.

3. *z étant fixé, on résout pour chaque λ (et chaque z) l'équation*

$$pdx + qdy = 0,$$

les solutions sont définies implicitement par une relation $\Phi(\lambda, z, x, y) = \phi(z)$ ($\phi(z)$ est une constante en x et y).

4. *On choisit x_0 celui ci étant fixé, on détermine $\phi(z)$ en imposant que*

$$\Phi(\lambda, z, x_0, y) - \phi(z)$$

soit solution de :

$$q(x_0, y, z)dy - dz = 0$$

.
Alors $G(x,y,z,\lambda,\mu) = \Phi(\lambda, z, x, y) - \phi(z) + \mu$ est une intégrale complète de $F(x,y,z,p,q) = 0$.

5. *On peut également procéder en fixant $y = y_0$ et chercher une fonction Ψ de sorte que*

$$\Phi(\lambda, z, x, y_0) - \psi(z)$$

soit solution de :

$$pdx - dz = 0$$

.
Alors $G(x,y,z,\lambda,\mu) = \Phi(\lambda, z, x, y) - \psi(z) + \mu$ est une intégrale complète de $F(x,y,z,p,q) = 0$.

Remarque 1.3. *Soient A et B deux fonctions de classe C^1 dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$. On appelle facteur intégrant de l'équation*

$$A(x,y)dx + B(x,y)dy = 0$$

une fonction α telle que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(A(x,y)\alpha(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(B(x,y)\alpha(x,y)\right).$$

Exemple 1.6. *Trouver une intégrale complète de :*

$$zpq - p - q = 0.$$

Solution.
1. Le système (S) est

$$\frac{dx}{zq-1} = \frac{dy}{zp-1} = \frac{dz}{2zpq-p-q} = -\frac{dp}{p^2q} = -\frac{dq}{q^2p}.$$

On a

$$-\frac{dp}{p^2q} = -\frac{dq}{q^2p} \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} \Rightarrow \frac{p}{q} = \lambda,$$

alors le première intégrale

$$H(p,q) = \frac{p}{q}.$$

On vérifie immédiatement que $\frac{D(F,H)}{D(p,q)} \neq 0$.
2. On résout

$$\begin{cases} F(x,y,z,p,q) = 0 \\ H(x,y,z,p,q) = \lambda. \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} zpq - p - q = 0 \\ \frac{p}{q} = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \dfrac{\lambda+1}{z} \\ q = \dfrac{\lambda+1}{\lambda z} \end{cases}$$

3. λ et z étant fixé, on a

$$pdx + qdy = \frac{\lambda+1}{z}dx + \frac{\lambda+1}{\lambda z}dy = \frac{\lambda+1}{\lambda z}(\lambda dx + dy) = 0,$$

alors, les solutions sont définies par

$$\lambda x + y = k$$

donc

$$\Phi(\lambda, z, x, y) = \lambda x + y.$$

4. On ce fixé $y = y_0 = 0$.
On cherche une fonction $\psi(z)$ telle que la fonction donnée par :

$$W(z,x,\lambda) = \Phi(\lambda, z, x, 0) - \psi(z).$$

soit solution de l'équation

$$pdx - dz = 0.$$

Soit

$$pdx - dz = \frac{\lambda + 1}{z}dx - dz = (\lambda + 1)dx - zdz = 0.$$

On a

$$W(z, x, \lambda) = \Phi(\lambda, z, x, 0) - \psi(z) = \lambda x - \psi(z),$$

alors

$$dW(z, x, \lambda) = \frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial z}dz = (\lambda + 1)dx - \frac{d\psi(z)}{dz}dz.$$

Par comparaison, on trouve

$$\frac{d\psi(z)}{dz} = z \Rightarrow \psi(z) = \frac{1}{2}z^2 + C.$$

On a par suite, une intégrale complète de l'équation (E) est

$$G(x, y, z, \lambda, \mu) = \lambda x + y - \frac{z^2}{2} + \mu = 0.$$

Exemple 1.7. *Déterminer la solution de l'équation :*

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - y = 0.$$

Solution. Nous avons l'équation

$$p^2 + q - y = 0.$$

1. Le système (S) est

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2p^2 + q} = -\frac{dp}{0} = -\frac{dq}{1}.$$

On a

$$dp = 0 \Rightarrow p = \lambda,$$

alors le première intégrale

$$H(x, y, z, p, q) = p = \lambda.$$

On vérifie immédiatement que $\frac{D(F,H)}{D(p,q)} \neq 0$.

2. On résout

$$\begin{cases} F(x, y, z, p, q) = 0 \\ H(x, y, z, p, q) = \lambda. \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} p^2 + q - y = 0 \\ p = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \lambda \\ q = y - \lambda^2 \end{cases}$$

3. λ et z étant fixé, on a

$$pdx + qdy = \lambda dx + (y - \lambda^2)dy = 0,$$

alors, les solutions sont définies par

$$\lambda x + \frac{y^2}{2} - \lambda^2 y = k$$

donc

$$\Phi(\lambda, z, x, y) = \lambda x + \frac{y^2}{2} - \lambda^2 y.$$

4. On ce fixé $y = y_0 = 0$.

On cherche une fonction $\psi(z)$ telle que la fonction donnée par :

$$W(z, x, \lambda) = \Phi(\lambda, z, x, 0) - \psi(z).$$

soit solution de l'équation
$$pdx - dz = 0.$$
Soit
$$pdx - dz = \lambda dx - dz = 0.$$
On a
$$W(z, x, \lambda) = \Phi(\lambda, z, x, 0) - \psi(z) = \lambda x - \psi(z),$$
alors
$$dW(z, x, \lambda) = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial z} dz = \lambda dx - \frac{d\psi(z)}{dz} dz.$$
Par comparaison, on trouve
$$\frac{d\psi(z)}{dz} = 1 \Rightarrow \psi(z) = z + C.$$
On a par suite, une intégrale complète de l'équation (E) est
$$G(x, y, z, \lambda, \mu) = \lambda x + \frac{y^2}{2} - \lambda^2 y - z + \mu = 0.$$

Exemple 1.8. *Déterminer la solution de l'équation :*

$$xp + yq - zpq = 0.$$

Solution. Nous avons l'équation

$$F(x, y, z, p, q) = xp + yq - zpq = 0.$$

1. Le système (S) est

$$\frac{dx}{x - zq} = \frac{dy}{y - zp} = \frac{dz}{px + qy - 2zpq} = \frac{dp}{p^2q - p} = \frac{dq}{q^2p - q}.$$

On a

$$\frac{dp}{p^2q - p} = \frac{dq}{q^2p - q} \Leftrightarrow \frac{dp}{p(pq - 1)} = \frac{dq}{q(qp - 1)} \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} \Rightarrow \frac{p}{q} = \lambda,$$

alors le première intégrale

$$H(x, y, z, p, q) = \frac{p}{q} = \lambda.$$

On vérifie immédiatement que $\frac{D(F,H)}{D(p,q)} \neq 0$.
2. On résout

$$\begin{cases} F(x, y, z, p, q) = 0 \\ H(x, y, z, p, q) = \lambda. \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} xp + yq - zpq = 0 \\ \frac{p}{q} = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{\lambda x + y}{z} \\ q = \frac{\lambda x + y}{\lambda z} \end{cases}$$

3. λ et z étant fixé, on a

$$pdx + qdy = \frac{\lambda x + y}{z}dx + \frac{\lambda x + y}{\lambda z}dy = \frac{\lambda x + y}{\lambda z}(\lambda dx + dy) = 0,$$

alors, les solutions sont définies par

$$(\lambda x + y)^2 = k$$

donc

$$\Phi(\lambda, z, x, y) = (\lambda x + y)^2.$$

4. On ce fixé $x = x_0 = 0$.
On cherche une fonction $\psi(z)$ telle que la fonction donnée par :

$$W(z, y, \lambda) = \Phi(\lambda, z, y, 0) - \psi(z).$$

soit solution de l'équation
$$qdy - dz = 0.$$
Soit
$$qdy - dz = \frac{y}{\lambda z}dy - dz = 0 \Leftrightarrow ydy - \lambda z dz = 0.$$
On a
$$W(z, x, \lambda) = \Phi(\lambda, z, 0, y) - \psi(z) = y^2 - \psi(z),$$
alors
$$dW(z, x, \lambda) = \frac{\partial W}{\partial y}dy + \frac{\partial W}{\partial z}dz = 2ydy - \frac{d\psi(z)}{dz}dz.$$
Par comparaison, on trouve
$$\frac{d\psi(z)}{dz} = 2\lambda z \Rightarrow \psi(z) = \lambda z^2 + C.$$
On a par suite, une intégrale complète de l'équation (E) est
$$G(x, y, z, \lambda, \mu) = (\lambda x + y)^2 - \lambda z^2 + \mu = 0, \quad \varepsilon \pm 1$$

Exemple 1.9. *Déterminer la solution de l'équation :*

$$p^2 + q^2 - x - y = 0.$$

Solution. Nous avons l'équation

$$F(x, y, z, p, q) = p^2 + q^2 - x - y = 0.$$

1. Le système (S) est

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{dz}{2p^2 + 2q^2} = \frac{dp}{1} = \frac{dq}{1}.$$

On a

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dp}{1} \Rightarrow dx = 2pdp \Rightarrow p^2 = x + \lambda \Rightarrow p^2 - x = \lambda,$$

alors le première intégrale

$$H(x, y, z, p, q) = p^2 - x = \lambda.$$

On vérifie immédiatement que $\frac{D(F,H)}{D(p,q)} \neq 0$.
2. On résout

$$\begin{cases} F(x, y, z, p, q) = 0 \\ H(x, y, z, p, q) = \lambda. \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} p^2 + q^2 - x - y = 0 \\ p^2 - x = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \varepsilon\sqrt{\lambda + x} \\ q = \varepsilon\sqrt{y - \lambda} \end{cases} \quad \varepsilon \pm 1.$$

3. λ et z étant fixé, on a

$$pdx + qdy = \varepsilon\sqrt{\lambda + x}dx + \varepsilon\sqrt{y - \lambda}dy = 0,$$

alors, les solutions sont définies par

$$\varepsilon\frac{2}{3}(\lambda + x)^{3/2} + \frac{2}{3}\varepsilon(y - \lambda)^{3/2} = k$$

donc

$$\Phi(\lambda, z, x, y) = \varepsilon\frac{2}{3}(\lambda + x)^{3/2} + \varepsilon\frac{2}{3}(y - \lambda)^{3/2} \;\; \varepsilon \pm 1.$$

4. On ce fixé $x = x_0 = 0$.
On cherche une fonction $\psi(z)$ telle que la fonction donnée par :

$$W(z, y, \lambda) = \Phi(\lambda, z, y, 0) - \psi(z).$$

soit solution de l'équation
$$qdy - dz = 0.$$
Soit
$$qdy - dz = \varepsilon(y-\lambda)^{1/2}dy - dz = 0.$$
On a
$$W(z,x,\lambda) = \Phi(\lambda, z, 0, y) - \psi(z) = \varepsilon\frac{2}{3}\lambda^{3/2} + \varepsilon\frac{2}{3}(y-\lambda)^{3/2} - \psi(z),$$
alors
$$dW(z,x,\lambda) = \frac{\partial W}{\partial y}dy + \frac{\partial W}{\partial z}dz = \varepsilon(y-\lambda)^{1/2}dy - \frac{d\psi(z)}{dz}dz.$$
Par comparaison, on trouve
$$\frac{d\psi(z)}{dz} = 1dz \Rightarrow \psi(z) = z + C.$$
On a par suite, une intégrale complète de l'équation (E) est
$$G(x,y,z,\lambda,\mu) = \varepsilon(\lambda+x)^{3/2} + \varepsilon(y-\lambda)^{3/2} - z + \mu = 0, \quad \varepsilon \pm 1$$

Remarque 1.4. *Dans le cas*
$$F(p,q)=0$$
la solution est de la forme
$$z=\lambda x+\eta y+\mu$$
où sont des constant telles que
$$F(\lambda,\eta)=0\Leftrightarrow\eta=f(\lambda).$$
Donc une intégrale complete l'E.D.P donné est
$$z=\lambda x+f(\lambda)y+\mu.$$

Exemple 1.10. *Déterminer la solution de l'équation :*
$$p^2+q^2=k^2,$$
où k est constant

Solution. Nous avons l'équation
$$F(p,q)=p^2+q^2-k^2=0.$$
On a
$$F(\lambda,\eta)=\lambda^2+\eta^2-k^2=0\Leftrightarrow\eta^2=k^2-\lambda^2\Rightarrow\eta=\varepsilon\sqrt{k^2-\lambda^2},\ \ \varepsilon\pm 1.$$
on obtient une integrale compléte
$$z=\lambda x+\varepsilon\sqrt{k^2-\lambda^2}y+\mu.$$

CHAPITRE 2

EQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE

2.1 E.D.P. linéaires du scond ordre

Définition 2.1. *Une E.D.P. quasi-linéaire du second ordre est une E.D.P. de la forme :*

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F(x,y,u,p,q). \tag{E}$$

L'inconnue est la fonction $u(x,y)$, $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$, a, b, c et F sont trois fonctions données dans un domaine Ω.

Définition 2.2. *On appelle une E.D.P. linéaire du second ordre à 2 variables réelles une équation fonctionnelle de la forme :*

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+k(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+g(x,y)u=F(x,y). \tag{E}$$

où a, b c, d, k, g et f sont des fonctiones donnèes de x,y.

Exemple 2.1.

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-u=0.$
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+u=c.$
3. $y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+u=x^2.$
4. $xy\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=1.$

Remarque 2.1. *La solution générale d'une EDP non homogène est la somme d'une solution particulière de l'EDP non homogène et d'une solution générale de l'EDP homogène.*

2.2 Classification des équations

Définition 2.3. *Une E.D.P du second ordre (E) est généralement classée en trois classes*

1. *Une équation (E) telle que $b^2-4ac>0$ dans un domaine Ω est dite **hyperbolique** dans ce domaine.*
2. *Une équation (E) telle que $b^2-4ac=0$ dans un domaine Ω est dite **parabolique** dans ce domaine.*
3. *Une équation (E) telle que $b^2-4ac<0$ dans un domaine Ω est dite **elliptique** dans ce domaine.*

Exemple 2.2. *Classez les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre suivants*

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
3. $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sqrt{xy}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 y.$

Solution.

1.
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$
On a $a = 1,\ b = 0,\ c = 1$ alors
$b^2 - ac = -1 < 0,$
donc l'équation est elliptique.

2.
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$
On a $a = 1,\ b = 2,\ c = 1$ alors
$b^2 - ac = 4 - 1 = 3 > 0,$
donc l'équation est hyperbolique.

3.
$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sqrt{xy}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 y..$
On a $a = x,\ b = -\sqrt{xy},\ c = y$ alors
$b^2 - ac = xy - xy = 0,$
donc l'équation est parabolique.

2.3 Caractéristiques

Théorème 2.1. 1. *Si $a \neq 0$, les courbes caractéristiques sont les solutions de l'équation différentielle*

$$a(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b(x,y)\frac{dy}{dx} + c(x,y) = 0.$$

2. *Si $a = 0$ et $a \neq 0$, les courbes caractéristiques sont les solutions de l'équation différentielle*

$$c(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b(x,y)\frac{dy}{dx} + a(x,y) = 0.$$

3. *Si $a = c = 0$, ce sont les droites x=constante et y = constante.*

Remarque 2.2. *Ainsi, dans le cas hyperbolique, il existe deux caractéristiques réelles, dans le cas parabolique une caractéristique réelle et dans le cas elliptique* *deux caractéristiques complexes conjuguées :*

$$\textit{Pour}\ \ a \neq 0 \begin{cases} \Delta = b^2 - ac > 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b \pm \sqrt{\Delta}}{a}, \\ \Delta = b^2 - ac = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{a}, \\ \Delta = b^2 - ac < 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b \pm i\sqrt{\Delta}}{a}. \end{cases}$$

Exemple 2.3. *Pour chacune des EDPs suivantes :*
1. *Déterminer le type,*
2. *Déterminer les courbes caractéristiques,*

1. $y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$
2. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
4. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{2x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Solution.
1.
$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$
Classification :
On a $a = y^2,\ b = 0,\ c = -x^2$ alors
$b^2 - ac = y^2x^2 > 0,$
donc l'équation est hyperbolique.
Courbes caractéristiques :
On a
$y^2 \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = x^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = \dfrac{x^2}{y^2}.$
Alors $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$. et $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$.
Il y a donc deux familles de courbes caractéristiques :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y} \Rightarrow ydy - xdx = 0 \Rightarrow y^2 - x^2 = \lambda_1. \\ \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y} \Rightarrow ydy + xdx = 0 \Rightarrow y^2 + x^2 = \lambda_2. \end{cases}$$

2.
$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$
Classification :
On a $a = x^2,\ b = xy,\ c = y^2$ alors
$b^2 - ac = x^2y^2 - x^2y^2 = 0,$
donc l'équation est parabolique.
Courbes caractéristiques :
On a
$x^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\dfrac{dy}{dx} + y^2 = 0 \Leftrightarrow y^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = x^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = \dfrac{x^2}{y^2}.$
D'où : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}.$
Il y a donc un famille de courbes caractéristiques :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(y) - \ln(x) = c \Rightarrow \frac{y}{x} = \lambda.$$

3.
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$
Classification :
On a $a = 1,\ b = 0,\ c = 1$ alors
$b^2 - ac = -1 < 0,$
donc l'équation est elliptique.
Courbes caractéristiques :
On a
$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = -1.$
D'où : $\dfrac{dy}{dx} = i.$ et $\dfrac{dy}{dx} = -i.$
Il y a donc deux familles de courbes caractéristiques :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = i \Rightarrow dy - idx = 0 \Rightarrow y - ix = \lambda_1. \\ \dfrac{dy}{dx} = -i \Rightarrow dy + idx = 0 \Rightarrow y + ix^2 = \lambda_2. \end{cases}$$

4.
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{2x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$
Classification :
On a $a = 1,\ b = 0,\ c = e^{2x}$ alors
$b^2 - ac = -e^{2x} < 0,$
donc l'équation est elliptique.
Courbes caractéristiques :
On a

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + e^{2x} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -e^{2x}.$$

D'où : $\dfrac{dy}{dx} = ie^x$. et $\dfrac{dy}{dx} = -ie^x$.
Il y a donc deux familles de courbes caractéristiques :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = ie^x \Rightarrow dy - ie^x x = 0 \Rightarrow y - ie^x = \lambda_1. \\ \dfrac{dy}{dx} = -ie^x \Rightarrow dy + ie^x dx = 0 \Rightarrow y + ie^x = \lambda_2. \end{cases}$$

Exemple 2.4. *Pour chacune des EDPs suivantes :*
1. *Déterminer le type,*
2. *Déterminer les courbes caractéristiques,*

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\cos(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \sin^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cos(2x)$.
2. $\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
3. $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.
4. $y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
5. $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 1$

Solution.

1.
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\cos(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \sin^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cos(2x)$.
Classification :
On a $a = 1,\ b = \cos(x),\ c = -\sin^2(x)$ alors
$b^2 - ac = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 > 0$,
donc l'équation est hyperbolique.
Courbes caractéristiques :
On a
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\cos(x)\frac{dy}{dx} - \sin^2(x) = 0.$$
Alors $\dfrac{dy}{dx} = \cos(x) - 1$. et $\dfrac{dy}{dx} = \cos(x) + 1$.
Il y a donc deux familles de courbes caractéristiques :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \cos(x) - 1 \Rightarrow dy = (\cos(x) - 1)dx \Rightarrow y = \sin(x) - x + \lambda_1 \Rightarrow y - \sin(x) + x = \lambda_1. \\ \dfrac{dy}{dx} = \cos(x) - 1 \Rightarrow dy = (\cos(x) + 1)dx \Rightarrow y = \sin(x) + x + \lambda_2 \Rightarrow y - \sin(x) - x = \lambda_2. \end{cases}$$

2.
$\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$
Classification :
On a $a = \frac{y}{x^2},\ b = \frac{1}{x},\ c = \frac{1}{y}$ alors
$b^2 - ac = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 0,$
donc l'équation est parabolique.
Courbes caractéristiques :
On a
$\frac{y}{x^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{y} = 0.$
D'où : $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{y}{x^2}} = \frac{x}{y}.$
Il y a donc un famille de courbes caractéristiques :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow ydy = xdx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + c \Rightarrow y^2 - x^2 = \lambda.$$

3.
$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$
Classification :
On a $a = y^2,\ b = 0,\ c = 1$ alors
$b^2 - ac = -y^2 < 0,$
donc l'équation est elliptique.
Courbes caractéristiques :
On a
$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -1.$
D'où : $\frac{dy}{dx} = -\frac{iy}{y^2} = -\frac{i}{y}.$ et $\frac{dy}{dx} = \frac{i}{y}.$
Il y a donc deux familles de courbes caractéristiques :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -\frac{i}{y} \Rightarrow ydy = -idx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = -ix + C_1 \Rightarrow y^2 + 2ix = \lambda_1. \\ \frac{dy}{dx} = \frac{i}{y} \Rightarrow ydy = idx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = ix + C_2 \Rightarrow y^2 - 2ix = \lambda_2. \end{cases}$$

2.4 Réduction à la forme standard

2.4.1 Changement de variables

2.4.2 Formes standards

Equation hyperbolique

Théorème 2.2. *Soit $\varphi_1(x,y) = \lambda_1$ et $\varphi_2(x,y) = \lambda_2$ les deux familles de courbes caractéristiques d'une équation hyperbolique.*
En posant :

$$\begin{cases} X_1 = \varphi_1(x,y), \\ X_2 = \varphi_2(x,y), \\ u(x,y) = u(X_1, X_2), \end{cases}$$

alors l'équation hyperbolique devient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} = G\left(X_1, X_2, u, \frac{\partial u}{\partial X_1}, \frac{\partial u}{\partial X_2}\right).$$

En posant ensuite :

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 + X_2, \\ Y_2 = X_1 - X_2, \\ u(X_1, X_2) = u(Y_1, Y_2), \end{cases}$$

elle deviendra :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2} = H\left(Y_1, Y_2, u, \frac{\partial u}{\partial Y_1}, \frac{\partial u}{\partial Y_2}\right).$$

Exemple 2.5. *Réduire sous la forme standard l'EDP suivante :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad k \in \mathbb{R}^*. \qquad (E_2)$$

Solution
Classification :
On a $a = 1,\ b = 0,\ c = -k^2$ alors
$b^2 - ac = k^2 > 0, \quad k \in \mathbb{R}^*,$
donc l'équation est hyperbolique.
Courbes caractéristiques :
On a
$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - k^2 = 0.$
D'où : $\frac{dy}{dx} = -k$, et $\frac{dy}{dx} = k$,

Il y a donc deux familles de courbes caractéristiques :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -k \Rightarrow dy = -kdx \Rightarrow y = -kx + \lambda_1 \Rightarrow y + kx = \lambda_1. \\ \dfrac{dy}{dx} = k \Rightarrow dy = kdx \Rightarrow y = kx + \lambda_2 \Rightarrow y - kx = \lambda_2. \end{cases}$$

Alors la courbe caractéristique est :

$$\varphi_1(x,y) = y + kx, \;\; \varphi_2(x,y) = y - kx.$$

Formes standard :
Le Première Forme
En posant :

$$\begin{cases} X_1 = \varphi_1(x,y) = y + kx, \\ X_2 = \varphi_2(x,y) = y - kx, \\ u(x,y) = u(X_1, X_2). \end{cases}$$

On a

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} = k, \;\; \frac{\partial X_1}{\partial y} = 1, \;\; \frac{\partial X_2}{\partial x} = -k, \;\; \frac{\partial X_2}{\partial y} = 1.$$

Par dérivation composée, on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X_1}\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial X_2}\frac{\partial X_2}{\partial x} = k\left(\frac{\partial u}{\partial X_1} - \frac{\partial u}{\partial X_2}\right),$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial X_1}\frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial X_2}\frac{\partial X_2}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial X_1} + \frac{\partial u}{\partial X_2}.$$

Et de même, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = k\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial X_1} - \frac{\partial u}{\partial X_2}\right) = k\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial X_1}\right) - k\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial X_2}\right) \\ &= k\frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{\partial u}{\partial X_1}\right)\frac{\partial X_1}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial X_2}\left(\frac{\partial u}{\partial X_1}\right)\frac{\partial X_2}{\partial x} \\ &\quad -k\frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{\partial u}{\partial X_2}\right)\frac{\partial X_1}{\partial x} - k\frac{\partial}{\partial X_2}\left(\frac{\partial u}{\partial X_2}\right)\frac{\partial X_2}{\partial x} \\ &= k^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} - k^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} - k^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} + k^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2} \\ &= k^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} - 2k^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} + k^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial X_1} + \frac{\partial u}{\partial X_2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial X_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial X_2}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{\partial u}{\partial X_1}\right)\frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial X_2}\left(\frac{\partial u}{\partial X_1}\right)\frac{\partial X_2}{\partial y} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{\partial u}{\partial X_2}\right)\frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial X_2}\left(\frac{\partial u}{\partial X_2}\right)\frac{\partial X_2}{\partial y} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}.,
\end{aligned}$$

En reportant dans l'équation (E_2), on trouve :

$$\begin{aligned}
& k^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} - 2k^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} + k^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2} \\
& -k^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} - 2k^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} - k^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2} \\
& = -4k^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} = 0.
\end{aligned}$$

Donc la forme standard est :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} = 0.$$

Le deuxième Forme

En posant :

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 + X_2, \\ Y_2 = X_1 - X_2, \\ u(X_1, X_2) = u(Y_1, Y_2), \end{cases}$$

On a

$$\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} = 1, \quad \frac{\partial Y_1}{\partial X_2} = 1, \quad \frac{\partial Y_2}{\partial X_1} = 1, \quad \frac{\partial Y_2}{\partial X_2} = -1.$$

Par dérivation composée, on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial X_1} = \frac{\partial u}{\partial Y_1}\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u}{\partial Y_2}\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} = \frac{\partial u}{\partial Y_1} + \frac{\partial u}{\partial Y_2},$$

et

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} &= \frac{\partial}{\partial X_2}\left(\frac{\partial u}{\partial X_1}\right) = \frac{\partial}{\partial X_2}\left(\frac{\partial u}{\partial Y_1} + \frac{\partial u}{\partial Y_2}\right) = \frac{\partial}{\partial X_2}\left(\frac{\partial u}{\partial Y_1}\right) + \frac{\partial}{\partial X_2}\left(\frac{\partial u}{\partial Y_2}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial Y_1}\left(\frac{\partial u}{\partial Y_1}\right)\frac{\partial Y_1}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial Y_2}\left(\frac{\partial u}{\partial Y_1}\right)\frac{\partial Y_2}{\partial X_2} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial Y_1}\left(\frac{\partial u}{\partial Y_2}\right)\frac{\partial Y_1}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial Y_2}\left(\frac{\partial u}{\partial Y_2}\right)\frac{\partial Y_2}{\partial X_2} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y_1 \partial Y_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y_1 \partial Y_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2}.
\end{aligned}
$$

Donc la forme standard est :

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2} = 0.
$$

Equation parabolique

Théorème 2.3. *Soit $\varphi(x,y)=\lambda$ et $\varphi_2(x,y)=\lambda_2$ la famille de courbes caractéristiques d'une équation parabolique.*
Soit $\varphi(x,y)=Y_1$ et Y_2 une fonction indépendante de Y_2. L'équation parabolique devient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2}=G\left(Y_1,Y_2,u,\frac{\partial u}{\partial Y_1},\frac{\partial u}{\partial Y_2}\right). \qquad (P_2)$$

Exemple 2.6. *Réduire sous la forme standard l'EDP suivante :*
$\dfrac{\partial u}{\partial t}-k^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad k\in\mathbb{R}^*.$

Solution
Classification :
On a $a=-k^2,\ b=0,\ c=0$ alors
$b^2-ac=0,$
donc l'équation est parabolique.
Courbes caractéristiques :
On a
$-k^2\left(\dfrac{dt}{dx}\right)=0, \quad k\in\mathbb{R}^*$
D'où : $\dfrac{dt}{dx}=0.$
Il y a donc un famille de courbes caractéristiques :

$$\frac{dt}{dx}=0\Rightarrow dt=0\Rightarrow t=\lambda.$$

Alors la courbe caractéristique est :

$$\varphi(x,t)=t.$$

Forme standard :
En posant :

$$\begin{cases} Y_1=\varphi(x,y)=t,\\ Y_2=x,\\ u(x,y)=u(Y_1,Y_2). \end{cases}$$

On a

$$\frac{\partial Y_1}{\partial t}=1,\quad \frac{\partial Y_1}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial Y_2}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial Y_2}{\partial x}=1,$$

alors

$$J(Y_1,Y_2)=\begin{vmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial t} & \frac{\partial Y_2}{\partial t}\\ \frac{\partial Y_1}{\partial x} & \frac{\partial Y_2}{\partial x}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Par dérivation composée, on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial Y_1}\frac{\partial Y_1}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial Y_2}\frac{\partial Y_2}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial Y_1}.$$

Et de même, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial Y_1}\frac{\partial Y_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial Y_2}\frac{\partial Y_2}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial Y_2},$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial Y_2}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial Y_1}\left(\frac{\partial u}{\partial Y_2}\right)\frac{\partial Y_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial Y_2}\left(\frac{\partial u}{\partial Y_2}\right)\frac{\partial Y_2}{\partial x}\\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2}.\end{aligned}$$

Donc, (P_2) devient

$$\frac{\partial u}{\partial Y_1} - k^2\frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2} = 0,$$

Donc la forme standard est :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2} = \frac{1}{k^2}\frac{\partial u}{\partial Y_1}.$$

Equation elliptique

Théorème 2.4. *Soit* $\varphi_1(x,y) = \lambda_1$ *et* $\varphi_2(x,y) = \lambda_2$ *les deux familles de courbes caractéristiques d'une équation elliptique.*
En posant :

$$\begin{cases} Y_1 + iY_2 = \varphi_1(x,y), \\ Y_1 - iY_2 = \varphi_2(x,y), \\ u(x,y) = u(Y_1,Y_2), \end{cases}$$

alors l'équation elliptique devient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2} = H\left(Y_1, Y_2, u, \frac{\partial u}{\partial Y_1}, \frac{\partial u}{\partial Y_2}\right).$$

Exemple 2.7. *Réduire sous la forme standard l'EDP suivante :*
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

Solution
Classification :
On a $a = a,\ b = 0,\ c = 1$ alors
$b^2 - ac = -1 < 0,$
donc l'équation est elliptique.
Courbes caractéristiques :
On a
$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0.$
D'où : $\dfrac{dy}{dx} = -i$, et $\dfrac{dy}{dx} = i,$
Il y a donc deux familles de courbes caractéristiques :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -i \Rightarrow dy = -idx \Rightarrow y = -ix + \lambda_1 \Rightarrow y + ix = \lambda_1. \\ \dfrac{dy}{dx} = i \Rightarrow dy = idx \Rightarrow y = ix + \lambda_2 \Rightarrow y - ix = \lambda_2. \end{cases}$$

Alors la courbe caractéristique est :

$$\varphi_1(x,t) = y + ix, \ \ \varphi_2(x,t) = y - ix.$$

Forme standard :
En posant :

$$\begin{cases} Y_1 + iY_2 = y + ix \\ Y_1 - iY_2 = y - ix \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y_1 = y, \\ Y_2 = x, \\ u(x,y) = u(Y_1,Y_2). \end{cases}$$

On a
$$\frac{\partial Y_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y_1}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Y_2}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial Y_2}{\partial y} = 0.$$
Par dérivation composée, on obtient :
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial Y_1}\frac{\partial Y_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial Y_2}\frac{\partial Y_2}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial Y_2},$$
et
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial Y_1}\frac{\partial Y_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial Y_2}\frac{\partial Y_2}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial Y_1}.$$
Et de même, on a :
$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial Y_2}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial Y_1}\left(\frac{\partial u}{\partial Y_2}\right)\frac{\partial Y_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial Y_2}\left(\frac{\partial u}{\partial Y_2}\right)\frac{\partial Y_2}{\partial x} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2},
\end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial Y_1}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial Y_1}\left(\frac{\partial u}{\partial Y_1}\right)\frac{\partial Y_1}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial Y_2}\left(\frac{\partial u}{\partial Y_1}\right)\frac{\partial Y_2}{\partial y} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2},
\end{aligned}$$
Donc, (P_2) devient
$$\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2} = 0,$$

2.5 Série de TD

Exercise 01.

Equation Elliptique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Type :

$\Delta = \boldsymbol{b^2} - \boldsymbol{ac} = -x^2 < 0$, donc l'équation est elliptique

Courbes caractéristiques

$$\frac{dy}{dx} = -\boldsymbol{ix} \quad \Rightarrow dy = -\boldsymbol{ixdx} \ \Rightarrow y = -\frac{i}{2}x^{\,2} + c \Longrightarrow 2y + ix^{\,2} = \lambda_1 = \varphi_1.$$

$$\frac{dy}{dx} = \boldsymbol{ix} \quad \Rightarrow dy = \boldsymbol{ixdx} \ \Rightarrow y = \frac{i}{2}x^{\,2} + c \Longrightarrow 2y - ix^{\,2} = \lambda_2 = \varphi_2.$$

Forme standard :

En posant

$$\begin{cases} \boldsymbol{Y_1} + \boldsymbol{iY_2} = 2y + ix^{\,2} \\ \\ \boldsymbol{Y_1} - \boldsymbol{iY_2} = 2y - ix^{\,2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{Y_1} = 2y \\ \\ \boldsymbol{Y_2} = x^{\,2} \end{cases}$$

Par dérivation composée, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \frac{\partial u}{\partial Y_2}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2 \frac{\partial u}{\partial Y_1}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right] = 2\frac{\partial}{\partial y}\left[\underbrace{\frac{\partial u}{\partial Y_1}}_{\mathrm{M}}\right] = 4\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[2x\frac{\partial u}{\partial Y_2}\right] = 2\frac{\partial u}{\partial Y_2} + 2x\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial Y_2}\right] = 2\frac{\partial u}{\partial Y_2} + 4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2}.$$

Donc la forme standard est :

$$4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2} + 4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2} + 2\frac{\partial u}{\partial Y_2} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2} = -\frac{1}{2x^2}\frac{\partial u}{\partial Y_2}.$$

Equation Hyperbolique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial u}{\partial y^2} = 0, \quad y \neq 0.$$

Type :

$\Delta = \boldsymbol{b^2} - \boldsymbol{ac} = \frac{1}{y^2} > 0$, donc l'équation est hyperbolique

Courbes caractéristiques

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y} \Rightarrow ydy = -\boldsymbol{dx} \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = -\boldsymbol{x} + c \Longrightarrow y^2 + 2x = \lambda_1 = \varphi_1.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \Rightarrow ydy = \boldsymbol{dx} \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = \boldsymbol{x} + c \Longrightarrow y^2 - 2x = \lambda_2 = \varphi_2.$$

Forme standard :

Le Première Forme

En posant

$$\begin{cases} \boldsymbol{X_1} = y^2 + 2x \\ \\ \boldsymbol{X_2} = y^2 - 2x \end{cases}$$

Par dérivation composée, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial X_1} - \frac{\partial u}{\partial X_2}\right).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y\left(\frac{\partial u}{\partial X_1} + \frac{\partial u}{\partial X_2}\right).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = 2\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial X_1} - \frac{\partial u}{\partial X_2}\right] = \underbrace{2\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial X_1}\right]}_{\boxed{1}} - \underbrace{2\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial X_2}\right]}_{\boxed{2}}$$

$$\boxed{1} \Leftrightarrow 2\frac{\partial}{\partial x}\left[\underbrace{\frac{\partial u}{\partial X_1}}_{\text{M}}\right] = 4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2}\right)$$

$$\boxed{2} \Leftrightarrow 2\frac{\partial}{\partial x}\left[\underbrace{\frac{\partial u}{\partial X_2}}_{\text{M}}\right] = 4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \boxed{1} - \boxed{2} = 4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}\right) - 8\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right] = 2\frac{\partial}{\partial y}\left[y\left(\frac{\partial u}{\partial X_1} + \frac{\partial u}{\partial X_2}\right)\right] = 2\left(\frac{\partial u}{\partial X_1} + \frac{\partial u}{\partial X_2}\right) + 2y\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial X_1} + \frac{\partial u}{\partial X_2}\right]$$

$$= \underbrace{2\left(\frac{\partial u}{\partial X_1} + \frac{\partial u}{\partial X_2}\right)}_{\boxed{1}} + \underbrace{2y\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial X_1}\right]}_{\boxed{2}} + \underbrace{2y\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial X_2}\right]}_{\boxed{3}}$$

$$\boxed{2} \Leftrightarrow 2y\frac{\partial}{\partial y}\left[\underbrace{\frac{\partial u}{\partial X_1}}_{M}\right] = 2y\left[2y\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} + 2y\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2}\right] = 4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} + 4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2}.$$

$$\boxed{3} \Leftrightarrow 2y\frac{\partial}{\partial y}\left[\underbrace{\frac{\partial u}{\partial X_2}}_{M}\right] = 2y\left[2y\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} + 2y\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}\right] = 4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2} + 4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial X_1} + \frac{\partial u}{\partial X_2}\right) + 4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} + 8y^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} + 4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}$$

Donc la forme standard est :

$$4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}\right) - 8\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} - \frac{1}{y^2}\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial X_1} + \frac{\partial u}{\partial X_2}\right) + 4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} + 8y^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} + 4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}\right]$$

$$= 4\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2} - 8\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} - \frac{2}{y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial X_1} + \frac{\partial u}{\partial X_2}\right) - 4\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2} - 8\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2}$$

$$= -16\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} - \frac{2}{y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial X_1} + \frac{\partial u}{\partial X_2}\right) = 0$$

D’où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} = -\frac{1}{4(X_1 + X_2)}\left(\frac{\partial u}{\partial X_1} + \frac{\partial u}{\partial X_2}\right).$$

Le deuxième Forme

En posant

$$\begin{cases} \boldsymbol{Y_1 = X_1 + X_2} \\ \boldsymbol{Y_2 = X_1 - X_2} \end{cases}$$

Par dérivation composée, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial X_1}=\frac{\partial u}{\partial Y_1}\frac{\partial Y_1}{\partial X_1}+\frac{\partial u}{\partial Y_2}\frac{\partial Y_2}{\partial X_1}=\frac{\partial u}{\partial Y_1}+\frac{\partial u}{\partial Y_2}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial X_2}=\frac{\partial u}{\partial Y_1}\frac{\partial Y_1}{\partial X_2}+\frac{\partial u}{\partial Y_2}\frac{\partial Y_2}{\partial X_2}=\frac{\partial u}{\partial Y_1}-\frac{\partial u}{\partial Y_2}.$$

Et de même, on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X_1\partial X_2}=\frac{\partial}{\partial X_1}\left[\frac{\partial u}{\partial X_2}\right]=\frac{\partial}{\partial X_1}\left[\frac{\partial u}{\partial Y_1}-\frac{\partial u}{\partial Y_2}\right]=\frac{\partial}{\partial X_1}\left[\underbrace{\frac{\partial u}{\partial Y_1}}_{M}\right]-\frac{\partial}{\partial X_1}\left[\underbrace{\frac{\partial u}{\partial Y_2}}_{N}\right]$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1\partial Y_2}-\left[\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1\partial Y_2}+\frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2}\right]=\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2}$$

Donc la forme standard est :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2}=-\frac{1}{2(Y_1+Y_2)}\frac{\partial u}{\partial Y_1}$$

Equation Elliptique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{2x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Type :

$\Delta = \boldsymbol{b^2} - \boldsymbol{ac} = -e^{2x} < 0$, donc l'équation est elliptique

Courbes caractéristiques

$$\frac{dy}{dx} = -\boldsymbol{i}e^{x} \quad \Rightarrow dy = -\boldsymbol{i}e^{x}\boldsymbol{dx} \Rightarrow y = -ie^{x} + c \Longrightarrow y + ie^{x} = \lambda_1 = \varphi_1.$$

$$\frac{dy}{dx} = \boldsymbol{i}e^{x} \quad \Rightarrow dy = \boldsymbol{i}e^{x}\boldsymbol{dx} \Rightarrow y = ie^{x} + c \Longrightarrow y - ie^{x} = \lambda_2 = \varphi_2.$$

Forme standard :

En posant

$$\begin{cases} \boldsymbol{Y_1} + \boldsymbol{iY_2} = y + ie^{x} \\ \boldsymbol{Y_1} - \boldsymbol{iY_2} = y - ie^{x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{Y_1} = y \\ \boldsymbol{Y_2} = e^{x} \end{cases}, \qquad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{Y_1}, \boldsymbol{Y_2})$$

Par dérivation composée, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x}\frac{\partial u}{\partial Y_2}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial Y_1}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\underbrace{\frac{\partial u}{\partial Y_1}}_{M}\right] = \frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{x}\frac{\partial u}{\partial Y_2}\right] = e^{x}\frac{\partial u}{\partial Y_2} + e^{x}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial Y_2}\right] = e^{x}\frac{\partial u}{\partial Y_2} + e^{2x}\frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2}.$$

Donc la forme standard est :

$$e^{2x}\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2} + e^{2x}\frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2} + e^{x}\frac{\partial u}{\partial Y_2} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2} = -e^{-x}\frac{\partial u}{\partial Y_2}.$$

Equation Parabolique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Type :

$\Delta = \boldsymbol{b^2} - \boldsymbol{ac} = 0$, donc l'équation est parabolique

Courbes caractéristiques

$$\frac{dy}{dx} = \mathbf{1} \quad \Rightarrow dy = \boldsymbol{dx} \ \Rightarrow y = \boldsymbol{x} + c \Longrightarrow y - x = \lambda = \varphi_1.$$

Forme standard :

En posant

$$\begin{cases} \boldsymbol{Y_1} = y - x = \varphi_1. \\ \\ \boldsymbol{Y_2} = \boldsymbol{x} = \varphi_2 \end{cases} \qquad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{Y_1}, \boldsymbol{Y_2})$$

On a

$$\frac{\partial Y_1}{\partial x} = -1\,. \qquad \frac{\partial Y_1}{\partial y} = 1. \qquad \frac{\partial Y_2}{\partial x} = 1\,. \qquad \frac{\partial Y_2}{\partial y} = \mathbf{0}.$$

Alors

$$J(\boldsymbol{Y_1}, \boldsymbol{Y_2}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial x} & \frac{\partial Y_2}{\partial x} \\ \frac{\partial Y_1}{\partial y} & \frac{\partial Y_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \mathbf{0} \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Par dérivation composée, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial Y_1}\frac{\partial Y_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial Y_2}\frac{\partial Y_2}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial Y_2} - \frac{\partial u}{\partial Y_1}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial Y_1}\frac{\partial Y_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial Y_2}\frac{\partial Y_2}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial Y_1}\,.$$

Et de même, on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\underbrace{\frac{\partial u}{\partial Y_1}}_{M}\right] = \frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial Y_2} - \frac{\partial u}{\partial Y_1}\right] = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial Y_2}\right]}_{\boxed{1}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial Y_1}\right]}_{\boxed{2}}$$

$$\boxed{1} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left[\underbrace{\frac{\partial u}{\partial Y_2}}_{\mathrm{M}}\right] = \frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y_1 \partial Y_2}.$$

$$\boxed{2} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left[\underbrace{\frac{\partial u}{\partial Y_1}}_{\mathrm{M}}\right] = -\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y_1 \partial Y_2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \boxed{1} - \boxed{2} = \frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1 \partial Y_2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\underbrace{\frac{\partial u}{\partial Y_1}}_{\mathrm{M}}\right] = -\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y_1 \partial Y_2}$$

Donc la forme standard est :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1 \partial Y_2} + 2\left[-\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y_1 \partial Y_2}\right] + \frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2} = 0.$$

La méthode de séparation des variables

Préliminaire

La méthode de séparation des variables ou la méthode de fourie est largement utilisée pour résoudre les problèmes aux limites relatives aux EDPs.

Elle consiste de chercher des solutions particulières de la forme séparable $\mathrm{u(x,y) = X(x)T(y)}$, ou X et Y sont des fonctions de x et y respectivement.

Types des conditions

La condition initiale

$$u(x,0) = f(x), \qquad x \in I.$$

Les conditions aux limites

On distingue déférents types des conditions aux limites

- Conditions de Dirichlet :

$$u(a,t) = u(b,t) = 0.$$

- Conditions de Neumann :

$$u_x(a,t) = u_x(b,t) = 0.$$

- Conditions de Robin ou mixte :

$$C_1(x)u(a,t) + C_2(x)u(b,t) = 0.$$

- Conditions de périodiques :

$$u(a,t) = u(b,t) \text{ et } u_x(a,t) = u_x(b,t).$$

Principe de superposition

Si $u_1, u_2, \dots, u_p$ sont p solution d'une EDP linéaire homogène (E), alors une combinaison linéaire arbitraire

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2\, u_2 + \cdots + \alpha_P\, u_p,$$

est solution du (E).

Résolution de EDO linéaire du premier ordre

Définition

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre (E) sur un intervalle I, une équation qui peut se mettre sous la forme :

$$(E): y' + a(x)y = b(x),$$

où l'inconnue y est une fonction de x dérivable que l'on cherche à déterminer et où a et b sont deux fonctions continue sur un intervalle I.

Résolution de l'équation homogène

Théorème

Soit $a(x)$ une fonction continue sur un intervalle I.
Les solutions de l'équation différentielle homogène : $y' + a(x)y = 0$, sont toutes les fonctions $y :\longmapsto ke^{-A(x)}$, avec A une primitive de a sur I et $k \in \mathbb{R}$.

Résolution de EDO linéaire homogène de second ordre

Équation différentielle linéaire de second ordre

Théorème

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (E) sur un intervalle I, une équation qui peut se mettre sous la forme :

$$(E): ay'' + by' + cy = d(x),$$

où l'inconnue y est une fonction de x dérivable deux fois que l'on cherche à déterminer et où a, b, c sont des réels avec $a \neq 0$ et d' une fonction continue sur un intervalle I.

Résolution de l'équation homogène

Théorème

Soit (E) une équation différentielle linéaire du second ordre homogène de la forme :

$$(E): ay'' + by' + cy = 0$$

On définit **polynôme caractéristique *P*** de l'équation (E) par :

$$P(x) = ax^2 + bx + c.$$

Soit Δ le discriminant du polynôme P.

Les solutions de l'équation (E) dépend du nombre de racines du polynôme P.

- Si $\Delta > 0$, le polynôme P admet deux racines réelles r_1 et r_2, alors les solutions de (E) peuvent se mettre sous la forme :

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Si $\Delta = 0$, le polynôme P admet une racine double r_0, alors les solutions de (E) peuvent se mettre sous la forme :

$$y(x) = c_1 e^{r_0 x} + c_2 x e^{r_0 x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Si $\Delta < 0$, le polynôme P admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = r_0 + iw$ et $r_2 = r_0 - iw$, alors les solutions de (E) peuvent se mettre sous la forme :

$$y(x) = e^{r_0 x}\,[c_1 \cos(wx) + c_2 \sin(wx)], \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1 : Résoudre l'ODE suivante :

$$\mathbf{y''(x) + \lambda y(x) = 0}, \qquad \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}. \qquad \text{(E)}$$

Solution :

L'équation caractéristique associée :

$$\mathbf{r^2 + \lambda = 0}.$$

On a 3 cas :

- Si $\boldsymbol{\lambda < 0}$, Les racines sont $\pm\sqrt{-\lambda}$ et la solution générale de l'EDO (E) est :

$$\boldsymbol{y(x) = a e^{\sqrt{-\lambda}x} + a e^{-\sqrt{-\lambda}x}}, \qquad \boldsymbol{a, b} \in \mathbb{R}.$$

- Si $\boldsymbol{\lambda = 0} \Rightarrow \mathbf{r = 0}$, Est racine double, la solution est donc de la forme :

$$\boldsymbol{y(x) = a + bx}, \qquad \boldsymbol{a, b} \in \mathbb{R}.$$

- **Si** $\boldsymbol{\lambda > 0}$, Les racines sont $\pm i\sqrt{-\lambda}$ et la solution générale de l'EDO (E) est :

$$\boldsymbol{y(x) = a \cos\sqrt{\lambda}x + b \sin\sqrt{\lambda}x}, \qquad \boldsymbol{a, b} \in \mathbb{R}.$$

Problème de Sturm Liouville

$$\begin{cases} \mathbf{y''(x) + \lambda y(x) = 0}, & \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}.. \\ & \mathrm{C.I} \end{cases}$$

Résoudre les problèmes de Sturm-Liouville

Exemple 2 : Résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{y''(x) + \lambda y(x) = 0}, & \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in]\mathbf{0}, \boldsymbol{\ell}[. \\ \boldsymbol{y(0) = y(\ell) = 0}. & \quad (\mathrm{C}) \end{cases}$$

Solution : D'âpre Exemple 1, on a

- Si $\boldsymbol{\lambda < 0 \Longrightarrow y(x) = ae^{\sqrt{-\lambda}x} + ae^{-\sqrt{-\lambda}x}}$

  La condition (C) implique que

  $$\boldsymbol{y(0) = a + b = 0}$$

  $$\boldsymbol{y(\ell) = ae^{\sqrt{-\lambda}\ell} + be^{-\sqrt{-\lambda}\ell} = 0}$$

  On trouve $a = b = 0$, ce qui implique $y \equiv 0$.

- Si $\boldsymbol{\lambda = 0 \Longrightarrow y(x) = a + bx}$

  La condition (C) implique que $a = b = 0$, et $y \equiv 0$.

- Si $\boldsymbol{\lambda > 0 \Longrightarrow} \mathbf{y(x)} = \boldsymbol{a \cos\sqrt{\lambda}x + b \sin\sqrt{\lambda}x}$

  La condition (C) implique que

  $$\mathbf{y(0)} = \boldsymbol{a \cos\sqrt{\lambda}0 + b \sin\sqrt{\lambda}0 = 0 \Rightarrow a = 0}.$$

  $$\mathbf{y}(\boldsymbol{\ell}) = \boldsymbol{b \sin\sqrt{\lambda}\ell = 0 \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}\ell = 0 \Longrightarrow \sqrt{\lambda}\ell = n\pi}, \quad \boldsymbol{n \geq 1}.$$

  D'où, λ est une valeur propre si et seulement si

  $$\boldsymbol{\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2},$$

  Et dans ce cas-là, les fonctions propres du problème

  $$y(x) = y_n(x) = \sin\left(\boldsymbol{\frac{n\pi}{\ell}x}\right), \quad \boldsymbol{n \geq 1}.$$

Séries de Fourier

Définition : On dira qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est périodique de période $T > 0$ si

$$f(x+T) = f(x).$$

Définition : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction périodique de période T. Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^T f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx.$$

Définition : Soit f une fonction périodique de période T. On appelle série de fourrier associées à la fonction f, la série trigonométrique

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)].$$

Avec $x \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$, où les coefficients sont donnés par :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,dx. \quad a_n = \frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\cos(n\omega x)\,dx. \quad b_n = \frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\sin(n\omega x)\,dx.$$

Remarque. La série trigonométrique est périodique de période $T = \frac{2\pi}{n\omega}$.

Principe de la méthode de Séparation des Variables

- On pose $u(x,t\ ) = \mathrm{X(x)T(t)}$, avec X et T sont respectivement des fonctions de x et t et au moins de classe C^2.
- On résout l'équation en $\mathrm{X(x)}$ avec des conditions aux limites correspondantes.
- On résout l'équation en $\mathrm{T(t)}$.
- On écrit la solution générale de l'équation sous la forme

$$u(x,t\ ) = \mathrm{X(x)T(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t),$$

Et on applique les conditions initiales.

L'équation de la chaleur

L'équation de la chaleur en une dimension est donnée par l'edp suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

où $c > 0$ est une constante positive donnée, , u est une fonction inconnue réelle de deux variables x et t.

<u>Exemple</u> : Résoudre par séparation des variables le problème suivant :

$$\begin{cases} u_x - cu_{tt} = 0, & 0 < x < \ell, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < \ell, \end{cases}$$

<u>Solution</u> :

1. On cherche la solution $u(x,t)$ sous la forme : $u(x,t) = \mathrm{X(x)T(t)}$.

Alors l'équation devient

$$X(x)T'(t) - \boldsymbol{c}X''(x)T(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow X(x)T'(t) = \boldsymbol{c}T(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{T'(t)}{cT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

D'autre part, on a

$u(0,t) = 0 \Rightarrow \mathrm{X(0)T(t)} = 0 \Rightarrow \mathrm{X(0)} = 0$.

$u(\ell,t) = 0 \Rightarrow \mathrm{X}(\ell)\mathrm{T(t)} = 0 \Rightarrow \mathrm{X}(\ell) = 0.$

D'où, on obtient

$$\begin{cases} X''(x) = -\lambda X(x) \\ \mathrm{X}(0) = \mathrm{X}(\ell) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \{T'(t) = -c\lambda T(t).$$

2. On résout l'équation en X(x) avec des conditions correspondantes

$$\begin{cases} X''(x) = -\lambda X(x), \\ \mathrm{X}(0) = \mathrm{X}(\ell) = 0. \end{cases}$$

D'après **l'exemple 1**, on a

- Si $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0} \Longrightarrow X \equiv 0.$
- Si $\boldsymbol{\lambda} < \boldsymbol{0} \Longrightarrow X \equiv 0.$
- Si $\boldsymbol{\lambda} > \boldsymbol{0} \Longrightarrow X \equiv 0$, la solution est de la forme

$$X(x) = X_n(x) = \sin(\sqrt{\boldsymbol{\lambda}_n}\boldsymbol{x}) = \sin\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{x}\right), \quad \boldsymbol{n} \geq \mathbf{1}..$$

3. On résout l'équation en $\mathrm{T(t)}$.

$$T'(t) = -c\lambda T(t).$$

L'équation en $\mathrm{T(t)}$ est une EDO linéaire du 1^{er} ordre à coefficients constants, alors Les solutions sont donc de la forme

$$T(t) = Be^{-c\lambda t} \Longrightarrow T_n(t) = B_n e^{-c\lambda_n t} = B_n e^{-c\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\right)^2 t}.$$

4. On déduit que la solution générale de **l'équation de la chaleur** sous la forme

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \sin\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{x}\right) B_n e^{-c\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\right)^2 t},$$

et

$$u(x,t\,) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{x}\right) B_n e^{-c\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\right)^2 t}.$$

On utilise la condition initiale

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{x}\right) B_n\,.$$

Cette dernière série de fonctions n'est autre que la série de Fourier *impaire* de la donnée initiale

$$B_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{x}\right)dx, \quad \boldsymbol{n \geq 1}.$$

Exemple Appliquons la méthode de séparation des variables pour trouver la solution du problème

$$\begin{cases} u_x - 3u_{tt} = 0, \ \ 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(\,1,t) = 0, \qquad\qquad t > 0, \\ \quad u(x,0) = x, \qquad\qquad 0 < x < 1. \end{cases}$$

Solution : la solution générale de l'équation sous la forme

$$u(x,t\,) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\boldsymbol{n\pi x}) B_n e^{-3(\boldsymbol{n\pi})^2 t}.$$

Calculer la coefficient B_n. On a

$$B_n = 2\int_0^1 x\sin(\boldsymbol{n\pi x})dx = -\frac{2}{n\pi}xcos(\boldsymbol{n\pi x})\Big|_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} + \frac{2}{n\pi}\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} cos(\boldsymbol{n\pi x})\boldsymbol{dx}$$

$$= -\frac{2}{n\pi}cos(\boldsymbol{n\pi}) + \frac{2}{n\pi}\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} cos(\boldsymbol{n\pi x})\boldsymbol{dx}$$

$$= -\frac{2}{n\pi}cos(\boldsymbol{n\pi}) + \frac{2}{(n\pi)^2}sin(\boldsymbol{n\pi x})\Big|_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}$$

$$= -\frac{2}{n\pi}cos(\boldsymbol{n\pi}) + \frac{2}{(n\pi)^2}sin(\boldsymbol{n\pi}) = -\frac{2(-1)^n}{n\pi}$$

Alors, la solution du problème est

$$u(x,t\ ) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\boldsymbol{n\pi x})\frac{2(-1)^n}{n\pi}e^{-3(\boldsymbol{n\pi})^2 t}.$$

<u>Exemple</u> Appliquons la méthode de séparation des variables pour trouver la solution du problème

$$\begin{cases} u_x - u_{tt} = 0, \ \ 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(\,1,t) = 0, \qquad\qquad t > 0, \\ u(x,0) = -e^x, \qquad\qquad 0 < x < 1. \end{cases}$$

<u>Solution :</u> la solution générale de l'équation sous la forme

$$u(x,t\ ) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\boldsymbol{n\pi x})B_n e^{-3(\boldsymbol{n\pi})^2 t}.$$

Calculer la coefficient B_n. On a

$$B_n = 2\int_0^1 -e^x\sin(\boldsymbol{n\pi x})dx = \frac{2n((-1)^n e - 1)}{\pi n^2 + 1}$$

Alors, la solution du problème est

$$u(x,t\ ) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\boldsymbol{n\pi x})\frac{2n((-1)^n e - 1)}{\pi n^2 + 1}e^{-c(\boldsymbol{n\pi})^2 t}.$$

Résoudre les problèmes de Sturm-Liouville

Exemple 3 : Résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{y''(x) + \lambda y(x) = 0}, & \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}, \qquad \mathbf{x} \in]\mathbf{0}, \boldsymbol{\ell}[. \\ \boldsymbol{y(0) = y'(\ell) = 0}. & \qquad\qquad (\mathrm{C}) \end{cases}$$

Solution : D'âpre Exemple 1, on a

- Si $\boldsymbol{\lambda < 0 \Longrightarrow y(x) = ae^{\sqrt{-\lambda}x} + ae^{-\sqrt{-\lambda}x}}$. $\boldsymbol{y'(x) = a\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}x} - b\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}x}}$.
  La condition (C) implique que

$$\boldsymbol{y(0) = a + b = 0}$$

$$\boldsymbol{y(\ell) = a\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}\ell} - b\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}\ell} = 0}$$

  On trouve $a = b = 0$, ce qui implique $y \equiv 0$.

- Si $\boldsymbol{\lambda = 0 \Longrightarrow y(x) = a + bx}$. $\boldsymbol{y'(x) = b}$.

  La condition (C) implique que $a = b = 0$, et $y \equiv 0$.

- Si $\boldsymbol{\lambda > 0 \Longrightarrow y(x) = a\ \cos\sqrt{\lambda}x\ + b\sin\sqrt{\lambda}x}$.

$$\boldsymbol{y'(x) = -a\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x\ + b\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x}.$$

  La condition (C) implique que

$$\boldsymbol{y(0) = 0 \Rightarrow a = 0}.$$

$$\boldsymbol{y(\ell) = b\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x = 0 \Rightarrow \cos\sqrt{\lambda}\ell = 0 \Longrightarrow \sqrt{\lambda}\ell = n\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\ell}}.$$

D'où, λ est une valeur propre si et seulement si

$$\boldsymbol{\lambda = \lambda_n = \left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\ell}\right)^2 = \left(\left(\frac{2n+1}{2}\right)\frac{\pi}{\ell}\right)^2, \quad n \geq 0}.$$

Et dans ce cas-là, les fonctions propres du problème

$$y(x) = y_n(x) = \sin\left(\left(\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{x}\right).$$

Exemple : Résoudre par séparation des variables le problème suivant :

$$\begin{cases} u_x - cu_{tt} = 0, & 0 < x < \ell, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u_x(\ell,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < \ell, \end{cases}$$

Solution :

1. On cherche la solution $u(x,t)$ sous la forme : $u(x,t) = \mathrm{X(x)T(t)}$.

Alors l'équation devient

$$X(x)T'(t) - \boldsymbol{c}X''(x)T(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow X(x)T'(t) = \boldsymbol{c}T(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{T'(t)}{cT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

D'autre part, on a

$u(0,t) = 0 \Rightarrow \mathrm{X(0)T(t)} = 0 \Rightarrow \mathrm{X(0)} = 0$.

$u_x(\ell,t) = 0 \Rightarrow \mathrm{X'(\ell)T(t)} = 0 \Rightarrow \mathrm{X'(\ell)} = 0.$

D'où, on obtient

$$\begin{cases} X''(x) = -\lambda X(x) \\ \mathrm{X(0)} = \mathrm{X'(\ell)} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \{T'(t) = -c\lambda T(t).$$

2. On résout l'équation en $\mathrm{X(x)}$ avec des conditions correspondantes

$$\begin{cases} X''(x) = -\lambda X(x), \\ \mathrm{X(0)} = \mathrm{X'(\ell)} = 0. \end{cases}$$

D'après **l'exemple 3**, on a

- Si $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \Longrightarrow X \equiv 0.$
- Si $\boldsymbol{\lambda} < \mathbf{0} \Longrightarrow X \equiv 0.$
- Si $\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0} \Longrightarrow X \equiv 0$, la solution est de la forme

$$X(x) = X_n(x) = \sin\left(\left(\frac{\boldsymbol{2n+1}}{\mathbf{2}}\right)\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{x}\right).$$

3. On résout l'équation en $\mathrm{T(t)}$.

$$T'(t) = -c\lambda T(t).$$

L'équation en $\mathrm{T(t)}$ est une EDO linéaire du 1^{er} ordre à coefficients constants, alors Les solutions sont donc de la forme

$$T(t) = Be^{-c\lambda t} \Longrightarrow T_n(t) = B_n e^{-c\lambda_n t} = B_n e^{-c\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\right)^2 t}.$$

4. On déduit que la solution générale de **l'équation de la chaleur** sous la forme

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \sin\left(\left(\frac{\mathbf{2n+1}}{\mathbf{2}}\right)\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{x}\right) B_n e^{-c\left(\left(\frac{\mathbf{2n+1}}{\mathbf{2}}\right)\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\right)^2 t},$$

et

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\left(\frac{\mathbf{2n+1}}{\mathbf{2}}\right)\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{x}\right) B_n e^{-c\left(\left(\frac{\mathbf{2n+1}}{\mathbf{2}}\right)\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\right)^2 t}.$$

On utilise la condition initiale

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\left(\frac{\mathbf{2n+1}}{\mathbf{2}}\right)\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{x}\right) B_n .$$

Cette dernière série de fonctions n'est autre que la série de Fourier *impaire* de la donnée initiale

$$B_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\left(\left(\frac{\mathbf{2n+1}}{\mathbf{2}}\right)\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{x}\right)dx.$$

Exemple Appliquons la méthode de séparation des variables pour trouver la solution du problème

$$\begin{cases} u_x - u_{tt} = 0, \;\; 0 < x < \pi, \;\; t > 0, \\ u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \qquad t > 0, \\ u(x,0) = -\cos\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{2}\right), \qquad 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Solution : la solution générale de l'équation sous la forme

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\left(\frac{\mathbf{2n+1}}{\mathbf{2}}\right)\boldsymbol{x}\right) B_n e^{-\left(\left(\frac{\mathbf{2n+1}}{\mathbf{2}}\right)\right)^2 t}.$$

Calculer la coefficient B_n. On a

$$u(x,0) = f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\left(\frac{\mathbf{2n+1}}{\mathbf{2}}\right)\boldsymbol{x}\right) B_n .$$

D'autre part

$$-\cos\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3}{2}x\right)$$

Alors

$$\sin\left(\frac{3}{2}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\left(\boldsymbol{\frac{2n+1}{2}}\right)\boldsymbol{x}\right) B_n = \sin\left(\frac{3}{2}x\right) B_1 + \sin\left(\frac{5}{2}x\right) B_2 + \sin\left(\frac{7}{2}x\right) B_3 + \cdots$$

On déduit

$$B_1 = 1. \qquad B_n = 0,\;\; n \geq 2.$$

Alors, la solution du problème est

$$u(x,t\,) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sin\left(\frac{3}{2}x\right) e^{-\left(\boldsymbol{\frac{3}{2}}\right)^{\boldsymbol{2}} t}.$$

L'équation de Laplace

Généralité

L'équation de Laplace s'écrit sous la forme :

$$\Delta(x,y) = (x,y),$$

Où Δ désigne l'opérateur aux dérivées partielles $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ appelé Laplacien, et f est une fonction continue donnée.

Exemple Résoudre par séparation des variables le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \ \ 0 < x < \ell, \quad 0 < y < s, \\ u(0,y) = u(\ell,y) = 0, \qquad 0 < y < s, \\ u(x,0) = f(x), \ \ u(x,s) = g(x), \ \ 0 < x < \ell. \end{cases}$$

Solution :

1. On cherche la solution $u(x,t)$ sous la forme : $u(x,y) = \mathrm{X(x)Y(t)}$.

Alors l'équation devient

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

$$\Leftrightarrow X''(x)Y(y) = -X(x)Y''(y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda.$$

D'autre part, on a

$u(0,t) = 0 \Rightarrow \mathrm{X}(0)\mathrm{Y(y)} = 0 \Rightarrow \mathrm{X}(0) = 0$.

$u(\ell,t) = 0 \Rightarrow \mathrm{X}(\ell)\mathrm{Y(y)} = 0 \Rightarrow \mathrm{X}(\ell) = 0.$

D'où, on obtient

$$\begin{cases} X''(x) = -\lambda X(x) \\ \mathrm{X}(0) = \mathrm{X}(\ell) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \{Y''(y) = \lambda Y(y).$$

2. On résout l'équation en X(x) avec des conditions correspondantes

$$\begin{cases} X''(x) = -\lambda X(x), \\ \mathrm{X}(0) = \mathrm{X}(\ell) = 0. \end{cases}$$

D'après **l'exemple 2**, on a

$$X(x) = X_n(x) = \sin\left(\sqrt{\boldsymbol{\lambda_n}}\boldsymbol{x}\right) = \sin\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{x}\right), \quad \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda_n} = \left(\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\right)^2 > \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{n} \geq \mathbf{1}.$$

3. On résout l'équation en Y(x).

Pour $\lambda = \boldsymbol{\lambda_n}$, on trouve

$$Y(y) = \mathrm{k}e^{\sqrt{\lambda}y} + ce^{-\sqrt{\lambda}y} \Longrightarrow Y_n(y) = \mathrm{k}_n e^{\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}y} + \mathrm{c}_n e^{-\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}y}.$$

4. On déduit que la solution générale de **l'équation de la Laplace** sous la forme

$$u_n(x,t) = X_n(x)Y_n(y) = \sin\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{x}\right)\left[\mathrm{k}_n e^{\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}y} + \mathrm{c}_n e^{-\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}y}\right],$$

Et

$$u(x,t\,) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{x}\right)\left[\mathrm{k}_n e^{\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}y} + \mathrm{c}_n e^{-\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}y}\right].$$

On utilise la condition initiale

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{x}\right)[\mathrm{k}_n + \mathrm{c}_n]\,.$$

$$u(x,s) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{x}\right)\left[\mathrm{k}_n e^{\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{s}} + \mathrm{c}_n e^{-\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{s}}\right].$$

On a

$$\mathrm{k}_n = \frac{\beta_n - \alpha_n e^{-\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}s}}{2\sinh e^{\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}s}}$$

$$\mathrm{c}_n = \frac{\alpha_n e^{\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}s} - \beta_n}{2\sinh e^{\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}s}}$$

Où

$$\alpha_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{x}\right)dx.$$

$$\beta_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} g(x)\sin\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{x}\right)dx.$$

Exemple Résoudre par séparation des variables le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\ u(0, y) = u(1, y) = 0, \quad 0 < y < 1, \\ u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1\,, \\ u(x, 1) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{2}\sin(x)\,, \quad 0 < x < 1\,, \end{cases}$$

Solution :

1. On cherche la solution $u(x, t\,)$ sous la forme : $u(x, y\,) = \mathrm{X(x)Y(t)}$.

Alors l'équation devient

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

$$\Leftrightarrow X''(x)Y(y) = -X(x)Y''(y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda.$$

D'autre part, on a

$u(0, y) = 0 \Rightarrow \mathrm{X(0)Y(y)} = 0 \Rightarrow \mathrm{X(0)} = 0\,.$

$u(1, y) = 0 \Rightarrow \mathrm{X(1)Y(y)} = 0 \Rightarrow \mathrm{X(1)} = 0.$

$u(x, 0) = 0 \Rightarrow \mathrm{X(x)Y(0)} = 0 \Rightarrow \mathrm{Y(0)} = 0\,.$

D'où, on obtient

$$\begin{cases} X''(x) = -\lambda X(x) \\ \mathrm{X(0)} = \mathrm{X(1)} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Y''(y) = \lambda Y(y), \\ \mathrm{Y(0)} = 0. \end{cases}$$

2. On résout l'équation en X(x) avec des conditions correspondantes

$$\begin{cases} X''(x) = -\lambda X(x), \\ \mathrm{X(0)} = \mathrm{X(1)} = 0. \end{cases}$$

D'après **l'exemple 2**, on a

$$X(x) = X_n(x) = \sin\left(\sqrt{\boldsymbol{\lambda_n}}\boldsymbol{x}\right) = \sin(\boldsymbol{n\pi x}), \quad \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda_n} = (\boldsymbol{n\pi})^2 > \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{n} \geq \mathbf{1}\,.$$

3. On résout l'équation en Y(x).

$$Y(y) = \mathrm{k}e^{\sqrt{\lambda}y} + \mathrm{c}e^{-\sqrt{\lambda}y},$$

$$Y(0) = \mathrm{k} + \mathrm{c} = 0 \Longrightarrow \mathrm{c} = -\mathrm{k},$$

Alors, pour $\lambda = \boldsymbol{\lambda_n} = (\boldsymbol{n\pi})^{\mathbf{2}}$**,** on a

$$Y(y) = Y_n(y) = \mathrm{k}_n e^{\boldsymbol{n\pi y}} - \mathrm{k}_n e^{-\boldsymbol{n\pi y}} = \mathrm{k}_n \sinh(\boldsymbol{n\pi} y).$$

4. On déduit que la solution générale de **l'équation de la Laplace** sous la forme

$$u_n(x,t) = X_n(x)Y_n(y) = \sin(\boldsymbol{n\pi x})\,\mathrm{k}_n \sinh(\boldsymbol{n\pi} y)\,, \qquad \boldsymbol{n \geq 1}.$$

Et

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\boldsymbol{n\pi x})\,\mathrm{k}_n \sinh(\boldsymbol{n\pi} y).$$

On utilise la condition initiale

$$u(x,1) = \cos\left(2x\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{2}\sin(\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\boldsymbol{n\pi x})\,\mathrm{k}_n \sinh(\boldsymbol{n\pi})\,.$$

On a,

$$\cos\left(2x\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{2}\sin(\pi x) = \sqrt{2}\sin(\pi x) - \sin(2\pi x)$$

$$= \sin(\boldsymbol{\pi x})\mathrm{k}_1 \sinh(\boldsymbol{\pi}) + \sin(\boldsymbol{2\pi x})\mathrm{k}_2 \sinh(\boldsymbol{2\pi}) + \sum_{n\geq 3}^{\infty} \sin(\boldsymbol{n\pi x})\,\mathrm{k}_n \sinh(\boldsymbol{n\pi})\,.$$

On déduit

$$k_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sinh(\boldsymbol{n\pi})}. \qquad k_2 = -\frac{1}{\sinh(\boldsymbol{2\pi})}, \qquad \mathrm{k}_n = 0, \;\; n \geq 3.$$

Alors, la solution du problème est

$$u(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{\sinh(\boldsymbol{n\pi})}\sin(\boldsymbol{\pi x})\sinh(\boldsymbol{\pi y}) - \frac{1}{\sinh(\boldsymbol{2\pi})}\sin(\boldsymbol{2\pi x})\sinh(\boldsymbol{2\pi y}).$$

Exemple Résoudre par séparation des variables le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & -\pi < x, y < \pi, \\ u(-\pi, y) = u(\pi, y), & -\pi < y < \pi, \\ u_x(-\pi, y) = u_x(\pi, y), & -\pi < y < \pi, \\ u(x, -\pi) = 0, & -\pi < x < \pi, \\ u(x, \pi) = 1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right), & -\pi < x < \pi, \end{cases}$$

Solution :

1. On cherche la solution $u(x, y)$ sous la forme : $u(x, y) = \mathrm{X(x)Y(t)}$.

Alors l'équation devient

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

$$\Leftrightarrow X''(x)Y(y) = -X(x)Y''(y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda.$$

D'autre part, on a

$u(-\pi, y) = u(\pi, y) \Rightarrow \mathrm{X}(-\pi)\mathrm{Y(y)} = \mathrm{X}(\pi)\mathrm{Y(y)} \Rightarrow \mathrm{X}(-\pi) = \mathrm{X}(\pi)$.

$u_x(-\pi, y) = u_x(\pi, y) \Rightarrow \mathrm{X}'(-\pi)\mathrm{Y(y)} = \mathrm{X}'(\pi)\mathrm{Y(y)} \Rightarrow \mathrm{X}'(-\pi) = \mathrm{X}'(\pi)$.

$u(x, -\pi) = 0 \Rightarrow \mathrm{X}(x)\mathrm{Y}(-\pi) = 0 \Longrightarrow \mathrm{Y}(-\pi) = 0.$

D'où, on obtient

$$\begin{cases} X''(x) = -\lambda X(x), \\ \mathrm{X}(-\pi) = \mathrm{X}(\pi), \\ \mathrm{X}'(-\pi) = \mathrm{X}'(\pi) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Y''(y) = \lambda Y(y), \\ \mathrm{Y}(-\pi) = 0. \end{cases}$$

2. On résout l'équation en X(x) avec des conditions correspondantes

$$\begin{cases} X''(x) = -\lambda X(x), \\ \mathrm{X}(-\pi) = \mathrm{X}(\pi), \\ \mathrm{X}'(-\pi) = \mathrm{X}'(\pi). \end{cases}$$

D'après **l'exemple 1**, on a

- Si $\boldsymbol{\lambda} < \mathbf{0} \Longrightarrow X \equiv 0.$
- Si $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \Longrightarrow X = a \Longrightarrow X_0(x) = \alpha_0.$
- Si $\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0} \Longrightarrow X(x) = X_n(x) = \alpha_n \cos\left(\sqrt{\boldsymbol{\lambda}_n} \boldsymbol{x}\right) + \beta_n \sin\left(\sqrt{\boldsymbol{\lambda}_n} \boldsymbol{x}\right), \ \ \boldsymbol{\lambda}_n = \boldsymbol{n}^2 \ , \ \boldsymbol{n} \geq \mathbf{0}.$

3. On résout l'équation en Y(x).

$$\begin{cases} Y''(y) = \lambda Y(y), \\ \mathrm{Y}(-\pi) = 0. \end{cases}$$

D'après **l'exemple 1**, on a

- Si $\boldsymbol{\lambda} < \mathbf{0} \Rightarrow Y \equiv 0.$
- Si $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \Rightarrow Y_0(y) = c_0(y+\pi).$
- Si $\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0} \Rightarrow Y_n(x) = c_n \sinh[n(y+\pi)]$, $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{0}$.

Pour $\lambda = \boldsymbol{\lambda_n} = \boldsymbol{n^2}$**,** on trouve

4. On déduit que la solution générale de **l'équation de la Laplace** sous la forme

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) \\ &= a_0(y+\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\boldsymbol{nx}) + b_n \sin(\boldsymbol{nx})] \sinh[n(y+\pi)]. \end{aligned}$$

On utilise la condition initiale

$$u(x,\pi) = 2a_0\pi + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\boldsymbol{nx}) + b_n \sin(\boldsymbol{nx})] \sinh[2n\pi] = 1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

On a,

$$\begin{aligned} 1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) \\ &= 2a_0\pi + [a_1 \cos(\boldsymbol{x}) + b_1 \sin(\boldsymbol{x})] \sinh[2\pi] \\ &\quad + \sum_{n\geq 2}^{\infty} [a_n \cos(\boldsymbol{nx}) + b_n \sin(\boldsymbol{nx})] \sinh[2n\pi] . \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_0\pi = 1 \\ a_1 \sinh[2\pi] = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ b_1 \sinh[2\pi] = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ a_n \sinh[2n\pi] = b_n \sinh[2n\pi] = 0, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

On déduit

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}, \quad a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2\sinh(\boldsymbol{2\pi})}, \quad \mathrm{b}_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2\sinh(\boldsymbol{2\pi})}, \quad a_n = b_n = 0, \quad n \geq 2.$$

Alors, la solution du problème est

$$u(x, y\,) = \frac{1}{2\pi}(y + \pi) + \frac{\sqrt{2}}{2}[\cos(\boldsymbol{nx}) - \sin(\boldsymbol{nx})]\frac{\sinh[n(y + \pi)]}{\sinh(\boldsymbol{2\pi})}$$

L'équation de ondes

Généralité

La résolution de l'équation des ondes par séparation de variables se fait comme pour l'équation de la chaleur.

Exemple Résoudre par séparation des variables le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \mathrm{k}^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \ell, & t > 0, \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), & 0 < x < \ell. \end{cases}$$

Solution :

1. On cherche la solution $u(x,t)$ sous la forme : $u(x,t) = \mathrm{X(x)T(t)}$.

Alors l'équation devient

$$X(x)T''(t) - \mathrm{k}^2\mathrm{T(t)}X''(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow X(x)T''(t) = \mathrm{k}^2\mathrm{T(t)}X''(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{k}^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

D'autre part, on a

$u(0,t) = 0 \Rightarrow \mathrm{X}(0)\mathrm{T(t)} = 0 \Rightarrow \mathrm{X}(0) = 0$.

$u(\ell,t) = 0 \Rightarrow \mathrm{X}(\ell)\mathrm{T(t)} = 0 \Rightarrow \mathrm{X}(\ell) = 0.$

D'où, on obtient

$$\begin{cases} X''(x) = -\lambda X(x) \\ \mathrm{X}(0) = \mathrm{X}(\ell) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \{T''(t) = -\lambda \mathrm{k}^2\mathrm{T(t)}.$$

2. On résout l'équation en X(x) avec des conditions correspondantes

$$\begin{cases} X''(x) = -\lambda X(x), \\ \mathrm{X}(0) = \mathrm{X}(\ell) = 0. \end{cases}$$

D'après **l'exemple 2**, on a

$$X(x) = X_n(x) = \sin\left(\sqrt{\boldsymbol{\lambda_n}}\boldsymbol{x}\right) = \sin\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{x}\right), \quad \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda_n} = \left(\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\right)^{\mathbf{2}} > \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{n} \geq \mathbf{1}.$$

3. On résout l'équation en T(t).

$\{T''(t) + \lambda \mathrm{k}^2\mathrm{T(t)} = 0$, pour $\lambda = \boldsymbol{\lambda_n}$.

D'après **l'exemple 2**, on a

$$T_n(\mathrm{t}) = \boldsymbol{a_n}\ \mathbf{cos}\sqrt{\boldsymbol{\lambda_n}}\mathbf{k}\boldsymbol{t}\ + \boldsymbol{b_n}\,\mathbf{sin}\sqrt{\boldsymbol{\lambda_n}}\mathbf{k}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{a_n}\ \mathbf{cos}\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}\mathbf{k}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{t}\right)\ + \boldsymbol{b_n}\,\mathbf{sin}\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}\mathbf{k}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{t}\right).$$

4. On déduit que la solution générale de **l'équation de la Laplace** sous la forme

$$u_n(x,t) = X_n(x)Y_n(y) = \sin\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{x}\right)\left[\boldsymbol{a_n}\ \mathbf{cos}\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}\mathbf{k}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{t}\right)\ + \boldsymbol{b_n}\,\mathbf{sin}\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}\mathbf{k}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{t}\right)\right],$$

Et

$$u(x,t\ ) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{x}\right)\left[\boldsymbol{a_n}\ \mathbf{cos}\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}\mathbf{k}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{t}\right)\ + \boldsymbol{b_n}\,\mathbf{sin}\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}\mathbf{k}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{t}\right)\right].$$

On utilise la condition initiale

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{a_n}\sin\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{x}\right).$$

On a

$$u_t(x,t\ ) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{x}\right)\left[-\frac{\boldsymbol{n\pi}\mathbf{k}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{a_n}\ \mathbf{sin}\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}\mathbf{k}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{t}\right)\ + \frac{\boldsymbol{n\pi}\mathbf{k}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{b_n}\,\mathbf{cos}\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}\mathbf{k}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{t}\right)\right].$$

Alors

$$u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{b_n}\frac{\boldsymbol{n\pi}\mathbf{k}}{\boldsymbol{\ell}}\sin\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{x}\right).$$

Où

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{x}\right)dx.$$

$$\boldsymbol{b_n} = \frac{2}{\boldsymbol{n\pi}\mathbf{k}}\int_0^{\ell} g(x)\sin\left(\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{x}\right)dx.$$

Exemple Appliquons la méthode de séparation des variables pour trouver la solution du problème

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \ \ 0 < x < 1, & t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = x, \ \ u_t(x,0) = 0, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Solution :

On a

k $= \ell = 1, \ f(x) = x, \quad g(x) = 0.$

Alors, la solution générale de l'équation sous la forme

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\boldsymbol{n\pi x})[\boldsymbol{a_n} \ \mathbf{cos}(\boldsymbol{n\pi t}) \ + \boldsymbol{b_n} \, \mathbf{sin}(\boldsymbol{n\pi t})].$$

Calculer la coefficient a_n et b_n . On a

$$a_n = 2\int_0^1 x \sin(\boldsymbol{n\pi x}) dx = -\frac{(-1)^n}{n\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

$$b_n = 0$$

Alors, la solution du problème est

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin(\boldsymbol{n\pi x}) \, \mathbf{cos}(\boldsymbol{n\pi t}).$$