Réduction des endomorphismes
Cours avec exercices
(Cours d'Algèbre 3)

Hanifa Zekraoui

23 septembre 2024

Table des matières

1 Quelques préliminaires pour la diagonalisation des endomorphismes 9

Introduction 9
Somme directe des sous espaces vectoriels 9
Applications linéaires et matrices associées 10
Série des exercices 12

2 Sous espaces vectoriels invariants par un endomorphisme 15

Introduction 15
Sous espaces vectoriels invariants 16
Représentation matricielle 16
Sous espaces cycliques 17

Sous espaces caractéristiques 18
Le lemme des noyaux 19
Série des exercices 21

3 Valeurs propres et vecteurs propres 23

Introduction 23
Vecteurs propres et sous espaces stables 23
Propriétés 24
Polynôme caractéristique 25
Coefficients du polynôme caractéristique 26
Théorème de Cayley -Hamilton 26
Polynôme minimal 27
Série des exercices 29

4 Les formes canoniques 33

Introduction 33
La forme rationnelle (Forme de Frobenius) 33
La forme normale de Jordan 34
Similitude d'une matrice à bloc de Jordan diagonale . . 35
Preuve du théorème 35
La forme normale de Jordan 37
Série des exercices 38

5 Applications de la diagonalisation des endomorphismes 41
Itroduction 41
Application aux suites récurrentes linéaires 41
Application aux équations différentielles linéaires 43
Cas d'un système linéaire différentiel 43
Cas d'une équation differentielle linéaire 45
Exponentiel d'une mmatrice 46
Série des exercices 46
Quelques sujets de contrôles de l'algèbre 3 48
Contrôle d'algèbre 3 (18 Janvier 2017) 48
Contrôle de rattrapage d'algèbre 3 (Mars 2017) 49
Contrôle d'algèbre 3 (15 Janvier 2018) 50
Solution du contrôle d'algèbre 3, 2018 51

Préface

Cet ouvrage est le fruit des cours destinés aux étudiants de la deuxième année LMD Mathématiques qui ont déjà fait leur cours en algèbre linéaire de la première année. Il est constitué de l'Algèbre 3 qui traite le sujet de la diagonalisation des endomorphismes (des matrices carrées) est leurs applications aux quelques aspects mathématiques.

La réduction des endomorphismes est un outil puissant pour la détermination de plusieurs notions de l'algèbre linéaire comme le rang d'une matrice, la puissance d'une matrice, l'inverse d'une matrice inversible, etc. Comme elle a plusieurs applications dans d'autres aspects mathématiques, comme l'étude des problèmes inverses, les suites récurrentes linéaires, la résolution des équations différentielles et l'exponentiel d'une matrice. Le but de cette partie est d'exposer le théorème de la diagonalisation des endomorphismes et de la présenter aux étudiants de la deuxième année LMD Mathématiques dans un cours plus simple et compréhensible.

La partie est constituée en cinq chapitres, le premier chapitre expose quelques préliminaires nécessaires pour le contenu comme la somme directe des sous espaces vectoriels, la matrice associée à une application linéaire dans des bases données et lorsqu'on change les bases, les matrices équivalentes et les matrices semblables.

Le deuxième chapitre traite les sous espace vectoriel invariants par un endomorphisme et la présentation de la matrice associée, passant par la somme directe de deux sous espaces vectoriels invariants et les projecteurs en déduisant le lemme des noyaux et on termine le chapitre par des exercices.

Le troisième chapitre présente les valeurs propres et les vecteurs propres d'un endomorphisme, le polynôme caractéristique, le théorème de Cayley- Hamilton et le polynôme minimal en terminant le chapitre par une série des exercices.

Le quatrième chapitre présente le théorème de la diagonalisation d'un endomorphisme avec sa démonstration, la forme rationnelle, ensuite la forme normale de Jordan en exposant sa démonstration (nous mentionnons que la preuve de la forme normale de Jordan est non incluse dans le programme officiel), ensuite, nous déterminons la matrices de passage après donner la notion des vecteurs propres généralisés en

terminant le chapitre par une série des exercices.

Le cinquième chapitre présente quelques applications de la diagonalisation des endomorphismes, en le terminant par quelques sujets de contrôles de l'algèbre 3.

Table des notations

$\mathbb{N}$ – l'ensemble des entiers naturels

$\mathbb{Z}$ – l'anneau des entiers relatifs

$\mathbb{Z}_n$ – l'anneau des entiers relatifs modulo n

$p \gcd(x, y)$– le plus grand commun diviseur de x et y

$\mathbb{R}^n$– $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n

$\mathbb{C}^n$– $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension n

$\ell(E)$– l'espace des endmorphismes d'un espace vectoriel E

$\mathbb{K}[X]$– l'space des polynômes sur un corps $\mathbb{K}$ (l'anneau des polynômes sur un corps $\mathbb{K}$)

$\mathbb{K}_n[X]$– l'espace vectoriel des polynômes sur un corps $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n

$vect(X)$– l'espace vectoriel engenedré par l'ensemble X

$\{e_1, ..., e_n\}$– la base canonique d'un espace vectoriel de dimension n

$\dim E$– dimension d'un espace vectoriel E

$\operatorname{Im} f$– Image d'une application linéaire f

$\ker f$–noyau d'une application linéaire f

$M_{m\times n}(\mathbb{K})$ ou $M(m \times n, \mathbb{K})$–espace vectoriel des matrices $m \times n$ sur un corps $\mathbb{K}$

I_n– matrice unité d'ordre n

$0_{m\times n}$– matrice zéro $m \times n$

O_n– le groupe des matrices orthogonales d'ordre n

U_n – le groupe des matrices unitaires d'ordre n

A^T– transposée de la matrice A

A^*– adjointe de la matrice A (de l'application linéaire A)

$diag(a_{11}, ..., a_{nn})$ – matrice diagonale

$f_{/L}$– la restriction de l'application f au sous-espace L

$P_{L,M}$ – projecteur sur L parallèle à M

$J_{\lambda,k}$ ou $J_k(\lambda)$– Le bloc de Jordan d'ordre k correspondant à la valeur propre λ

$\det A$– déterminant d'une matrice carrée A

$tr(A)$– trace d'une matrice carrée A

$\oplus$– somme directe

$\langle ., . \rangle$– produit scalaire

$\overline{1, n}$ – l'ensemble des indices $\{1, 2, ..., n\}$

Chapitre 1

Quelques préliminaires pour la diagonalisation des endomorphismes

Introduction

Ce chapitre est un rappel introductif de quelques résultats de la première année qui sont nécessaires pour les autres chapitres. Nous les citons sans les démontrer, Nous allons aussi compléter le chapitre par quelques exercices de révision.

Somme directe des sous espaces vectoriels

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$, E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels de E. Nous laissons aux étudiants de se souvenir de la démonstration de ces résultats : les ensembles suivants λE_1 pour un scalaire λ, $E_1 + E_2$, $E_1 \cap E_2$ sont des sous espaces vectoriels de E, par contre $E_1 \cup E_2$ n'est pas en général un sous espace vectoriel.

Définition 1 *On dit que la somme E_1+E_2 est directe ssi $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et on note $E_1 + E_2 = E_1 \oplus E_2$. Si en plus $E_1 + E_2 = E$ on dit que E est décomposé en somme directe de E_1 et E_2 et que E_1 et E_2 sont supplémentaires l'un de l'autre dans E.*

Exemple 2
1. *Les axes vectoriels dans le plan forment des sous espaces vectoriels supplémentaires l'un de l'autre dans le plan.*
2. *Les ensembles des fonctions paires et des fonctions impaires forment des sous espaces vectoriels supplémentaires l'un de l'autre dans l'espace des fonctions réelles.*
3. *Les ensembles des matrices symétriques et celui des matrices antisymétriques forment des sous espaces vectoriels supplémentaires l'un de l'autre dans l'espace des matrices carrées sur un corps de caractéristique$\neq 2$.*

Pour $n \geq 3$, on peut généraliser la définition 1 à une famille $\left\{E_i, i = \overline{1,n}\right\}$ comme suit :

Définition 3 *On dit que la somme $E_1 + E_2 + .. + E_n$ est directe ssi pour tout $i = \overline{2,n}$, nous avons*

$$E_1 \cap (E_2 + ...E_{i-1}) = \{0\} \text{ et } E_i \cap (E_1 + ...E_{i-1}) = \{0\}$$

et on note

$$E_1 + ... + E_n = E_1 \oplus ... \oplus E_n = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i.$$

Proposition 4 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $E = E_1 \oplus E_2$.

ii) *pour tout $x \in E$ il existe l'unique $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tle que $x = x_1 + x_2$.*

iii) *Pour tout $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$.*

Théorème 5 *(Conséquence du théorème de la base incomplète) Pour tout sous espace vectoriel F de E il existe un sous espace supplémentaire (non unique) de F dans E.*

Applications linéaires et matrices associées

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$ de dimensions n et m respectivement.

Définition 6 *Toute application f de E dans F préservant l'addition et la multiplication par un scalaire s'appelle application linéaire.*

On peut réunir les deux propriétés

$$\begin{aligned} \forall x,\, y &\in E,\, f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall \alpha &\in \mathbb{K},\, \forall x \in E,\, f(\alpha x) = \alpha f(x) \end{aligned}$$

par la suivante

$$\forall \alpha,\, \beta \in \mathbb{K}, \forall x,\, y \in E,\, f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Soient $\left\{v_i, i = \overline{1,n}\right\}$ et $\left\{u_i, i = \overline{1,m}\right\}$ deux bases de E et F resp., alors pour tout $i = \overline{1,m}$ et tout $j = \overline{1,n}$ il existe des scalaires $a_{ij} \in \mathbb{K}$, tels que

$$f(v_j) = a_{1j}u_1 + ...a_{mj}u_m.$$

Ainsi, il existe une matrice $M = (a_{ij})_{m\times n}$ s'appelle la matrice associée à f dans les bases données. Inversement, si on donne une matrice $A = (a_{ij})_{m\times n}$, alors il existe une application linéaire f associée à A dans les bases canoniques de E et F resp. définie par

$$\forall x \in E,\, f(x) = Ax.$$

– Si $E = F$, on a

$$u_j = I(u_j) = p_{1j}v_1 + ...p_{nj}v_n,$$

alors la matrice associée à l'application identique I de E représente la matrice de passage P de la base $\left\{v_i, i = \overline{1,n}\right\}$ à la base $\left\{u_i, i = \overline{1,n}\right\}$. La matrice inverse P^{-1} est la matrice de passage de la base $\left\{u_i, i = \overline{1,n}\right\}$ à la base $\left\{v_i, i = \overline{1,n}\right\}$.

– Si on change les bases $\left\{v_i, i = \overline{1,n}\right\}$ et $\left\{u_i, i = \overline{1,m}\right\}$ de E et F à des bases $\left\{v'_i, i = \overline{1,n}\right\}$ et $\left\{u'_i, i = \overline{1,m}\right\}$, on obtient une nouvelle matrice $M' = \left(a'_{ij}\right)_{m\times n}$ associée à f. Il est intéressant de savoir quelle est la relation entre M et M'. On peut répondre par deux méthodes :

1) Méthode directe est de calculer M'en utilisant les matrices de passage $P = (p_{ij})_{n\times n}$ de $\left\{v_i, i = \overline{1,n}\right\}$ à $\left\{v'_i, i = \overline{1,n}\right\}$ et $Q = (q_{ij})_{m\times m}$ de $\left\{u_i, i = \overline{1,n}\right\}$ à $\left\{u'_i, i = \overline{1,n}\right\}$:

$$\begin{aligned} f\left(v'_j\right) &= a'_{1j}u'_1 + ...a'_{mj}u'_m \qquad (1.1) \\ &= a'_{1j}\left(q_{11}u_1 + ...q_{m1}u_m\right) + ...a'_{mj}\left(q_{1m}u_1 + ...q_{mm}u_m\right) \\ &= \left(q_{11}a'_{1j} + ... + q_{1m}a'_{mj}\right)u_1 + ... + \left(q_{m1}a'_{1j} + ... + q_{mm}a'_{mj}\right)u_m \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} f\left(v'_j\right) &= f\left(p_{1j}v_1 + ...p_{nj}v_n\right) = p_{1j}f\left(v_1\right) + ... + p_{nj}f\left(v_n\right) \\ &= p_{1j}\left(a_{11}u_1 + ...a_{m1}u_m\right) + ... + p_{nj}\left(a_{1n}u_1 + ...a_{mn}u_m\right) \\ &= \left(a_{11}p_{1j} + ... + a_{1n}p_{nj}\right)u_1 + ... + \left(a_{m1}p_{1j} + ... + a_{mn}p_{nj}\right)u_m \end{aligned} \tag{1.2}$$

Des deux équations 1.1 et 1.2 et pour $i = \overline{1,m}$ et $j = \overline{1,n}$ on obtient l'égalité des deux produit des matrices

$$QM' = MP$$

ce qui donne

$$M' = Q^{-1}MP. \tag{1.3}$$

2) Méthode indirecte reliée à la composition des applications linéaires donne qui enfin le résultat 1.3

- Si $E = F$, et si on considère la base de départ et d'arrivé est $\left\{v_i, i = \overline{1,n}\right\}$, ensuite on change la à la base $\left\{u_i, i = \overline{1,n}\right\}$, alors l'équation 1.3 devienne

$$M' = P^{-1}MP \tag{1.4}$$

Définition 7 *Les matrices dans l'équation 1.3 sont dites équivalentes, alors que celles dans 1.4 sont dites semblables.*

Série des exercices

Exercice 8 *On considère les vecteurs du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$: $a_1 = (0,1,1,1)$, $a_2 = (1,0,1,1)$, $a_3 = (1,1,0,1)$, $a_4 = (1,1,1,0)$.*

Soit $F = Vect(\{a_1, a_2\})$ le sous-espace vectoriel engendré par $\{a_1, a_2\}$, et $G = Vect(\{a_3, a_4\})$ le sous-espace vectoriel engendré par $\{a_3, a_4\}$.

1. *Montrer que $E = F \oplus G$.*
2. *Construire deux applications linéaires π et π' de E dans lui-même (E peut être un espace vectoriel quelconque, non nécessairement celui donné en haut), tels que $\ker\pi = G$, $\ker\pi' = F$ et $I = \pi + \pi'$.*
3. *Déduire que $\pi^2 = \pi = I - \pi'$ et $\pi\pi' = \pi'\pi = 0$. (π et π' s'appellent **projecteurs** sur F et G resp.)*

Exercice 9 *Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit $E_a = \{P \in E, (X-a) \text{ divise } P\}$.*

1. *Montrer que si $a \neq b$ il existe un couple de réels (c,d) tels que $1 = c(X-a) + d(X-b)$.*

2. *Déduire que* $E = E_a + E_b$*, la somme est-elle directe ?*

Exercice 10 *soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et* F *et* G *deux sous espaces vectoriels de* E*. Utiliser les supplémentaires de* $F \cap G$ *dans* F *et* G *pour montrer que* $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Exercice 11 *Soit* f *l'application de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^4$ *définie par*

$$f(x,y,z) = (-x+y, x-y, -x+z, -y+z)$$

1. *Montrer que* f *est linéaire.*
2. *Écrire la matrice de* f *dans les bases canoniques.*
3. *Soient* $v_1 = (1,2,0)$, $v_2 = (2,1,0)$, $v_3 = (0,1,-1)$, $u_1 = (1,-1,0,0)$, $u_2 = (2,1,0,0)$, $u_3 = (0,1,-1,0)$, $u_4 = (0,0,1,1)$*. Montrer que* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *et* $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ *sont des bases de* $\mathbb{R}^3$ *et* $\mathbb{R}^4$ *respectivement.*
4. *Écrire la matrice de* f *dans les nouvelles bases.*
5. *Utiliser les matrices de passage* P *et* Q *et la question* 2 *pour déterminer la matrice de* f *dans les nouvelles bases.*

Exercice 12 *Soit* f *l'application linéaire de* $\mathbb{R}^4$ *donnée par la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que* $v_1 = (-2,1,5,0) \in \ker(f - I_4)$, $v_2 = (-3,1,5,0) \in \ker(f - 2I_4)$*. En déduire que* v_1, $v_2 \in \operatorname{Im} f$.
2. *Déterminer* v_3 *et* v_4 *tels que* $f(v_3) = 2v_3 + v_2$, $f(v_4) = 2v_4 + v_3$*. En déduire que* v_3, $v_4 \in \operatorname{Im} f$.
3. *Montrer que* $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^4$*. En déduire que* $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$*. Que peut-on dire de* f?
4. *Écrire la matrice de* f *dans la base* $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
5. *Partager la matrice déterminée dans la question* 4 *en blocs diagonale, en déduire son inverse.*

Exercice 13 *Soient* A *et* B *deux matrices d'ordre* n.

1. *Montrer que* $\det(AB) = \det(BA)$*. En déduire que les matrices semblables ont le même déterminant.*
2. *Les mêmes questions pour la trace.*

3. *Vérifier l'identité*

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n - AB & A \\ 0 & \lambda I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ 0 & \lambda I_n - BA \end{pmatrix}.$$

En déduire que

$$\det(\lambda I_n - AB) = \det(\lambda I_n - BA).$$

Exercice 14 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \ell(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Montrer que la matrice de f est semblable à* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ *ou à* $\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 15 *Soit $f \in \ell(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice associée dans la base canonique est donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que $v_1(0,1,1)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (1,1,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Montrer que la matrice associée à f dans cette base est*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En déduire A^n.

Exercice 16 *Soit $A = P^{-1}DP \in M_{n\times n}(K)$. Montrer que pour tout polynôme $f(X) \in \mathbb{K}[X]$, $f(A) = P^{-1}f(D)P$.*

Chapitre 2

Sous espaces vectoriels invariants par un endomorphisme

Introduction

La théorie des sous espaces stables (invariants) est très large, riche et aussi compliquée. Son existence est dérivé de la structure de $\mathbb{K}[X]$-module et les idéaux d'un anneau et couvre une partie importante des matrices symétriques et Hermitiennes et s'étend à les matrices carrées, et mêmes aux espaces de Hilbert. Elle repose sur les corps algébriquement clos et l'anneau des polynômes sur ses corps. Le but de cette théorie et de décomposer l'espace vectoriel en somme directe de sous espaces vectoriels stables par un endomorphisme, ce qui donne une présentation matricielle réduite à cet endomorphisme permettant de performer les opérations algébriques et de composer les fonctions numériques sur ces endomorphismes de manière facile et semblable aux celles performées sur les nombres. Plusieurs théorèmes et décompositions en relation sont le fruit de cette théorie, citons le théorème de Cayley-Hamilton et la forme normale de Jordan (en particulier les endomorphismes nilpotents), le théorème des décompositions invariantes et la forme rationnelle, ces derniers feront l'objet des chapitre prochains. La théorie a aussi lien avec les groupes finis, les groupes spéciaux, la géométrie projective, et l'algèbre de Lie. Dans ce chapitre nous allons introduire les notions d'invariance et quelques résultats qui servent notre intérêt pour les chapitres prochains, en terminant par une

série des exercices en relation.

Dans ce chapitre et qui suivent $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique zéro (sauf exception), en général, soit réel ou complexe, E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, $u \in \ell(E)$ et M_u la matrice associée à u dans la base initiale donnée.

Sous espaces vectoriels invariants

Définition 17 *Soit F un sous espace vectoriel de E. On dit que F est invariant (ou encore stable) par u si $u(F) \subseteq F$, c'est-à-dire : $\forall x \in F$, $u(x) \in F$. Dans ce cas, u induit sur F un endomorphisme ($u_{/F}$ la double restriction de u à F)*

$$u_{/F} : F \to F,\ u_{/F}(x) = u(x).$$

Il est claire que $\{0\}$ et E sont des sous espaces invariants par tout endomorphisme (ces espaces sont dits triviaux). Si E est de dimension 1, alors $\{0\}$ et E sont les seuls sous espaces invariants.

Définition 18 *Un endomorphisme d'un espace vectoriel non nul pour lequel les seuls sous-espaces stables sont les deux sous-espaces triviaux est qualifié d'endomorphisme irréductible.*

Représentation matricielle

Lemme 19 *Si E est muni d'une base adaptée à F (c'est-à-dire une base de F complétée en une base de E), la matrice M_u peut être notée par blocs.*

Preuve. Étant donnée $\{v_1, \cdots, v_r\}$ une base de F. On complète cette base à $\{v_1, \cdots, v_r, \cdots v_n\}$ une base de E, ensuite on calcule la matrice M_u. On obtient

$$M_u = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

où $A = M_{u/F} \in M_{r\times r}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{r\times(n-r)}(\mathbb{K})$ et $C \in M_{(n-r)\times(n-r)}(\mathbb{K})$. ■

Corollaire 20 *Il est claire que si F' un supplémentaire de F stable par u, alors le bloc B dans la matrice M_u s'anulle et $C = M_{/F'}$*

Sous espaces cycliques

Proposition 21 *Soient $u \in \ell(E)$ et v un vecteur de E non nul.*

L'ensemble $F = \{P(u)(v), P(X) \in \mathbb{K}[X]\}$ est un sous espace vectoriel de E stable par u.

Preuve. D'abord, on monre que F est un sous espace vectoriel de E.

1) Pour $P(X) = 0$, on a $P(u)(v) = 0$, d'où $0 \in F$.

2)

$$\begin{aligned} \forall P(u)(v), Q(u)(v) &\in F, \exists P(X), Q(X) \in \mathbb{K}[X], \exists \alpha, \beta \in \mathbb{K} \Rightarrow \\ \exists L(X) &= \alpha P(X) + \beta Q(X) \in \mathbb{K}[X], \\ \alpha P(u)(v) + \beta Q(u)(v) &= (\alpha P(u) + \beta Q(u))(v) = L(u)(v) \in F. \end{aligned}$$

On montre que F est stable par u.

$$\begin{aligned} \forall P(u)(v) &\in F, \exists\, S(X) = XP(X) \in \mathbb{K}[X], \\ u(P(u)(v)) &= (uP(u))(v) = S(u)(v) \in F. \end{aligned}$$

■

Définition 22 *Le sous espace vectoriel défini dans la proposition 21 s'appelle espace cyclique engendré par v. L'endomorphisme u s'appelle endomorphisme cyclique si l'espace cyclique engendré par v est égal à E.*

Lemme 23 *Si E est de dimension n, et $u \in \ell(E)$ est un endomorphisme cyclique, alors il existe $v \in E$ non nul pour lequel l'ensemble $\{v, u(v), \cdots, u^{n-1}(v)\}$ est une base de E. La matrice de u dans cette base est donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & -a_0 \\ & & \vdots \\ & I_{n-1} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Preuve. 1) On montre que $\{v, u(v), \cdots, u^{n-1}(v)\}$ engendre E.

Comme $\dim E = n$, alors l'ensemble $\{v, u(v), \cdots, u^n(v)\}$ est lié, d'où il existe $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ de degré n, $P(u)(v) = 0$. Comme u est cyclique, alors $E = \{L(u)(v), L(X) \in \mathbb{K}[X]\}$. Soit $L(X) \in \mathbb{K}[X]$, de la division euclidienne, il existe $Q(X)$, $R(X) \in \mathbb{K}[X]$, $d^\circ(R(X)) = n - 1$, tels que

$$L(X) = P(X)Q(X) + R(X)$$

ce qui donne

$$L(u)(v) = R(u)(v) \Rightarrow E = \{R(u)(v),\ R(X) \in \mathbb{K}[X],\ d^{\circ}(R(X)) = n-1\}$$

ce qui montre que l'ensmble $\{v, u(v), \cdots, u^{n-1}(v)\}$ engendre E.

2) On montre que l'ensemble est libre.

Si cet ensemble est lié, alors, il existe un plus petit entier $0 \leq k < n-1$ pour lequel l'ensemble $\left\{v, u(v), \cdots, u^{k}(v)\right\}$ est libre. De la même manière dans 1), il existe $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ de degré $> k$, $P(u)(v) = 0$. En utilisant encore la division euclidienne, on obtient

$$E = \{R(u)(v),\ R(X) \in \mathbb{K}[X],\ d^{\circ}(R(X)) = k\}.$$

Ainsi, l'ensemble $\left\{v, u(v), \cdots, u^{k}(v)\right\}$ engendre E, ce qui donne $\dim E = k+1 < n$. Par conséquent, $\{v, u(v), \cdots, u^{n-1}(v)\}$ est libre. Ainsi, c'est une base de l'espace cyclique E.

La matrice associée à u dans la base $\{v, u(v), \cdots, u^{n-1}(v)\}$.

On a pour $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots a_0$, alors $P(u)(v) = 0$, ce qui donne

$$u^n(v) = -a_0 v - a_1 u(v) - \cdots - a_{n-1}u^{n-1}(v).$$

Ecrivons les images par u des vecteurs de la base $\{v, u(v), \cdots, u^{n-1}(v)\}$ dans cette base, nous obtenons

$$\begin{aligned}
u(v) &= 0.v + 1.u(v) + 0.u^2(v) + \cdots 0.u^{n-1}(v) \\
u(u(v)) &= u^2(v) = 0.v + 0.u(v) + 1.u^2(v) + \cdots 0.u^{n-1}(v) \\
&\vdots \\
u\left(u^{n-1}(v)\right) &= u^n(v) = -a_0 v - a_1 u(v) - \cdots - a_{n-1}u^{n-1}(v).
\end{aligned}$$

Ainsi nous avons la matrice en question. ■

Il est claire que le polynôme unitaire $P(X)$ de degré $n = \dim E$ est le polynôme de degré minimal pour lequel $P(u)(v) = 0$. Notons aussi que dans ce cas

$$P(u)(v) = 0 \Rightarrow P(u) = 0$$

Définition 24 *Soit $u \in \ell(E)$ un endomorphisme cyclique. Le polynôme unitaire $P(X)$ de degré $n = \dim E$ s'appelle le polynôme minimal de u. La matrice définie dans le lemme 23 s'appelle la matrice compagnon de $P(X)$.*

Sous espaces caractéristiques

Soient $u \in \ell(E)$ et $P(X) \in \mathbb{K}[X]$. Les sous-espaces $\ker P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ sont stables par u. Pour que cette construction soit intéressante ($\ker P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ non nuls et non égals à E) il est nécessaire

que l'endomorphisme $P(u)$ soit à la fois non nul et non inversible. C'est ce qui arrive en dimension finie lorsque $P(X)$ est un diviseur strict du polynôme minimal de u. Soient $m(X)$ le polynôme minimal de u de degré > 1 et λ son racine, alors $P(X) = X - \lambda$ est un deviseur strict de $m(X)$. Le lemme suivant nous indique une partie des espaces stables par u.

Lemme 25 *Soient* $\dim E = n$, $u \in \ell(E)$ *et* λ *une racine du polynôme minimal de* u. *Alors, les sous espaces vectoriels* $\ker(u - \lambda I)^{\nu}$ *pour* $0 \leq \nu \leq n$ *sont stables par* u.

Preuve. Soit

$$\begin{aligned} v &\in \ker(u-\lambda I)^{\nu} \Rightarrow (u-\lambda I)^{\nu}(v) = 0 \\ (u-\lambda I)^{\nu}(u(v)) &= ((u-\lambda I)^{\nu} u)(v) = (u(u-\lambda I)^{\nu})(v) \\ &= u((u-\lambda I)^{\nu}(v)) = u(0) = 0 \Rightarrow u(v) \in \ker(u-\lambda I)^{\nu}. \end{aligned}$$

■

Définition 26 *Les sous espaces définis dans le lemme 25 sont appelés sous espaces caractéristiques. En particulier, pour* $\nu = 1$ *ils sont appelés espaces propres.*

La série des exercices qui vienne donne un bagage important pour le concept des sous espaces invariants comme la commutation et stabilité, sous espaces stables et dualité, Stabilité et trigonalisation, etc.

Le lemme des noyaux

Le lemme des noyaux, aussi appelé théorème de décomposition des noyaux, est un résultat sur la réduction des endomorphismes. Si $u \in \ell(E)$ est annulé par un polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$, alors ce lemme prévoit une décomposition de E comme somme directe de sous-espaces vectoriels stables par u. Ces derniers se définissent comme noyaux de polynômes en u et les projecteurs associés sont eux-mêmes des polynômes en u. Le lemme des noyaux conduit à la décomposition de Dunford (tout endomorphisme u est la somme d'un endomorphisme diagonalisable d et d'un endomorphisme nilpotent n) puis à la décomposition de Jordan qui vient dans le chapitre prochain. Comme conséquence du corollaire 20, le lemme des noyaux montre q*u'un opérateur u est diagonalisable si et seulement s'il est annulé par un polynôme scindé à racines simples* (c'est donc le polynôme minimal de u), les noyaux dans ce cas sont de dimension 1).Ce résultat et ses interprétations peuvent être clarifiés dans le chapitre prochain comme condition nécessaire est suffisante pour la diagonalisation des endomorphismes.

Théorème 27 *(le lemme des noyaux) Soient* $u \in \ell(E)$ *et* $P_1(X)$, $P_2(X) \in \mathbb{K}[X]$ *deux polynômes premiers entre eux. Alors,*

$$\ker(P_1(u) P_2(u)) = \ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u).$$

De plus, les restrictions à $\ker P_1P_2(u)$ *des projections sur un noyau parallèlement à l'autre sont des polynômes en* u*.*

Remarque 28 *Si* $P_1P_2(u) = 0$*, alors* $\ker P_1P_2(u) = E$*. Ainsi, le lemme des noyaux s'applique pour le polynôme minimal de* u *sur un corps (ou plus au moins, sur un anneau admettant une décomposition en facteurs premiers).*

Preuve. la preuve du théorème

Comme $P_1(X)$ et $P_2(X)$ sont premiers entre eux, alors il existe $Q_1(X)$, $Q_2(X)$ tels que

$$Q_1(X) P_1(X) + Q_2(X) P_2(X) = 1,$$

évaluant en u on obtient

$$Q_1(u) P_1(u) + Q_2(u) P_2(u) = I \tag{2.1}$$

Les endomorphismes $P_1(u)$, $Q_1(u)$, $Q_2(u)$, $P_2(u)$ sont tous des polynômes en u, donc ils commutent l'un avec les autres. Prenant la restriction de u à $\ker P_1(u) P_2(u)$ et appliquant l'exercice 8, N°2, 3, Chapitre 1, on obtient deux projecteurs

$$\pi = Q_1(u) P_1(u), \ \pi' = Q_2(u) P_2(u).$$

Reste à montrer que $\ker P_1(u) = \ker \pi$ et de la même façon, $\ker P_2(u) = \ker \pi'$ et $\ker(P_1(u) P_2(u)) = \ker \pi\pi'$.

En effet,

$$v \in \ker P_1(u) \Rightarrow P_1(u)(v) = 0 \Rightarrow Q_1(u) P_1(u)(v) = 0$$

ce qui montre que $\ker P_1(u) \subseteq \ker \pi$. Maintenant,

$$v \in \ker \pi \Rightarrow Q_1(u) P_1(u)(v) = 0,$$

de l'égalité 2.1, on a

$$\begin{aligned} v &= (Q_2(u) P_2(u))(v) \Rightarrow P_1(u)(v) = P_1(u)((Q_2(u) P_2(u))(v)) \\ &= Q_2(u)(P_1(u) P_2(u)(v)) = Q_2(u)(0) = 0 \end{aligned}$$

ce qui donne $\ker \pi = \ker P_1(u)$. ■

Série des exercices

Exercice 29 *Montrer que*

1. *Tout endomorphisme d'une droite vectorielle est irréductible*
2. *Toute rotation d'un plan euclidien dont l'angle n'est pas un multiple de π est irréductible.*
3. *En dimension finie, un endomorphisme est irréductible si et seulement s'il est cyclique et si son polynôme minimal est irréductible.*

Exercice 30 *Soit u, $v \in \ell(E)$.*

1. *Montre que $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par u.*
2. *Si $u \circ v = v \circ u$, montrer que $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v. Donner un exemple numérique pour démontrer que la réciproque n'est pas vraie.*
3. *Soit $P(X) \in \mathbb{K}[X]$, Si $u \circ v = v \circ u$, montrer que $\ker P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ sont stables par v. (Ce qui montre que le résultat dans la question 2 est particulier).*
4. *En particulier, montrer que $\ker P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ sont stables par u.*
5. *Déterminer les sous-espaces vectoriels stables par l'endomorphisme de dérivation dans $\mathbb{K}[X]$.*

Exercice 31

1. *Montrer que l'intersection de sous espaces stables par $u \in \ell(E)$ est stable par u.*
2. *Même question pour la somme.*

Exercice 32 *Supposons que E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (vous pouviez considérer $E = \mathbb{R}^n$ et pour $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in E$, $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$) et soit F un sous espace vectoriel de E. On définit l'orthogonal de F par*

$$F^{\perp} = \{x \in E, \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\}.$$

Pour $u \in \ell(E)$, u^* est défini par $\forall x$, $y \in E$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$.

1. *Montrer que F est stable par u si et seulement si $F^{\perp}$ est stable par u^*.*
2. *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les droites vectoriels stables par A. À l'aide de la question 1, déduire les plans vectoriels stables par A.*
3. *Même question pour $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.*

Chapitre 3

Valeurs propres et vecteurs propres

Introduction

Les valeurs propres et les vecteurs propres sont les moyens principaux pour la réduction des endomorphismes. Il s'agit de la matrice de passage d'une base où l'endomorphisme est présenté par une matrice à coefficients non nuls occupent presque tout le carré à une matrice plus simple : diagonale ou bloc diagonale. Cette matrice de passage est complètement formée des vecteurs propres ou une moitie des vecteurs propres et l'autre moitie des vecteurs propres généralisés dont leur calcul est toujours basé sur les vecteurs propres et les valeurs propres.

Définition 33 *Soit $u \in \ell(E)$ on appelle vecteur propre de u tout $v \in E$, non nul, pour lequel il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, tel que $u(v) = \lambda v$. λ s'appelle valeur propre assiciée à v.*

Vecteurs propres et sous espaces stables

Nous avons déjà introduit par la définition 26, chapitre 2, la notion des espaces caractéristiques en général et les espaces propres en particulier. Dans ce paragraphe nous allons collecter quelques propriétés de

ces espaces et leur relation avec les valeurs propres, laissons les preuves aux étudiants.

Propriétés

- Le vecteur nul est un vecteur propre associé à toutes les valeurs propres. Donc quand on parle des vecteurs propres, il s'agit des vecteurs non nuls.
- Si v est un vecteur propre, alors v et $u(v)$ sont liés dans $\operatorname{Im} u$ et que v est l'un des générateurs de $\operatorname{Im} u$.
- Si v est un vecteur propre associé à une valeur propre λ, alors tout multiple de v est aussi un vecteur propre associé à la même valeur λ.
- L'ensemble des vecteurs propres associés à la même valeur propre λ est un sous espace vectoriel de E noté V_λ ou E_λ, c'est l'espace propre $V_\lambda = \ker(u - \lambda Id)$ (de la définition 26, chapitre 2, on déduit que la valeur propre de u est une racine du polynôme minimal de u).
- Pour $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on a $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0\}$, en d'autre terme, les vecteurs propres associés au valeurs propres distinctes sont libres.
- Les sous espaces propres d'un endomorphisme sont stables par cet endomorphisme, voir Lemme 25, chapitre 2.
- Les espaces vectoriels de dimension 1 (les droites vectorielles) stables par un endomorphisme sont des espaces propres pour cet endomorphisme. L'exemple suivant montre que les espaces propres ne sont pas nécessairement de dimension 1.

Exemple 34 *La matrice* $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *a un espace propre* $V_{\lambda=2} = vect(e_1, e_2)$.

Le théorème suivant découle de la définition et les propriétés précédentes :

Théorème 35 *On considère un scalaire* λ *et* $u \in \ell(E)$. *Les assertions suivantes sont équivalentes*

i) λ *est une valeur propre de* u.

ii) *Il existe un vecteur propre non nul de* u *de valeur propre* λ.

iii) *Le système linéaire* $(u - \lambda Id)(v) = 0$ *a au moins une solution non nulle (on dit aussi non triviale, puisque le vecteur nul est toujours solution).*

iv) $\ker(u - \lambda Id)$ *n'est pas réduit au seul vecteur nul.*

v) *L'endomorphisme* $u - \lambda Id$ *est no injective (ainsi non bijective).*

vi) *Le rang de* $(u - \lambda Id)$ *n'est pas maximum (autrement dit strictement inférieur à la dimension* n *de* E*).*

vii) $\det(u - \lambda Id) = 0$.

Donc, la recherche des valeurs propres d'un endomorphisme (d'une matrice) est caractérisée par la résolution de l'équation $\det(u - \lambda Id) = 0$, c'est pour cela on l'appelle *équation caractéristique* de u.

Exemple 36 *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$*. Appliquons le théorème précédent,* λ *est une valeur propre de* $A \Leftrightarrow \det(A - \lambda Id) = 0$*, ce qui donne*

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) - 30 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = 7.$$

Cherchons maintenant les vecteurs propres (les espaces propres). Soit $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *associé à* $\lambda_1 = -4 \Leftrightarrow (A - (-4) I_2)(v_1) = 0$*. Alors*

$$\begin{cases} 5x + 6y &= 0 \\ 5x + 6y &= 0 \end{cases}$$

ce qui donne $v_1 = x \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-5}{6} \end{pmatrix}$*. De la même manière on trouve* $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Polynôme caractéristique

Définition 37 *Soit* $M \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$*. On appelle mineur principal d'ordre* k *le déterminant d'une sous matrice de* M *d'ordre* k *obtenue en supprimant* $m - k$ *lignes et* $n - k$ *colonnes de mêmes indices de la matrice* M*, noté* $\det M_{I,I}$*, où* $I = \{1, 2, \cdots, k\}$.

Exemple 38 *Les mineurs (principaux et non principaux) obtenus en retirant juste une ligne et une colonne des matrices carrées (premiers mineurs) sont nécessaires pour calculer les cofacteurs matriciels, qui sont à leur tour utiles pour calculer à la fois le déterminant et l'inverse des matrices carrées.*

Lemme 39 *Soit* $u \in \ell(E)$ *représenté par une matrice* M*. Alors* $\det(XId - u)$ *est un polynôme unitaire de degré* $n = \dim E$*, tel que son développement est donné par*

$$C(X) = X^n - a_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n$$

où

$$a_k = \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n} \det M_{i_l,i_p},\ \textit{pour}\ k = \overline{1,n}.$$

Ainsi

$$a_1 = traceM,\ a_n = \det M.$$

Définition 40 *Soit* $u \in \ell(E)$. $C(X) = \det(XId - u)$ *s'appelle le polynôme caractéristique de* u.

Coefficients du polynôme caractéristique

Le lemme 39 nous donne des informations sur les coefficients de $C(X)$ et leur relation avec des quantités plus importantes comme la trace et le déterminant de u, ainsi les valeurs propres qui ne sont que les racines de $C(X)$, de plus, d'après les fonctions élémentaires des racines d'un polynôme, on résulte que si λ_1, ...,λ_n sont les valeurs propres de u, alors

$$trace(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i,\ \det u = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Exemple 41 *Le polynôme caractéristique de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} C(X) &= \det(XI_3 - A) \\ &= X^3 - tr(A)X^2 + (\det A_{1,1} + \det A_{2,2} + \det A_{3,3})X - \det A \\ &= X^3 - X^2 + \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) X - (-10) \\ &= X^3 - X^2 - 12X + 10. \end{aligned}$$

Lorsqu'il s'agit de la recherche des valeurs propres, il est préférable de ne pas développer le polynôme caractéristique mais de le mettre sous forme de facteurs premiers, sauf s'il est difficile de le faire.

Théorème de Cayley -Hamilton

Ce théorème a une grande importance dans le calcul matriciel, il autorise des simplifications puissantes dans les calculs de matrices comme la puissance d'une matrice, il permet d'établir des résultats théoriques, par exemple pour calculer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent, comme il permet de calculer l'inverse d'une matrice. Tous ces types de calcul sont illustrés par les exercices proposés à l'afin du chapitre.

Théorème 42 *Tout endomorphisme (matrice carrée) est racine de son polynôme caractéristique.*

Preuve. Soient M une matrice carrée et

$$C(X) = \det(XI_n - M) = X^n + b_1X^{n-1} + \cdots + b_n.$$

Soit $adj(XI_n - M)$ l'adjoint classique (la comatrice) de $(XI_n - M)$, nous avons

$$C(X) I_n = (XI_n - M) adj(XI_n - M).$$

Les ceofficients de $adj(XI_n - M)$ sont les premiers mineurs de $(XI_n - M)$ à un signe près, (voir Exemple 38), ils sont donc des polynômes de degré $\leq n-1$. Ainsi $adj(XI_n - M)$ est une matrice à coefficients polynômials de degré $n-1$, alors il existe un polynôme à coefficients matriciels de degré $n-1$,disant

$$adj(XI_n - M) = X^{n-1}I_n + B_1X^{n-2} + \cdots + B_{n-1}.$$

En développant, et identifiant les coefficients des deux membres, on obtient

$$\begin{cases} I_n & = & I_n \\ B_1 - M & = & b_1I_n \\ B_2 - MB_1 & = & b_2I_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -MB_{n-1} & = & b_nI_n \end{cases}$$

On multiple les deux membres de la première équation par M^n. On multiple à gauche les deux membres de la deuxième équation par M^{n-1},..., On multiple à gauche les deux membres de l'avant dernière équation par M, ensuite on somme les deux membres des nouvelles équations obtenues, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= M^n + M^{n-1}B_1 - M^n + M^{n-2}B_2 - M^{n-1}B_1 + \cdots + MB_{n-1} - MB_{n-1} \\ &= M^n + b_1M^{n-1} + \cdots + b_nI_n = C(M). \end{aligned}$$

Notons que la multiplication ici est effectue à gauche mais également on peut l'effectuer à droite car la matrice et sa comatrice commutent du fait que le produit donne la matrice scalaire. ■

Polynôme minimal

Nous avons déjà vu la définition du polynôme minimal dans le chapitre 2, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, c'est donc un diviseur du polynôme caractéristique de degré minimal et qui admet u comme racine. Le lemme 23, chapitre 2, nous montre aussi que le polynôme minimal d'un endomorphisme cyclique est lui-même le polynôme caractéristique. La réciproque est-elle vraie ?

Théorème 43 *Une matrice (un endomorphisme) est cyclique si et seulement si ses polynômes minimal et caractéristique coïncident.*

Preuve. Donc il suffit de montrer la réciproque. Si les polynômes minimal et caractéristique de u coïncident, alors le polynôme minimal $m(X)$ est de degré n. Donc, aucun polynôme de degré $n-1$ ne s'annule pour u. Ainsi pour tout vecteur non nul $x \in E$, les vecteurs x, $u(x)$, ..., $u^{n-1}(x)$ sont libres. Donc on peut choisir un vecteur x tel que $\{x, u(x), ..., u^{n-1}(x)\}$ est une base de E, ce qui indique que u est cyclique. ■

Théorème 44 *Un endomorphisme (une matrice) est cyclique si, et seulement si, tous ses sous-espaces propres sont de dimension* 1.

Preuve. D'après le lemme 23, chapitre 2, un endomorphisme u (une matrice) est cyclique si, et seulement si, u représenté par une matrice compagnon. Soit

$$C_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$C_u - \lambda I_n = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & -\lambda & & & -a_1 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -\lambda - a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Comme la sous matrice $(C_u - \lambda I_n)_{n,n}$ (obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne) est de rang $n-1$, alors $C_u - \lambda I_n$ est de rang $\geq n-1$. Appliquant le théorème des dimensions, on a

$$\dim E = \dim \ker (C_u - \lambda I_n) + rg (C_u - \lambda I_n).$$

Du fait que λ est valeur propre de C_u, $\dim \ker (C_u - \lambda I_n) \neq 0$, alors, $\dim \ker (C_u - \lambda I_n) = 1$ ■

.

Théorème 45 *Soit $u \in \ell(E)$. Le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de u ont les mêmes racines. En d'autres termes, λ est valeur propre de u si, et seulement si, λ est racine de son polynôme minimal.*

Preuve. Soit λ une valeur propre de u et $m(X)$ le polynôme minimal de u. Il existe donc un vecteur v non nul tel que $u(v) = \lambda v$. Il est facile de montrer que pour tout entier $k > 0, u^k(v) = \lambda^k v$. On déduit que pour tout polynôme $P(X) \in [X]$, on a

$$P(u)(v) = P(\lambda)\, v$$

Appliquons ce résultat pour le polynôme minimal, nous obtenons

$$0 = m(u)(v) = m(\lambda)\, v$$

Comme le vecteur v est non nul on en déduit que $m(\lambda) = 0$. ■
Preuve. Réciproquement, soit λ une racine de $m(X)$. Alors il exste $Q(X)$, tel que

$$m(X) = (X - \lambda)\, Q(X)$$

ce qui donne

$$0 = m(u) = (u - \lambda Id) \circ Q(u)$$

Cela implique que

$$\operatorname{Im} Q(u) \subset \ker(u - \lambda Id)$$

Comme le degré de $Q(X)$ est strictement inférieur au degré de $m(X)$, alors $Q(u) \neq 0$. Il en résulte que

$$\ker(u - \lambda Id) \neq \{0\}$$

Par conséquent λ est une valeur propre de u. ■

Série des exercices

Exercice 46 *1. Montrer chaque point dans les propriétés de la deuxième paragraphe.*

2. Déduire que u est non injective si et seulement si 0 est une valeur propre de u.

Exercice 47 *1. Determiner la matrice de rotation dans le plan.*

2. Monter que la matrice de rotation dans le plan n'a pas de sous espaces invariants.

Exercice 48 *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est* $A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. *Démontrer que* 1 *et* 2 *sont des valeurs propres de* f .
2. *Déterminer les vecteurs propres de* f .
3. *Soit* u *un vecteur propre de* f *pour la valeur propre* 2. *Trouver des vecteurs* v *et* w *tels que*

$$f(v) = 2v + u \text{ et } f(w) = 2w + v.$$

4. *En déduire les sous espaces propres et les sous espaces caractéristiques de* f.
5. *Soit* e *un vecteur propre de* f *pour la valeur propre* 1. *Démontrer que* (e, u, v, w) *est une base de* $\mathbb{R}^4$.
6. *Donner la matrice de* f *dans cette base. La matrice* A *est-elle diagonalisable ?*
7. *En déduire le lemme des noyaux pour* f.

Exercice 49 *Résoudre dans* $M(3, \mathbb{R})$ *l'équation* $X^2 = A$, *où*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 50 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour n *entier relatif donné, calculer* A^n *par trois méthodes différentes.*

Exercice 51 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

1. *Vérifier que* A *n'est pas diagonalisable.*
2. *Déterminer* $\ker (A - I)^2$.
3. *Montrer que* A *est semblable à une matrice de la forme* $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.
4. *Calculer* A^n *pour* n *entier naturel donné.*

Exercice 52 *Soit* $A \in M(n, \mathbb{R})$ *vérifiant* $rg(A) = 1$. *Montrer qu'il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $A^2 = \lambda A$ *et que ce scalaire est une valeur propre de* A.

Exercice 53 *Soit A la matrice suivante* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. *Calculer le polynôme caractéristique et déterminer les valeurs propres de A.*
2. *On note $\lambda_1 > \lambda_2$ les valeurs propres de A, E_1 et E_2 les sous-espaces propres associés. Déterminer une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $\varepsilon_1 \in E_1$, $\varepsilon_2 \in E_2$, les deux vecteurs ayant des coordonnées de la forme $(1, y)$.*
3. *Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^2$, on note (α, β) ses coordonnées dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$A^n x = \alpha \lambda_1^n \varepsilon_1 + \beta \lambda_2^n \varepsilon_2$$

4. *Notons $A^n x = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Exprimer a_n et b_n en fonction de α, β, λ_1 et λ_2. En déduire que, si $\alpha \neq 0$, la suite $\frac{b_n}{a_n}$ tend vers $\sqrt{2}$ quand n tend vers $+\infty$.*
5. *Expliquer, sans calcul, comment obtenir à partir des questions précédentes une approximation de $\sqrt{2}$ par une suite de nombres rationnels.*

Exercice 54 1. *Utiliser la question 3 dans l'exercice 13, Chap.1 pour montrer que, pour deux matrices carrées quelconques A et B, les produits AB et BA possèdent les mêmes valeurs propres.*

2. *Montrer le même résultat en utilisant la définition de la valeur propre et les vecteurs propres (Indication : Utiliser $B(AB) = (BA)B$)*

Chapitre 4

Les formes canoniques

Introduction

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n et un endomorphisme $u \in \ell(E)$. La décomposition des matrices en somme ou en produit de matrices plus simples est l'un des outils les plus puissants dans le calcul matriciel. En outre, elle permet d'étudier certaines propriétés des endomorphismes que nous ne pouvons pas le faire sans décomposer la matrice associée. Dans ce chapitre nous allons discuter deux formes importantes, la forme rationnelle et la forme normale de Jordan.

La forme rationnelle (Forme de Frobenius)

Nous avons déjà introduit les notions et les outils de cette forme dans le chapitre deux : les sous espaces invariants, les sous espaces cycliques, la matrice compagnon, le lemme des noyaux. Ce qui rend ce paragraphe plus court mais aussi plus facile à comprendre.

Une décomposition de Frobenius est une décomposition de E en somme directe de sous-espaces cycliques, telle que les polynômes minimaux (ou caractéristiques) respectifs des restrictions de u aux fac-

teurs sont les *facteurs invariants* de u. La décomposition de Frobenius peut s'effectuer sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque (pas nécessairement algébriquement clos) ce qui permet de maintenir les coefficients de la matrice dans cette forme appartenir au même corps initial. Cette forme en plus de son importance en algèbre linéaire, est souvent intervenue dans les démonstrations de certains théorèmes de la théorie algébrique des nombres, ainsi elle a sa généralisation aux $\mathbb{K}[X]-$modules, par exemple, on peut se référer à [4], un cours sur un site ou se referer à son livre : Algebra [5].

Théorème 55 *Pour toute matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$, il existe une matrice inversible P telle que*

$$P^{-1}AP = diag\left(C_{p_1}, \cdots C_{p_k}\right)$$

où C_{p_i} désignent les matrices compagnons des polynômes unitaires $p_i(X) \in \mathbb{K}[X]$ pour $i = \overline{1,k}$. Les $p_i(X)$ s'appellent les facteurs invariants de A et satisfont la condition $p_i(X)$ divise $p_{i+1}(X)$ pour $i = \overline{1,k-1}$. $p_k(X)$ est le polynôme minimal de A et $\prod_{i=1}^{k} p_i(X) = c(X)$ est son polynôme caractéristique.

La forme normale de Jordan

Une forme normale de Jordan d'une matrice carrée est une matrice triangulaire supérieure avec les valeurs propres sur la diagonale et les uns dans chaque entrée non nulle hors diagonale (au dessus de la diagonale de la matrice). En d'autres termes, il s'agit d'une matrice bloc diagonale formée de blocs de Jordan. Mettre une matrice carrée sous sa forme normale de Jordan nécessite de connaître son polynôme caractéristique et son polynôme minimal et de trouver les valeurs propres de la matrice. En outre, on cherche les vecteurs propres associés et les vecteurs propres généralisés. Ces derniers forment ensemble une base dans laquelle on passe de la forme initial à la forme réduite (normale) de Jordan. Cette base s'appelle *base de Jordan*. Dans de nombreux manuels, le concept de forme normale Jordan relève de la diagonalisation des matrices carrées.

Définition 56 *Un bloc de Jordan d'ordre n associé à la valeur propre λ noté souvent par $J_{\lambda,n}$ ou $J_n(\lambda)$ est une matrice carrée d'ordre n sous*

la forme

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & . & . \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & \lambda & 1 \\ 0 & . & . & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Le bloc de Jordan $J_n(\lambda)$ peut aussi être écrit sous la forme

$$J_n(\lambda) = \lambda I_n + N \tag{4.1}$$

où N est nilpotente d'indice n.i.e. $N^{n-1} \neq 0$ et $N^n = 0$. En outre, il peut être vu comme le bloc de Jordan $J_n(0)$.

Similitude d'une matrice à bloc de Jordan diagonale

Théorème 57 *Pour chaque matrice carrée A sur le corps complexe (également tout corps algébriquement clos), il existe une matrice inversible P telle que*

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & & \\ & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix} \\ &= diag\left(J_{n_1}(\lambda_1), \cdots, J_{n_k}(\lambda_k)\right) \end{aligned}$$

où λ_i sont les valeurs propres de A de multiplicités algébriques n_i pour $i = 1, ...k$.

Corollaire 58 *De l'équation 4.1, et le théorème 57, il existe une matrice diagonale $D = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ et une matrice niltpotente $N = J_{n_1}(0) \oplus \cdots \oplus J_{n_k}(0)$ (l'indice de nilpotence de N est le max des indices de nilpotence de $J_{n_1}(0), \cdots, J_{n_k}(0)$), telle que $P^{-1}AP = D + N$. Les colonnes de la matrice P sont les vecteurs propres et les vecteurs propres généralisés de A.*

Remarque 59 *Cette décomposition en somme est très utile pour la détermination des puissances élevées de la matrice.*

Preuve du théorème

Preuve. Premier cas :

Soient $c(X) = (x - \lambda)^n$ et $m(x) = (x - \lambda)^m$ le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de u resp.. On a la suite des itérées des noyaux suivants

$$\ker(u - \lambda I) \subset \ker(u - \lambda I)^2 \subset \cdots \subset \ker(u - \lambda I)^m = \ker(u - \lambda I)^n = E$$

L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si on a n vecteurs propres qui forment une base de $\ker(u-\lambda I)$ (dans ce cas $\ker(u-\lambda I) = E = \ker(u-\lambda I)^n$ ce qui équivalent à $m=1$). Sinon il existe au moins un vecteur propre $v_1 \in \ker(u-\lambda I)$ et $v_2 \in \ker(u-\lambda I)^2 - \ker(u-\lambda I)$, ..., $v_m \in \ker(u-\lambda I)^m - \ker(u-\lambda I)^{m-1}$ tels qu'on a la suite des itérés des vecteurs suivants

$$(u-\lambda I)(v_2) = v_1,\ (u-\lambda I)(v_3) = v_2,\ldots,\ (u-\lambda I)(v_m) = v_{m-1}$$

ce qui est équivalent à

$$(u-\lambda I)^{i-1}(v_i) = v_1 \text{ pour } i = \overline{2,m}$$

Ainsi nous obtenons une base d'un sous espace E_1 de E formée du vecteur propre v_1 et les vecteurs propres généralisés v_2, ..., v_m tels que la matrice associée à la restriction de u à E_1 dans cette base est le bloc de Jordan $J_m(\lambda)$. Si $m=n$, alors on a seulement ce bloc (dans ce cas , $\dim\ker(u-\lambda I)=1$). Supposons que $\{v_1,...,v_k\}$ une base de $\ker(u-\lambda I)$, alors on prend $v_1$et procédant de la même façon précédente pour obtenir $m-1$ vecteurs généralisés $v_{1,2},...,v_{1,m}$ pour avoir le bloc $J_m(\lambda)$. On prend le vecteur v_2 et procédant de la même façon précédente pour avoir les vecteurs $v_{2,2},...,v_{2,s_1}$tels qu'ils soient dans le supplémentaire du sous espace $vect\ \{v_1, v_{1,2},...,v_{1,m}\}$ pour obtenir un bloc $J_{s_1}(\lambda)$ avec $s_1 \leq m$. Continuons notre procédure jusqu'à épuiser tous les vecteurs d'une base de $E = \ker(u-\lambda I)^n$. On obtient exactement k blocs de jordan tels que

$$m + s_1 + s_2 + ... + s_{k-1} = n.$$

Deuxième cas :

Maintenant, supposons que le polynôme cacactéristique et le polynôme minimal de u sont respectivement

$$\begin{aligned} c(X) &= (x-\lambda_1)^{n_A}\cdots(x-\lambda_k)^{n_k} \\ m(X) &= (x-\lambda_1)^{m_A}\cdots(x-\lambda_k)^{m_k} \end{aligned}$$

En premier lieu, appliquons le lemme des noyaux pour obtenir

$$\begin{aligned} E &= \ker(u-\lambda_1 I)^{n_A} \oplus \cdots \oplus \ker(u-\lambda_k I)^{n_k} \\ &= \ker(u-\lambda_1 I)^{m_A} \oplus \cdots \oplus \ker(u-\lambda_k I)^{m_k} \end{aligned}$$

Ensuite pour chaque $\ker(u-\lambda_i I)^{n_i}$ nous procédons de la même manière précédente pour obtenir une base de E telle que la matrice associée dans cette base est bloc diagonale dont les éléments diagonaux sont les blocs de Jordan. ■

La forme normale de Jordan

De la preuve précédente on peut définir la forme normale de Jordan comme suit :

Définition 60 *Soit $c(X) = \det(A - XI)$ le polynôme caractéristique et $m(X)$ le polynôme minimal de A tels que*

$$\begin{aligned} c(X) &= (X-\lambda_1)^{n_1} ... (X-\lambda_k)^{n_k} \\ m(X) &= (X-\lambda_1)^{m_1} ... (X-\lambda_k)^{m_k} \end{aligned}$$

avec $m_i \leq n_i$ pour $i = 1, \ldots, k$. La décomposition dans le théorème 57 s'appelle forme normale de Jordan ou plus souvent forme réduite de Jordan si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. *Le nombre de blocs de Jordan associés à λ_i est égal à $\dim \ker(A - \lambda_i I)$ qui ne dépasse pas n_i.*
2. *La somme des tailles (ordres) de tous les blocs de Jordan correspondant à une valeur propre λ_i est égale à sa multiplicité algébrique n_i.*
3. *Le plus grand bloc de Jordan correspondant à une valeur propreλ_i est d'ordre m_i, la multiplicité algébrique de λ_i dans le polynôme minimal (i.e. J_{λ_i,n_i} est une matrice bloc diagonale de blocs de Jordan de tailles pas plus grandes que m_i et au moins l'un d'entre eux est de taille (d'ordre) m_i).*

L'exemple suivant montre comment factoriser une matrice sous forme normale de Jordan :

Exemple 61 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, *alors le polynôme caractéristique et le polynôme minimal sont respectivement :*

$$c(X) = (X-1)(X-2)(X-4)^2 = m(X).$$

Alors,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{1,1} & & \\ & J_{2,1} & \\ & & J_{4,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 4 & 1 \\ & & 0 & 4 \end{pmatrix} = J.$$

Pour déterminer P, mettons P en vecteurs colonnes $P = [p_1, p_2, p_3, p_4]$, alors $AP = PJ$, ce qui donne

$$\begin{aligned} Ap_1 &= 1 \cdot p_1 = (0,1,1,1)^T, \\ Ap_2 &= 2p_2 = (0,0,1,1)^T, \\ Ap_3 &= 4p_3 = (1,1,1,0)^T, \\ Ap_4 &= p_3 + 4p_4 \Leftrightarrow (A-4I)^2 p_4 = 0 \Rightarrow p_4 = (0,0,-1,0)^T. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 62 *Un autre exemple de la forme normale de Jordan, l'exercice 48 et 51, série des exercices, chapitre* 3.

Série des exercices

Exercice 63 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer* $\ker(A + I)$ *en déduisant une valeur propre de* A.
2. *À l'aide de* $Tr(A)$ *et* $\det A$, *déterminer les autres valeurs propres. A est-elle diagonalisable ?*
3. *Déduire le polynôme caractéristique de* A.
4. *A est-elle inversible ? Sans calcul, déduire son inverse*

Exercice 64 *Montrer les assertions suivantes :*

1. *La matrice et sa transposée possèdent les même valeurs propres. Donner un exemple où elles ont un vecteur propre différent.*
2. *Le polynôme caractéristique de* $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ *est égal au produit du polynôme caractéristique de* A *par celui de* C.

Exercice 65 *Soit* $u \in \imath(E)$. *Sans utiliser le théorème de Cayley - Hamilton, montrer qu'il existe un polynôme* $f(X) \in K[X]$, $f(u) = 0$.

Exercice 66

1. *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres d'un projecteur de* E.

2. *Même question pour une rotation d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{C}$.*

Exercice 67 *Déterminer les valeurs propres, les vecteurs propres et les matrices de passage à la forme normale de Jordan des matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 1+m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix},$$

pour $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 68 *Déterminer les conditions sur a, b, c, d pour que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.*

Exercice 69 *Soit $a \in \mathbb{R}$, A la matrice suivante $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$.*

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par la donnée de u_0 et u_1 et la relation de récurrence suivante : pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n.$$

1. *Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?*
2. *Lorsque A est diagonalisable, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.*
3. *On suppose que A diagonalisable. On note U_n le vecteur $U_n = (u_n, u_{n+1})$, exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et de A, puis U_n en fonction de U_0 et de A.*

Exercice 70 *Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ suivante $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.*

1. *La matrice A est-elle diagonalisable ?*
2. *Calculer $(A-2I_3)^2$, puis $(A-2I_3)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n.*

Exercice 71 *1. Soit*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a *Utiliser la matrice partitionnée en blocs pour déterminer le polynôme caractéristique de A.*

b *En déduire le polynôme minimal de A.*

c *Sans calcul, expliquer par deux méthodes différentes pourquoi* $\dim \ker (A + 3I) \neq 4$.

d *En déduire la forme réduite de Jordan de A.*

e *Déterminer la base de Jordan.*

2. Déterminer le polynôme minimal de chaque matrice dans les séries des exercices de 1 *à* 4 *et sa forme réduite de Jordan.*

Exercice 72 *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Déduire (sans calcul) les polynômes caractéristique et minimal de A, et la dimension de l'espace propre.

Exercice 73 *(Synthèse) Préciser les espaces propres, les espaces caractéristiques de toutes les matrices dans les séries de* 1 *à* 4*. Lesquelles sont des matrices cycliques ?*

Chapitre 5

Applications de la diagonalisation des endomorphismes

Itroduction

La réduction des endomorphismes et la diagonalisation des matrices permettent de simplifier considérablement un certain nombre de calculs, comme par exemple le calcul de puissances d'une matrice, ou la résolution de systèmes différentiels linéaires. Par exemple, le calcul des puissances d'une matrice devient très simple dès lors que l'on a diagonalisé la matrice : la puissance n-ième d'une matrice diagonale s'obtient en élevant tous ses éléments de matrice à la puissance n, ce qui est faux pour des matrices non diagonales.

Application aux suites récurrentes linéaires

Soit $A \in M_m(\mathbb{K})$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension m ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), donnée par la récurrence

$$X_n = AX_{n-1}, \text{ et } X_0 = (x_{01}, ..., x_{0m}) \tag{5.1}$$

Alors, la récurrence (5.1) devient

$$X_n = AX_{n-1} = A^2X_{n-2} = ...A^nX_0 \tag{5.2}$$

Appliquons la diagonalisation de A (si A est diagonalisable), on obtient facilement X_n à partir de X_0.

En effet, comme A est diagonalisable, alors il existe P inversible (formée des vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_1, ..., λ_m comptées avec leurs multiplicités et une matrice diagonale $D = diag(\lambda_1$, ..., $\lambda_m)$, telles que

$$P^{-1}AP = D$$

ce qui est équivalent à

$$A = PDP^{-1}$$

La récurrence (5.2) donne

$$X_n = (x_{n1}, ..., x_{nm}) = \left(PD^nP^{-1}\right)(x_{01}, ..., x_{0m}) \tag{5.3}$$

Exemple 74 *Soient deux suites réelles* $(u)_n$ *et* $(v)_n$ *données par le système*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 5u_{n+1} & = & -u_n + 6v_n \\ 5v_{n+1} & = & 4u_n + v_n \end{array} \right. \quad avec\ u_0 = \frac{5}{3},\ v_0 = 0$$

Mettons le système sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{v+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_v \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ *associés à leurs valeurs propres sont* $\left\{\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -5, \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 5$. *Appliquons la diagonalisation, nous obtenons*

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} u_n \\ v_v \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} (-1)^n + \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(-1)^n \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple 75 *Soit une suite récurrente réelle donnée par la relation de récurrence*

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n,\ u_0 = 1,\ u_1 = 5$$

Pour retourner au cas d'un système, on pose

$$\left\{\begin{array}{rcc} u_{n+2} & = & 5u_{n+1}-6v_{n+1} \\ v_{n+2} & = & u_{n+1} \end{array}\right.$$

On répète la méthode précédente, on obtient : $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, *les vecteurs propres associés à leurs valeurs :* $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 2, \left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 3$

$$\left\{\begin{array}{rcc} u_n & = & 5u_{n-1}-6v_{n-1} \\ v_n & = & u_{n-1} \end{array}\right. , \; n \geq 1$$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} =: \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi nous avons

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n+1}-2^{n+1} \\ 3^n-2^n \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$u_n = 3^{n+1}-2^{n+1}$$

Application aux équations différentielles linéaires

Cas d'un système linéaire différentiel

Soit le système différentiel linéaire, pour $n \geq 1$,

$$\frac{d}{dt}X^{(n-1)}(t) = X^{(n)}(t) = AX^{(n-1)}(t), \text{ et } X^{(0)}(t) = (x_{01}(t), ..., x_{0m}(t)) = X(t)$$

Suivons la même méthode exposée dans la section précédente, nous obtenons

$$X^{(n)}(t) = A^n X^{(0)}(t) = A^n X(t)$$

Supposons que la matrice est diagonalisable, alors pour $n = 1$, on obtient

$$X'(t) = PD^nP^{-1}X(t)$$

On pose $P^{-1}X'(t) = Y'(t)$, alors, $X(t) = PY(t)$, on obtient

$$Y'(t) = D^nY(t)$$

i. e.

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m' \end{pmatrix} = D^n Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \lambda_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{pmatrix}$$

Par suite, $\frac{y_i'}{y_i} = \lambda_i$, ce qui donne

$$y_i(t) = c_i \exp(\lambda_i t)$$

Par substitution dans $X(t) = PY(t)$, nous obtenons

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 \exp(\lambda_1 t) \\ c_2 \exp(\lambda_2 t) \\ \cdot \\ \cdot \\ c_m \exp(\lambda_m t) \end{pmatrix}$$

i. e.

$$X(t) = (c_1 \exp(\lambda_1 t)) V_1 + (c_2 \exp(\lambda_2 t)) V_2 + ... (c_m \exp(\lambda_m t)) V_m$$

où les V_i sont les vecteurs propres qui forment les colonnes de la matrice P.

Exemple 76 *Soit le système suivant*

$$\begin{cases} x_1' &= x_1 + 3x_2 \\ x_2' &= 2x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

Mettons-le sous la forme matricielle, nous avons

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ *associés à leurs valeurs :*

$$\left\{ V_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -1, \left\{ V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 4,$$

d'où, la solution est

$$\begin{aligned} X(t) &= (c_1 \exp(-t)) V_1 + (c_2 \exp 4t) V_2 \\ &= \left(c_1 \left(-\frac{3}{2} \right) \exp(-t) + c_2 \exp(4t), c_1 \exp(-t) + c_2 \exp(4t) \right) \end{aligned}$$

Cas d'une équation differentielle linéaire

Théorème 77 *Toute équation différentielle (explicite) d'ordre $n \geq 1$, linéaire, peut être transformée en un système de n équations différentielles du 1er ordre.*

Soit donc l'équation différentielle explicite d'ordre n :

$$a_0 y + a_1 y' + ... + a_{n-1} y^{(n-1)} + y^{(n)} = 0$$

Introduisons n nouvelles fonctions :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} z_1 & = & y \\ z_2 & = & y' \\ . & . & . \\ . & . & . \\ z_n & = & y^{(n-1)} \end{array} \right.$$

En dérivant les deux cotés du système, l'équation différentielle est alors équivalente au système différentiel portant sur les nouvelles variables

$$\left\{ \begin{array}{ccc} z_1' & = & z_2 \\ z_2' & = & z_3 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ z_n' & = & y^{(n)} \end{array} \right.$$

i. e.

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ . \\ . \\ z_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \cdot & \cdot\cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdot & \cdot\cdot & 0 \\ . & . & \cdot\cdot & \cdot\cdot & . \\ . & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & . \\ -a_0 & -a_1 & \cdot\cdot & \cdot & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ . \\ . \\ z_n \end{pmatrix}$$

Ainsi, nous avons retourné au premier cas de cette section.

Exemple 78 *Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 3y' + 2y = 0$. Appliquons ce qui précède, nous obtenons : $y'' = -2y - 3y'$*

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ associés à leurs valeurs :

$$\left\{ V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -1, \left\{ V_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -2,$$

ce qui donne la solution :

$$\begin{array}{rcl} Z(t) & = & (c_1 \exp(-t)) V_1 + (c_2 \exp(-2t)) V_2 \\ & = & \left(-c_1 \exp(-t) - \frac{1}{2} c_2 \exp(-2t), c_1 \exp(-t) + c_2 \exp(-2t) \right) \end{array}$$

Exponentiel d'une mmatrice

Soit X une matrice carrée d'ordre n, réelle ou complexe, $\exp X$ est donnée par la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k$. Donc obtenir un exponentiel d'une matrice carrée par la série est seulement approximatif en général. Mais si nous savons obtenir $\exp J_n(\lambda)$, $\exp D$, $\exp N$, où $J_n(\lambda)$ un bloc de Jordan, D matrice diagonale, et N nilpotente ($N^s = 0$ à partir d'un certain s) , alors $\exp X$, X générale devient possible. on a

$$\begin{aligned}
\exp N &= I + \frac{1}{2}N + ..\frac{1}{(s-1)!}N^{s-1} \\
\exp D &= diag(\exp \lambda_1, ... \exp \lambda_n) \\
J_n(\lambda) &= \lambda I_n + N \Rightarrow \exp J_n(\lambda) = dig(\exp \lambda, ..., \exp \lambda) + \exp N \\
A &= P \bigoplus_{i=1}^{l} J_i P^{-1} \Rightarrow \exp A = P \left(\bigoplus_{i=1}^{l} (\exp J_i) \right) P^{-1},\ J_i \text{ blocs de Jordan}
\end{aligned}$$

Série des exercices

Exercice 79 *Résoudre le système différentiel suivant* $\left\{ \begin{array}{rcl} x_1' &=& x_1 + 4x_2 \\ x_2' &=& \frac{1}{2}x_1 \end{array} \right.$

Exercice 80 *Même question pour le système*

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Exercice 81 *Résoudre* $y'' + by' + cy = 0$

Exercice 82 *Résoudre le système des suites récurrentes linéaires donné par*

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix},\ avec\ \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 83 *Donner le terme général de la suite récurrente suivante en fonction de ses premiers termes connus.*

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} + 4x_n + 5x_{n-1},\ n \geq 1,\ avec\ x_0 = 1 = x_1,\ \ x_2 = 2$$

Exercice 84 *Soit A une matrice réelle d'ordre 4 telle que*

$$A^3 = 5A - 2I$$

1. *Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A.*
2. *Écrire la forme réduite de Jordan de A.*
3. *En déduire les espaces propres et les espaces caractéristiques de A et leurs dimensions.*
4. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire réelle satisfaisant la relation de récurrence*

$$u_{n+3} - 5u_{n+1} + 2u_n = 0$$

et

$$u_0 = 1,\ u_1 = -1,\ u_2 = 0$$

Déterminer le terme général u_n en fonction de n et les premiers termes donnés en haut.

5. *Résoudre l'équation differentielle*

$$y^{(3)} - 5y' + 2y = 0$$

Exercice 85 *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer les droites vectorielles invariantes par A.*
2. *Donner* $\exp A$.

Quelques sujets de contrôles de l'algèbre 3

Contrôle d'algèbre 3 (18 Janvier 2017)

Université L'Arbi Ben Mhidi, Oum-El-Bouaghi
Faculté SENV, Département de M.I.

Cotrôle d'algèbre 3

18 Janvier 2017

Instructions. Nom, prénom et classe doivent être figurés sur la copie. Écrire plus lisiblement ave un stylo bleu ou noir. Toute réponse non justifiée sera considérée nulle. Toute copie mal présentée ne sera pas corrigée.

1. **Exercice**.(a : 5 points, b : 5 points)

   (a) Déterminer le polynôme minimal de la matrice A et sa forme réduite de Jordan.

   $$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   (b) Résoudre le système d'équations différentielles linéaires

   $$\begin{cases} x'(t) &= 3x(t) - z(t) \\ y'(t) &= 2x(t) + 4y(t) + 2z(t) \\ z'(t) &= -x(t) + 3z(t) \end{cases}$$

2 **Exercice**.(a : 1 point, b : 3 points)

   (a) Étant donée une matrice A d'ordre 3 satisfaisant $A(A - I) = 0$. A est elle diagonalisable ?

   (b) Écrire les formes réduites de Jordan possibles pour la matrice A.

3 **Exercice**.(6 points)

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

avec $\lambda \neq 0$. Manipuler la matrice A pour obtenir sa puissance A^n en utilisant la forme réduite de Jordan.

Contrôle de rattrapage d'algèbre 3 (Mars 2017)

Université L'Arbi Ben Mhidi, Oum-El-Bouaghi
Faculté SENV, Département de M.I.

Cotrôle de rattrapage d'algèbre 3

Mars 2017

Instructions. Nom, prénom et classe doivent être figurés sur la copie. Écrire plus lisiblement ave un stylo bleu ou noir. Toute réponse non justifiée sera considérée nulle. Toute copie mal présentée ne sera pas corrigée.

Exercice 1 (10 points) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

a Déterminer $\ker(A + I)$ en déduisant une valeur propre de A.

b À l'aide de $Tr(A)$ et $\det A$, déterminer les autres valeurs propres. A est-elle diagonalisable ?

c Déduire le polynôme caractéristique et la forme réduite de Jordan de A.

d Déduire le polynôme minimal de A (Donc qui calcule le polynôme minimal la réponse sera considérée fausse)

e A est-elle inversible ? Sans calcul, déduire son inverse

Exercice 2 (5 points) Soit une suite récurrente réelle donnée par la relation de récurrence

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n,\ u_0 = 1,\ u_1 = 4$$

À l'aide de la diagonalisation d'une matrice, déterminer le terme général u_n en fonction de u_0 et u_1.

Exercice 3(5 points) Déterminer

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

Contrôle d'algèbre 3 (15 Janvier 2018)

Université L'Arbi Ben Mhidi, Oum-El-Bouaghi
Faculté SENV, Département de M.I.

Cotrôle d'algèbre 3

15 Janvier 2018

Instructions. Nom, prénom et classe doivent être figurés sur la copie. Écrire plus lisiblement ave un stylo bleu ou noir seulement. Toute réponse non justifiée sera considérée nulle. Toute copie mal présentée ne sera pas corrigée.

Exercice 1 (2 points à chaque question) Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de M.
2. Peut-on Appliquer le lemme des noyaux ?
3. En déduire les sous espaces invariants de M.
4. Déterminer le polynôme minimal De M.
5. En déduire La forme réduite de Jordan de M (sans calculer la matrice de passage)
6. En déduire les dimensions des sous espaces propres de M.
7. Déterminer $M + M^{15} + M^{2018}$.

Exercice 2 (6 points) Déterminer l'exponentiel de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solution du contrôle d'algèbre 3, 2018

Je note d'abord que le corrigé type contient des explications pour les étudiants afin de comprendre mieux. (Le but n'est pas de donner un corrigé type de l'examen pour que les étudiants sachent leurs erreurs seulement mais aussi de les aider à réviser leurs cours).

Solution de l'exercice 1 2 points pour chaque question.

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Le polynôme caractéristique de M. Mettons la matrice M en blocs $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, où $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} c(X) &= \det(XI_5-M)=\det(XI_3-A)\det(XI_2-C) \\ &= X^2(X-2)(X-1)^2 \end{aligned}$$

2. Oui nous pouvons appliquer le lemme des noyaux en prenant

   $P(X)=c(X)$, $P_1(X)=X^2$, $P_2(X)=(X-2)$, $P_3(X)=(X-1)^2$

   Ainsi,

   $$p\gcd(P_1(X),P_2(X),P_3(X))=1$$

   et par le théorème de Cayley-Hamilton, on a $c(M)=0$, ce qui donne

   $$E=\ker P_1(M)\oplus\ker P_2(M)\oplus\ker P_3(M)$$

   Nous pouvons aussi prendre deux polynômes seulement, par exemple $P_1(X)$ et $Q(X)=P_2(X)P_3(X)$ (ou les autres possibilités $P_2(X)$ et $Q(X)=P_1(X)P_3(X)$, $P_3(X)$ et $Q(X)=P_1(X)P_2(X)$). Dans ces cas, E sera la somme directe de deux sous espaces invariants relativement aux polynômes choisis.

3. Les sous espacs invariants de M sont en plus de l'espace entier E et l'espace trivial $\{0\}$ sont $\ker P_1(M)$, $\ker P_2(M)$ et $\ker P_3(M)$.

4. Le polynôme minimal de M, le polynôme minimal doit contenir tous les facteurs de $c(X)$ avec des multiplicités minimales. Après le calcul, on a

   $$m(X)=c(X)$$

5. La forme réduite de Jordan de M (à un ordre près des blocs)

$$P^{-1}MP = J_2(0) \oplus J_1(2) \oplus J_2(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix} = J$$

6. Les valeurs propres sont $0, 2, 1$, d'où les espaces propres sont $\ker M$, $\ker(M - 2I_5)$, $\ker(M - I_5)$.
Comme à chaque valeur propre nous avons un seul bloc de Jordan associé, alors nous déduisons que les dimensions des sous espaces propres de M sont

$$\dim \ker M = 1,\ \dim \ker(M - 2I_5) = 1,\ \dim \ker(M - I_5) = 1$$

7.
$$M + M^{15} + M^{2018} = P\left(J + J^{15} + J^{2018}\right)P^{-1}$$
Donc, il suffet de déterminer J^{15} et J^{2017}, on a $J_2(0)$ est nilpotent d'indice 2, d'où $(J_2(0))^{15} = 0$. Pour tout entier k,nous avons

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} M^{15} &= (J_2(0))^{15} \oplus (J_1(2))^{15} \oplus (J_2(1))^{15} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & 2^{15} & & \\ & & & 1 & 15 \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ M^{2018} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & 2^{2018} & & \\ & & & 1 & 2018 \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ M + M^{15} + M^{2018} &= P\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 2 + 2^{15} + 2^{2018} & \\ & & & \begin{matrix} 3 & 2034 \\ 0 & 3 \end{matrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2 6 points.

Déterminons e^A où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Il suffet de donner e^A en fonction de la matrice de passage P. (ce n'est pas necissaire de calculer P)

Remarquons d'abord que la matrice A est le premier bloc de la matrice M dans l'exercice 1. Donc nous avons le polynôme caractéristique

$$c_A(X) = X^2(X-2)$$

Alors les valeurs propres sont $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 2$. Le polynôme minimal est $m(X) = c(X)$. Ainsi la forme réduite de Jordan de A est

$$A = P\left(J_2(0) \oplus J_1(2)\right)P^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$$

Par suite

$$e^A = P\left(e^{J_2(0)} \oplus e^2\right)P^{-1}$$

Utilisons l'exponentiel $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$ et du fait que $J_2(0)$ est nilpotent d'indice 2, nous avons

$$e^{J_2(0)} = I_2 + J_2(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$e^A = P\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ 0 & 1 & \\ & & e^2 \end{pmatrix}P^{-1}$$

Bibliographie

[1] J. P. Escofier, Toute l'algèbre de la licence, 4th Edition, Dunod, 2000.

[2] Seymour Lipschutz,Algèbre Linéaire, Cours Et Problèmes 600 Exercices Résolus, Temple University Editeur : Mcgraw-Hill, Collection : Série Schaum, 1987.

[3] GILBERT STRANG, Introduction to Linear Algebra, Fifth Edition, Wellesley-Cambridge Press and SIAM, (2016)

[4] Mark Steinberger, A connection between number theory and linear algebra, http ://www.albany.edu/~mark/numlin.pdf, January 31,(2012), 1-15.

[5] Mark Steinberger, Algebra, PWS, (1994), 558 pages.