الفصل الثانى: الموائع فى حالة سكون

Chapter II: Fluid Statics

1 المقدمة:

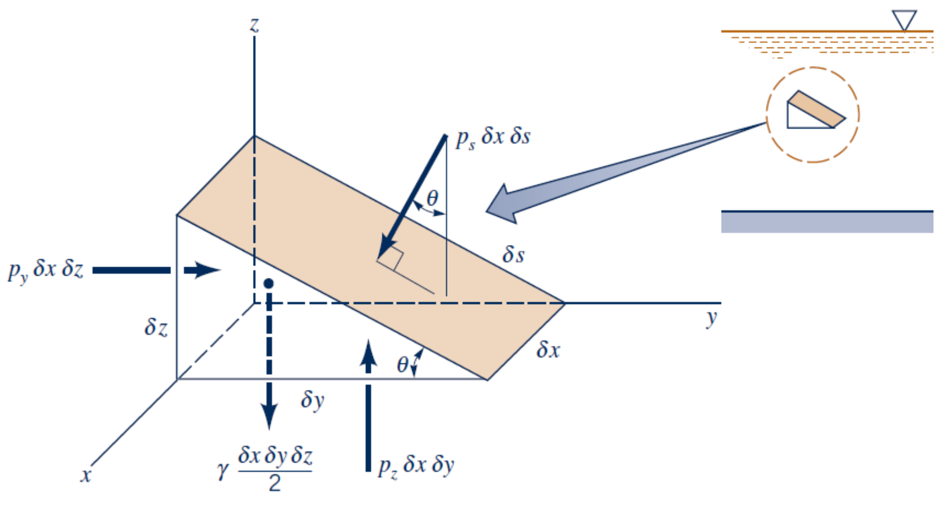
سندرس الموائع في حالة السكون أو الحركة دون حركة نسبية بين الجزيئات المتجاورة. في كلتا الحالتين لا توجد قوى احتكاك في المائع، كل القوى التي تنشأ على الأسطح ترجع إلى الضغط. الهدف إذن هو معرفة الضغط وتغيره في المائع وتأثيره على الأسطح المغمورة. يبسط غياب الاحتكاك التحليل ويجعل من الممكن الحصول على حلول بسيطة نسبيًا لبعض المشكلات ذات الأهمية العملية.

Introduction :

We will consider fluids at rest or in motion without relative motion between adjacent particles. In both cases, there are no frictional forces in the fluid; all the forces that develop on the surfaces are due to pressure. The goal is, therefore, to know the pressure and its variation through the fluid and its effect on the submerged surfaces. The absence of friction simplifies the analysis and makes it possible to obtain relatively simple solutions to some problems of practical interest.

1) الضغط عند نقطة:

يستخدم مصطلح الضغط للإشارة إلى القوة العمودية لكل وحدة مساحة عند نقطة ما والتي تؤثر داخل كتلة السائل. سنرى كيف يختلف الضغط في نقطة ما وفقًا لاتجاه المستويات التي تمر عبر هذه النقطة. لهذا، نأخذ الجزء من السائل الموضح في الشكل.



القوى الوحيدة التي تؤثر على الحجم هي قوى الضغط ووزن السائل. لتبسيط التحليل، لن نمثل اتجاه x. معادلة نيوتن الثانية ($\sum \vec{F} = m\vec{a}$) مكتوبة في اتجاهات y وz:

$$\sum F_y = P_y \delta x \delta z - P_s \delta x \delta s \sin\theta = \rho \frac{\delta x \delta y \delta z}{2} a_y \qquad 2.1$$

$$\sum F_z = P_z \delta x \delta y - P_s \delta x \delta s \cos\theta - \gamma \frac{\delta x \delta y \delta z}{2} = \rho \frac{\delta x \delta y \delta z}{2} a_z \qquad 2.2$$

من الشكل لدينا: $\delta z = \delta s \sin\theta \quad \delta y = \delta s \cos\theta$

التعويض يعطي:

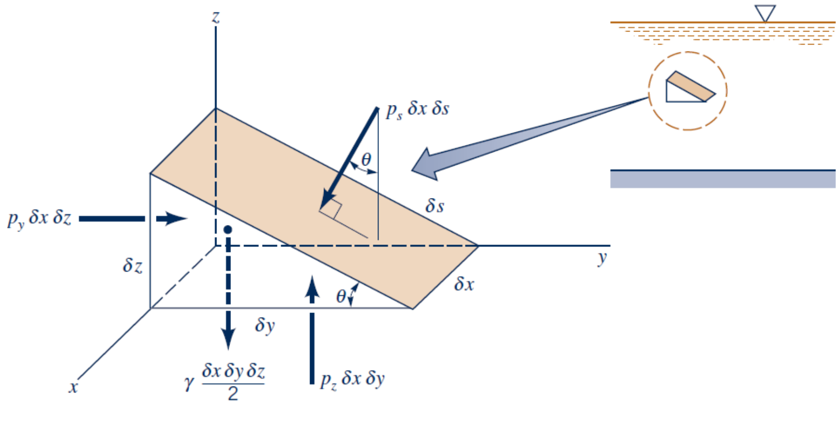
$$P_y - P_s = \rho \frac{\delta y}{2} a_y \qquad 2.3$$

$$P_z - P_s = (\gamma + \rho a_z) \frac{\delta z}{2} \qquad 2.4$$

نظرًا لأننا مهتمون بما يحدث في نقطة ما، فإن δx و δy و δz ستؤول إلى الصفر ونحصل على: $P_y = P_s$ و $P_z = P_s$ أو $P_s = P_z = P_y$ مهما كانت الزاوية θ. هذا يثبت أن الضغط في نقطة ما في حالة ركود أو سكون مستقل عن الاتجاه، وهو قانون بلاز باسكال-Blaise Pascal -.

1) Pressure in a point :

The term pressure is used to indicate the normal (perpendicular) force per unit area at a point which acts on a plane in the mass of the fluid in question. We will see how the pressure varies at a point depending on the orientation of the planes passing through this point. To do this, let us take any portion of a fluid shown in Figure 1.



The only forces that act on the volume are those of pressure and the weight of the fluid. To simplify the analysis, we will not represent the x direction. Newton's second equation ($\sum \vec{F} = m\vec{a}$) is written in the y and z directions:

$$\sum F_y = P_y\delta x\delta z - P_s\delta x\delta s\, sin\theta = \rho\frac{\delta x\delta y\delta z}{2}a_y \qquad 2.1$$

$$\sum F_z = P_z\delta x\delta y - P_s\delta x\delta s\, cos\theta - \gamma\frac{\delta x\delta y\delta z}{2} = \rho\frac{\delta x\delta y\delta z}{2}a_z \qquad 2.2$$

From geometry we have: $\delta y = \delta s\, cos\theta \quad \delta z = \delta s\, sin\theta$

The replacement gives :

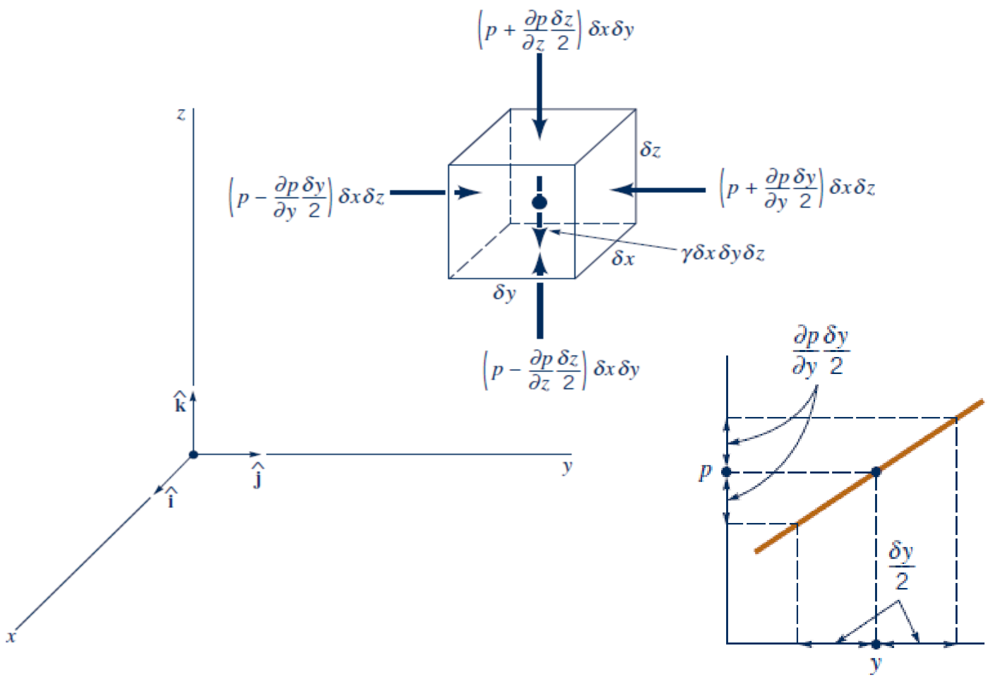
$$P_y - P_s = \rho\frac{\delta y}{2}a_y \qquad 2.3$$

$$P_z - P_s = (\gamma + \rho a_z)\frac{\delta z}{2} \qquad 2.4$$

Since we are interested in what happens in a point, δx, δy and δz will tend towards zero and we obtain: $P_y = P_s$ et $P_z = P_s$ or $P_s = P_z = P_y$ whatever the angle θ. This proves that the pressure in a point of a stagnant fluid is independent of the direction, this is Blaise Pascal's law.

2) القانون الأساسي للسكون (معادلة مجال الضغط)

لقد رأينا كيف يتغير الضغط في نقطة ما وفقًا للاتجاه، والآن سنرى كيف يتغير الضغط في مائع في حالة سكون حيث لا توجد فيه قوى احتكاك. نأخذ عنصر من المائع ممثل بحجم متوازي الاسطح يسمى حجم التحكم-volume de contrôle-، اذا فالحجم δV = δxδyδz في المعلم (O،x،y،z) ، الشكل.



يتم تطبيق نوعين من القوى على عنصر الحجم:

- قوى الحجم: الوزن (الناتج عن حقل الجاذبية في هذه الحالة) ، $\delta\vec{W}$.
- القوى السطحية: القوى الناتجة عن الضغط، $\delta\vec{F}$.

تتم كتابة قوى الحجم الممثلة بوزن حجم السائل:

$$\delta\vec{W} = \delta m\vec{g} = \rho\delta V\vec{g} = -\rho g\delta V\vec{k} \qquad 2.5$$

يمكن أن تتحلل قوى السطح في الاتجاهات الثلاثة x و y و z على النحو التالي:

$$\delta\vec{F} = \delta F_x\vec{\imath} + \delta F_y\vec{\jmath} + \delta F_z\vec{k} \qquad 2.6$$

هذه قوى عمودية على الأسطح، مجموع القوى في الاتجاه y على سبيل المثال والتي تعمل على السطح δxδz يعطي:

$$\delta F_y = \left(p - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x\delta z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x\delta z = -\frac{\partial p}{\partial y}\delta x\delta y\delta z$$

وبالمثل نجد:

$$\delta F_x = -\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\delta y\delta z$$

$$\delta F_z = -\frac{\partial p}{\partial z}\delta x\delta y\delta z$$

وهكذا نحصل على القوة في الاتجاهات الثلاثة:

$$\delta\vec{F} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right)\delta x\delta y\delta z = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right)\delta V \qquad 2.7$$

ندخل مفهوم التدرج:

$$\vec{\nabla}(\square) = \frac{\partial(\square)}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial(\square)}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial(\square)}{\partial z}\vec{k}$$

حيث نختصر الكتابة:

$$\delta\vec{F} = -\vec{\nabla}p\delta V \qquad 2.8$$

كتابة قانون نيوتن الثاني لحجم التحكم هذ يعطي $\sum\delta\vec{F} = \delta m\vec{a}$ اذن:

$$\delta\vec{W} + \delta\vec{F} = \delta m\vec{a} \leftrightarrow -\rho g\delta V\vec{k} - \vec{\nabla}p\delta V = \rho\delta V\vec{a}$$

بما ان $\gamma = \rho g$ هذا ما يعطي:

$$-\gamma\vec{k} - \vec{\nabla}p = \rho\vec{a}$$

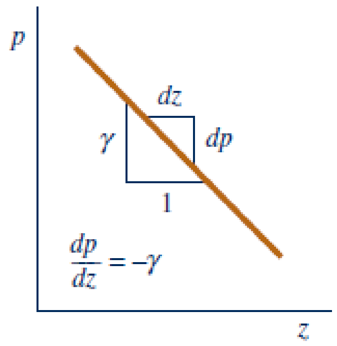
هذه المعادلة صالحة للسائل حيث تكون قوى الاحتكاك معدومة. في حالتنا أيضًا، يكون المائع في حالة سكون، وهذا يعني أن التسارع يساوي صفرًا عندئذ $\vec{a} = \vec{0}$ سيكون لدينا: $\gamma\vec{k} + \vec{\nabla}p = 0$

و عند تفكيك الكتابة في شكل مكونات نحصل على: $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ و $\frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma$

توضح هذه المعادلات أن الضغط لا يتغير في المستويات الأفقية $P \neq P(x)$ و $P \neq P(y)$.

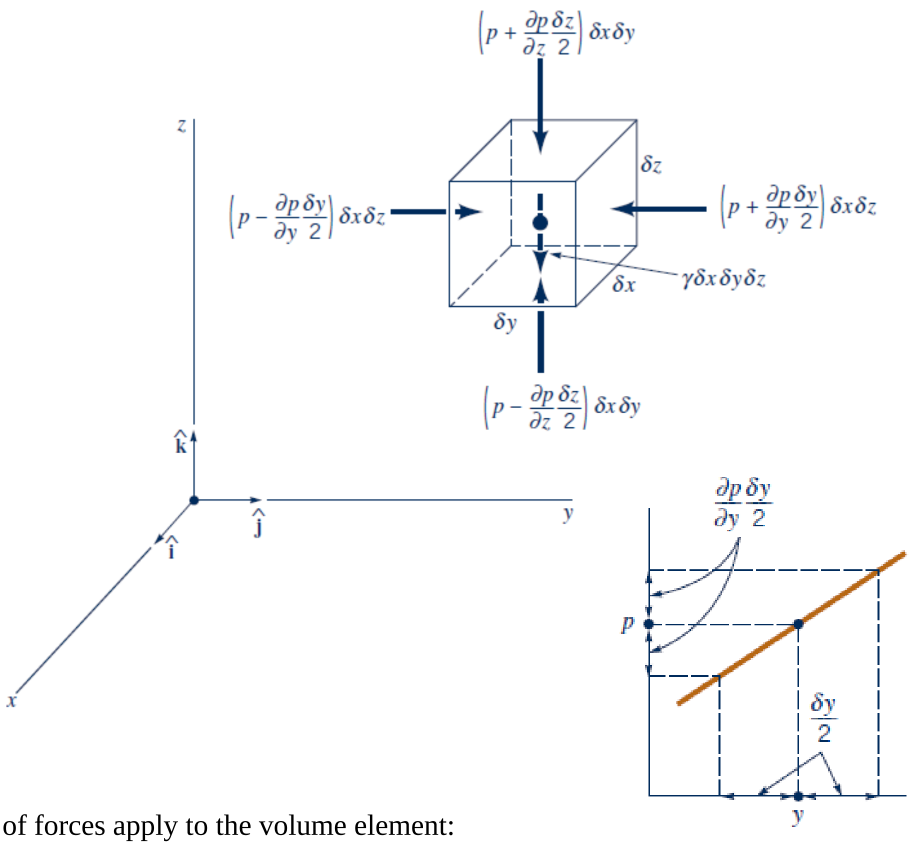
إذن المعادلة هي: $\frac{dp}{dz} = -\gamma$

هذه هي المعادلة التي يجب حلها لمعرفة الضغط عند أي نقطة في المائع الساكن. بالنسبة للموائع أو الغازات في حالة السكون، يتغير الضغط في الاتجاه العمودي في أي نقطة من المائع سلبيا (الشكل)، ويعتمد فقط على الثقل النوعي للمائع عند هذه النقطة.



2) <u>Fundamental law of statics (Pressure field equation)</u>

We have already seen how the pressure varies in a point depending on the direction; now, we will see how the pressure varies in a fluid at rest in which there are no friction forces. Let us consider an element of fluid volume at rest of parallelepiped shape, of volume $\delta V=\delta x\delta y\delta z$ in the frame (O,x,y,z), figure 2.



Two types of forces apply to the volume element:

- **Volume forces: Weight (generated by a field in this case of gravity),** $\delta\vec{W}$.
- **Surface forces: The forces generated by pressure** $\delta\vec{F}$.

The volume forces represented by the weight of the volume of fluid are written:

$$\delta\vec{W} = \delta m\vec{g} = \rho\delta V\vec{g} = -\rho g\delta V\vec{k} \qquad 2.5$$

The negative sign is inserted since the force of the weight is directed in the negative direction of z.

The surface forces can be decomposed in three directions: x,y and z as follows :

$$\delta\vec{F} = \delta F_x\vec{\imath} + \delta F_y\vec{\jmath} + \delta F_z\vec{k} \qquad 2.6$$

These are forces normal to the surfaces, the sum of the forces in the y direction for example and which acts on the surface δxδz gives : $\delta F_y = \left(p - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x\delta z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x\delta z = -\frac{\partial p}{\partial y}\delta x\delta y\delta z,$ similarly : $\delta F_x = -\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\delta y\delta z$ et $\delta F_z = -\frac{\partial p}{\partial z}\delta x\delta y\delta z.$

From where we obtain the force in the three directions:

$$\delta\vec{F} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right)\delta x\delta y\delta z = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right)\delta V \qquad 2.7$$

We introduce the grad notation $\vec{\nabla}(\square) = \frac{\partial(\square)}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial(\square)}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial(\square)}{\partial z}\vec{k}$, so $\delta\vec{F} = -\vec{\nabla}p\delta V$ 2.8

Newton's send law for this control volume is written $\sum\delta\vec{F} = \delta m\vec{a}$ so :

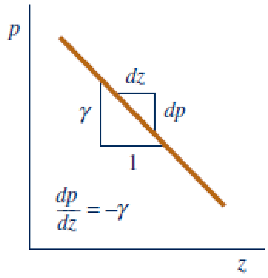
$\delta\vec{W} + \delta\vec{F} = \delta m\vec{a} \leftrightarrow -\rho g\delta V\vec{k} - \vec{\nabla}p\delta V = \rho\delta V\vec{a}$ which gives $-\gamma\vec{k} - \vec{\nabla}p = \rho\vec{a}$ 2.9

since $\gamma = \rho g$. This equation is valid for a fluid where the friction forces are negligible. In our case the fluid is also at rest, this means that the acceleration is zero $\vec{a} = \vec{0}$. We will have $\gamma\vec{k} + \vec{\nabla}p = \vec{0}$ in component form $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ et $\frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma$ 2.10

These equations show that the pressure does not vary in the horizontal planes *P≠P(x) et p(y).*

So the equation is : $\frac{dp}{dz} = -\gamma$ 2.11

This is the equation to solve to know the pressure at any point of the fluid at rest. For liquids or gases at rest, the pressure gradient in the vertical direction at any point of the fluid is negative (figure 3), it depends only on the specific weight of the fluid at this point.

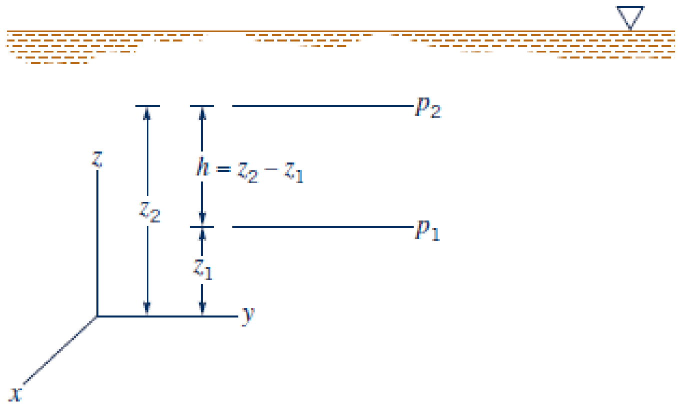


3.التطبيق على الموائع غير القابلة للانضغاط:

في هذه الحالة ρ = cste في كل مكان، يمكننا أيضًا اعتبار g ثابتًا وبالتالي γ = ρg = cste مما يعطي $\frac{dp}{dz} = -\gamma = cte$.

نأخذ مائعا (الشكل) ونقوم بتطبيق المعادلة.

السطح الحر (p=p_0)

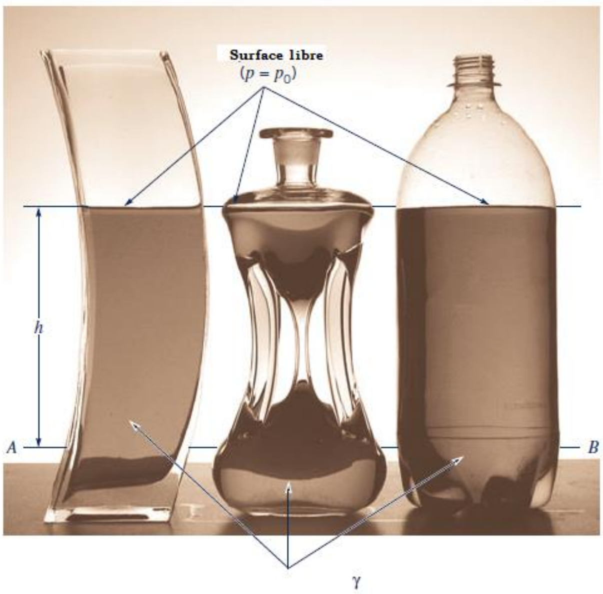


لحساب P نكامل المعادلة $\frac{dp}{dz} = -\gamma = cte$:

$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\gamma \int_{z_1}^{z_2} dz$ نجد $p_2 - p_1 = -\gamma(z_2 - z_1)$ أو $p_1 - p_2 = \gamma(z_2 - z_1)$

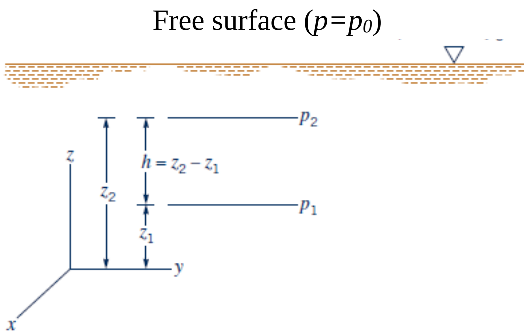
حيث p_1 و p_2 هي الضغوط عند الارتفاعات z_1 و z_2 ، يمكننا أيضًا كتابة المعادلة في شكل مبسط $p_1 - p_2 = \gamma h$ أو $p_1 = p_2 + \gamma h$ مع h المسافة $z_2 - z_1$.

توضح هذه المعادلة أن الضغط يزداد مع العمق h، ويسمى الضغط الهيدروستاتيكي، أي في حالة السكون أو الركود. نلاحظ أيضًا أنه يمكن تحديد فرق الضغط بواسطة $h = \frac{(p_1 - p_2)}{\gamma}$ ونشير إليه بـ "الارتفاع". يتم تفسيره على أنه ارتفاع السائل الضروري للحصول على فرق الضغط $p_1 - p_2$. عند العمل على السوائل حيث يوجد دائمًا سطح حر (الشكل)، فإننا نشير إلى الضغط عند هذا السطح بمقدار p0، وهذا يعني أن الضغط عند أي عمق h من هذا السطح هو $p = \gamma h + p_0$. هذه المعادلة تظهر أيضًا أن الضغط لا يعتمد على حجم أو شكل الخزان أو الحاوية، يعتمد فقط على h، مما يعني أن الضغط ثابت الخط الأفقي AB (الشكل).



3) Application to incompressible fluids:

In this case ***ρ=cste*** everywhere, we can also consider g as constant and therefore $\gamma = \rho g = cste$, this implies that $\frac{dp}{dz} = -\gamma = cte$. Let's take a fluid in the figure and apply the equation found.



To calculate P, we proceed by integration:

$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\gamma \int_{z_1}^{z_2} dz$

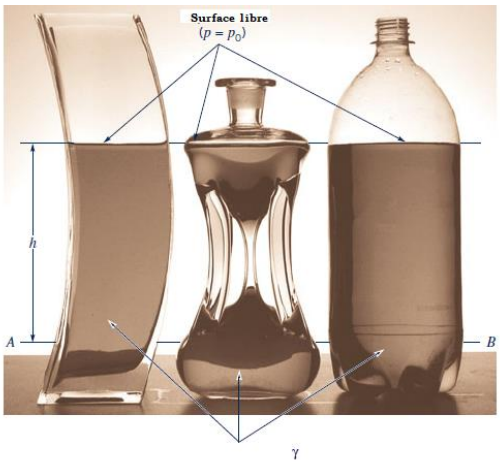
hence $p_2 - p_1 = -\gamma(z_2 - z_1)$

or else $p_1 - p_2 = \gamma(z_2 - z_1)$ 2.12

Where p_1 and p_2 are the pressures at elevations z_1 and z_2, we can also write the equation in a compact form $p_1 - p_2 = \gamma h$ or $p_1 = p_2 + \gamma h$ with h the distance $z_2 - z_1$.

This equation shows that the pressure distribution increases with depth h, it is called hydrostatic distribution. We also note that the pressure difference can be specified by $h = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$ and we denote it by "elevation". It is interpreted as the height of fluid necessary to obtain the pressure difference $p_1 - p_2$. When we work with liquids where there is always a free surface (figure 4) we note the pressure at this surface by p_0.

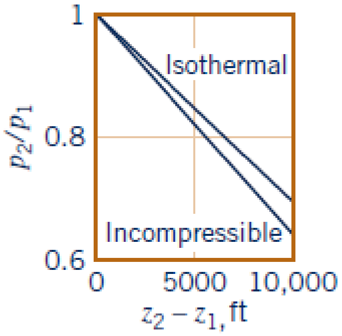
This implies that the pressure at any depth h of this surface is $p = p_0 + \gamma h$. This equation also shows that pressure does not depend on volume or shape of the tank or container, it only depends on h, which implies that the pressure is constant on the horizontal line AB (figure 5).



4. التطبيق على السوائل القابلة للانضغاط:

بشكل عام، تكون الغازات قابلة للانضغاط نظرًا لأن كتلتها الحجمية تختلف باختلاف الضغط ودرجة الحرارة، فنحن نأخذ حالة الغاز المثالي، من معادلته لدينا $\rho = \frac{P}{RT}$

من ناحية أخرى وجدنا أنه $\frac{dp}{dz}=-\gamma$ نعوض الكتلة الحجمية من معادلة الغاز فنجد $\frac{dp}{dz}=-\frac{Pg}{RT}$ نفصل المتغيرات مع افتراض أن g و R ثابتين ونكامل :



$$\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p}=\ln\frac{p_2}{p_1}=-\frac{g}{R}\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{T}$$

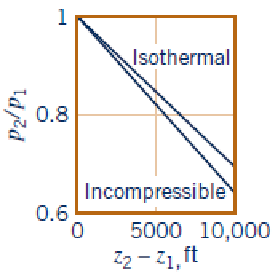
إذا افترضنا أن درجة الحرارة لا تتغير حسب الارتفاع z، سيكون لدينا:

$$p_2=p_1 exp\left[-\frac{g(z_2-z_1)}{RT_0}\right]$$

4) Application to compressible fluids:

Generally, it is the gases which are compressible since their densities vary with the pressure and the temperature, we take the case of an ideal gas or $\rho=\frac{P}{RT}$

on the other hand $\frac{dp}{dz}=-\gamma$ or $\frac{dp}{dz}=-\frac{Pg}{RT}$, let's separate the variables by assuming that g and R are constant and integrate $\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p}=\ln\frac{p_2}{p_1}=-\frac{g}{R}\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{T}$. If we assume that the temperature does not vary as a function of height z (isothermal), we will have



$$p_2=p_1 exp\left[-\frac{g(z_2-z_1)}{RT_0}\right]$$

5. قياس الضغط

الضغط متغير مهم جدًا في ميكانيكا الموائع، وهو القوة مقسومة على المساحة (الإجهاد)عند نقطة من المائع. الضغط دائمًا عمودي على السطح المعني حيث نكتب:

$$P=\frac{F}{S}\equiv\left[\frac{N}{m^2}\right]\equiv Pa$$

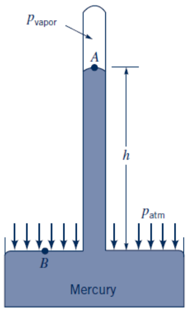
الضغط لا يتعلق بمساحة الوعاء بل بالعمق فقط ويمكن برهنة هذا من خلال أخذ خزانين بارتفاع h مع مساحتين مختلفين S و 'S يحتويان على نفس السوائل. القوة الضاغطةعند القاعدة: F = mg = ρVg = Shg ،F '= m'g = V'g = S'hg . أما الضغط في القاعدة: P = F / S = hg و P '= F / S' = hg. نلاحظ أنه عند القاعدة لدينا نفس الضغط لنفس الارتفاع.

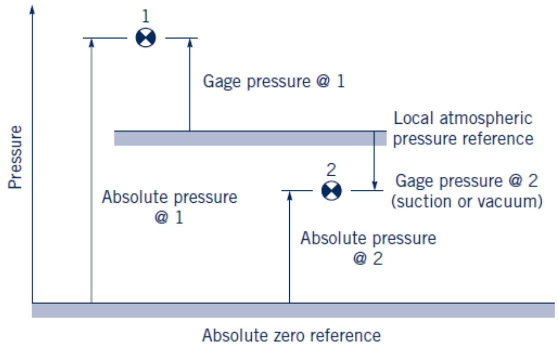
بشكل عام، يتم استخدام ثلاثة أنواع من الضغوط، الضغط المطلق أو الفعال أو النسبي والضغط الجوي. المطلق هو مجموع الاثنين الآخرين:

$$P_{abs}=P_{atm}+P_{gauge} \qquad 2.13$$

يقال للضغط:

- الضغط المطلق، إذا تم قياسه بالنسبة للفراغ المطلق (ضغط صفري)، فهو دائمًا إيجابي.
- الضغط الفعال، إذا تم قياسه مقابل الضغط الجوي المحلي، يمكن أن يكون موجبًا أو سالبًا (أعلى أو أقل من الضغط الجوي).
- الضغط الجوي ناتج عن وزن الهواء ويقاس عادة بمقياس ضغط الزئبق.





<u>قياس الضغط الجوي:</u>

يتم قياس الضغط الجوي بواسطة مقياس الضغط الجوي، وهناك عدة أنواع في الوقت الحاضر. الأبسط هو مقياس الزئبق، حيث يكون الضغط الجوي مساويًا لضغط ارتفاع عمود الزئبق:

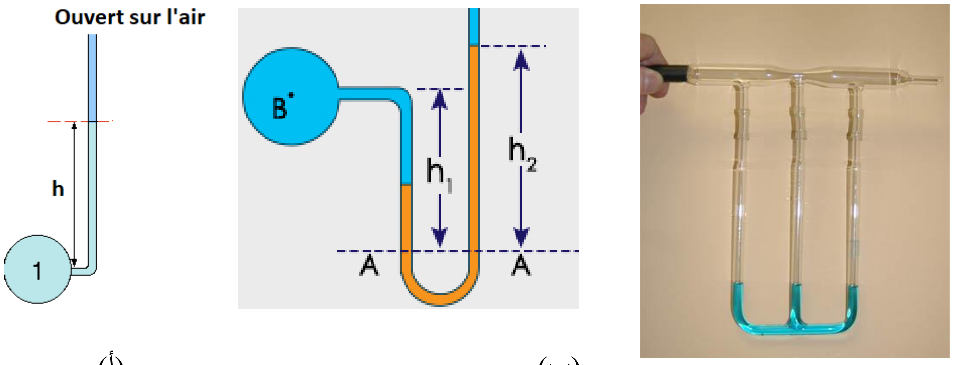
$$P_B = \rho g h + P_A \rightarrow P_{atm} = \rho g h + P_{vapeur} \approx \rho g h \qquad 2.14$$

<u>قياس الضغط الفعال و المطلق</u>

الضغط المطلق هو مجموع الضغط الجوي والضغط الفعال، نظرًا لأن الضغط الجوي يتم إعطاؤه مباشرة بواسطة مقياس الضغط الجوي، يبقى قياس الضغط الفعال، حيث نستخدم أجهزة قياس الضغط التي تشكلها أنابيب قياس الضغط أو المانومتر.

<u>تعريف قياس الضغط:</u> هو أسلوب قياسي لقياس الضغوط، ويستخدم أعمدة السوائل في أنابيب قياس الضغط العمودية أو المائلة.

<u>تعريف الأنبوب البيزومتري -الحجاجي-:</u> هو أنبوب عمودي مفتوح، متصل بالحاوية التي نريد قياس الضغط فيها.



(أ) (ب)

أجهزة قياس الضغط تتكون من أنابيب قياس الضغط (أ) بسيطة و (ب) على شكل حرف U.

بالنسبة لمقياس الضغط (الشكل (أ)) فانه يتكون من أنبوب قياس ضغط عمودي مفتوح في الأعلى حيث يكون الضغط $P = P_{atm}$ ، نطبق في النقطة 1 معادلة سكون الموائع، فنحصل على:

$$P_{abs1} = P_{atm} + \rho g h$$

في هذه الحالة الضغط الفعال هو:

$$P_{gauge} = P_{abs1} - P_{atm} = \rho g h$$

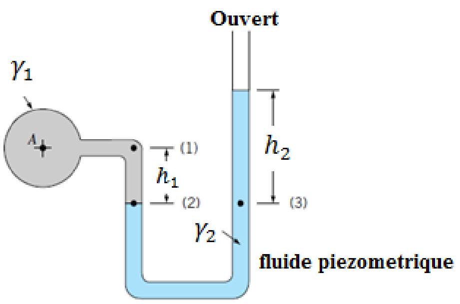
ونرمز له P عوض عن P_{eff}، يُطلق عليه أيضًا الضغط البيزومتري.

$$P_{gauge} = P = \rho g h \qquad 2.15$$

<u>مقياس الضغط على شكل حرف U:</u>

هذا أنبوب على شكل حرف U يستخدم فيه ما يسمى بسائل "قياس الضغط " و هذا لملائمة نوع الضغط، حيث تستخدم السوائل الخفيفة كالكحول ي الضغوط المنخفضة و السوائل الثقيلة كالزئبق في الضغوط المرتفعة.

حسب قانون سكون الموائع، الضغط في النقطة A يساوي :



$$P_{absA} = P_{atm} + \rho_2 g h_2 - \rho_1 g h_1$$

$$P_{absA} = P_A + P_{atm}$$

$$P_A = \rho_2 g h_2 - \rho_1 g h_1$$

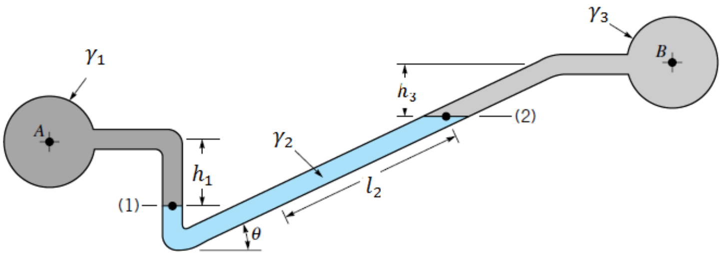
بشكل عام، تكتب معادلة مقياس الضغط على شكل حرف U:

$$P_A + \sum_{\text{نازل}} \rho_i g h_i - \sum_{\text{صاعد}} \rho_i g h_i = P_B \qquad 2.15$$

<u>مقياس الضغط المائل:</u>

لتضخيم نطاق القراءة في حالة الضغط المنخفض، يتم إمالة مقاييس الضغط. تنص المعادلة لهذا المثال على ما يلي:

$$P_A + \gamma_1 h_1 - \gamma_2 l_2 sin\theta + \gamma_3 h_3 = P_B$$
$$P_A - P_B = \gamma_2 l_2 sin\theta + \gamma_3 h_3 - \gamma_1 h_1$$

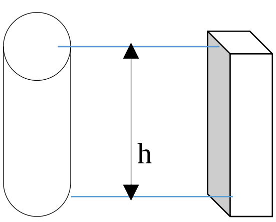


5) **<u>Pressure measurement</u>:**

As we have already seen, pressure is a very important scalar in fluid mechanics, the pressure at a point in a fluid is the force at that point divided by the surface area (stress). It is always normal to the surface in question. Pressure is calculated by unit surface, we can write:

$$P = \frac{F}{S} \equiv \left[\frac{N}{m^2}\right] \equiv Pa \quad \text{pascal.}$$

S=πR²   S'=a²



Pressure at a depth h depends only on the fluid properties and this depth. To demonstrate this, let's consider two tanks filled by a height h of the same fluid and have different sections S and S'. The force acting at a depth h is the weight of the fluid which is given by:

$F=mg=\rho Vg=\rho Shg$ and $F'=m'g=\rho V'g=\rho S'hg$

The pressure is : P=F/S= ρhg et P'=F/S'= ρhg

Notice that we get the same pressure.

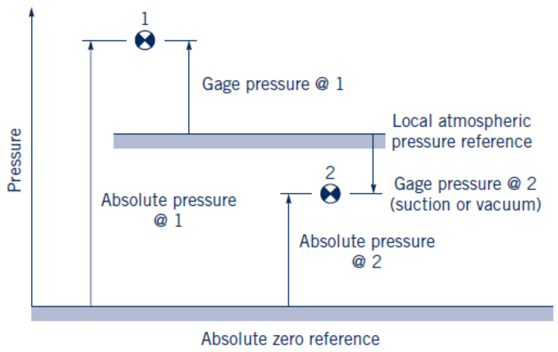
Generally, three types of pressure are used, absolute, gage or relative and atmospheric pressure. The absolute one is the sum of the other two:

$$P_{abs} = P_{atm} + P_{gauge} \qquad 2.13$$

The pressure is said:

- <u>Absolute pressure</u>, if measured relative to absolute vacuum (zero pressure), it is always positive.
- <u>Gauge (gage) pressure,</u> if measured relative to local atmospheric pressure, it can be positive or negative (above or below atmospheric).

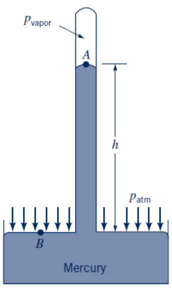
- Atmospheric pressure is usually measured by a mercury barometer.



7.1 Atmospheric pressure measurement :

Atmospheric pressure is given by a barometer, nowadays there are several types. The simplest is the mercury barometer, where the atmospheric pressure is equal to the pressure of the height of the column of mercury:

$$P_B = \rho g h + P_A \rightarrow P_{atm} = \rho g h + P_{vapor} \approx \rho g h \qquad 2.14$$

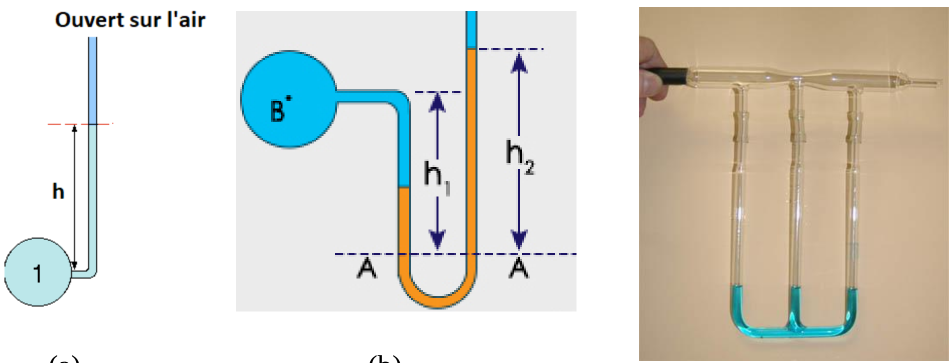


7.2 Measurement of gauge and absolute pressure:

The absolute pressure is the sum of the atmospheric and gauge pressures. Since the atmospheric pressure is given directly by a barometer, it remains to measure the gauge pressure. For this, we use manometers formed by piezometric tubes.

Definition of manometry: It is a standard technique for measuring pressures, it uses columns of liquids in vertical or inclined piezometric tubes.

Definition of piezometric tube: It is an open vertical tube; it is connected to a container where we want to measure the pressure.



(a) (b)

Manometers formed by piezometer tubes (a) simple and (b) U-shaped.

For the case of a manometer formed by a vertical piezometric tube (Fig. (a)) open P=Patm at the top,

We have: $P_{abs1} = P_{atm} + \rho gh$ and the effective pressure is : $P_{gauge} = P_{abs1} - P_{atm} = \rho gh$ we denote it by P, it is also called piezometric pressure: $P_{gauge} = P = \rho gh$ 2.15

U-shaped manometer: It is a U-shaped tube which uses a so-called “manometric or piezometric” fluid. The equation is written:

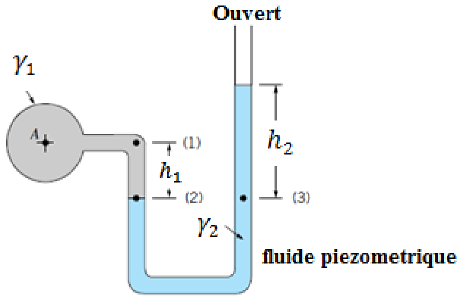
$P_{absA} + \rho_1 gh_1 - \rho_2 gh_2 = P_{atm}$

We have $P_{absA} = P_A + P_{atm}$ which gives:

$P_A + \rho_1 gh_1 - \rho_2 gh_2 = 0$

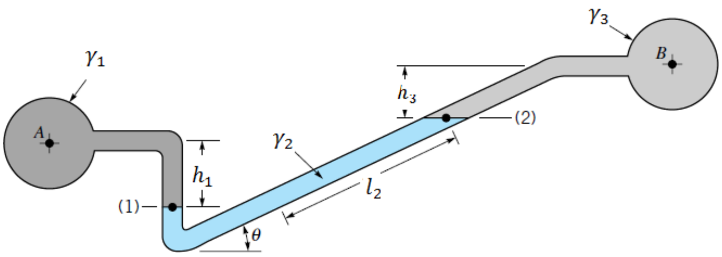
Generally, equation for a U-shaped manometer writes:

$P_A + \sum_{bottom} \rho_i gh_i - \sum_{top} \rho_i gh_i = P_B$ 2.15



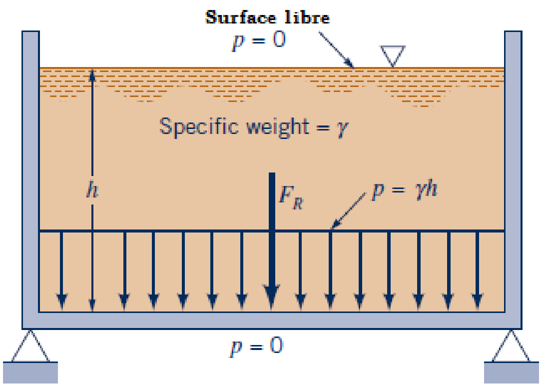
Inclined pressure gauge: To amplify the reading range in the case of low pressures, the pressure gauges are tilted. The equation for this example is written:

$$P_A + \gamma_1 h_1 - \gamma_2 l_2 sin\theta + \gamma_3 h_3 = P_B$$
$$P_A - P_B = \gamma_2 l_2 sin\theta + \gamma_3 h_3 - \gamma_1 h_1$$

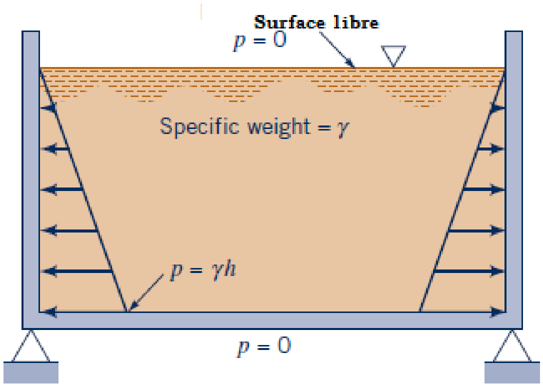


6. القوى الهيدروستاتيكية على سطح مستو:

عندما يتم غمر سطح في سائل، تنشأ القوى على السطح بسبب ضغط السائل. حساب هذه القوى مهم في تصميم الخزانات والسفن والسدود والهياكل الهيدروليكية الأخرى. نعلم أنه عندما تكون السوائل في حالة سكون، تكون القوى متعامدة مع الأسطح لأن قوى الاحتكاك تساوي صفرًا. أيضًا، يختلف الضغط خطيًا مع العمق في السوائل غير القابلة للضغط. في الجزء السفلي من الخزان (الشكل 5 (أ)) يكون الضغط $p = p_0 + \gamma h$ إذا كان الضغط الفعال أوضغط المقياس $p_0 = 0$ على السطح الحر، نحصل على $p = \gamma h$. لحساب القوة الناتجة في قعر الخزان FR، والتي تؤثر في مركز الجاذبية، يكفي بضرب P في سطح القعر $F_R = pS = \gamma hS$. في حالة الشكل (ب) ، توزيع الضغط غير منتظم، لذلك حساب القوة سيكون موضوع الجزء التالي.



(a) Pression en bas du réservoir



(b) Pression sur le côté du réservoi

حساب القوة الهيدروستاتيكية وموقعها:

في الحالة العامة نأخذ سطح S مائل بزاوية θ يتعرض لضغط سائل ذو كتلة حجمية ρ، في هذه الحالة الضغط الجوي P_{atm} يحيط بكل مكان. الهدف هو حساب قيمة القوة الناتجة F_R بالإضافة إلى إحداثيات نقطة تطبيقها x_R و x_R. لنأخذ المعلم X-Y بحيث يكون المحور Y موازيًا للسطح S وعموديًا على القوة F_R.

أ. حساب قيمة القوة F_R:

القوة المحصلة هي

$$F_R = \int_S dF = \int_S \rho g h dS \quad \text{مع} \quad h = y sin\theta$$

$$F_R = \int_S \rho g y sin\theta dS = \rho g sin\theta \int_S y dS$$

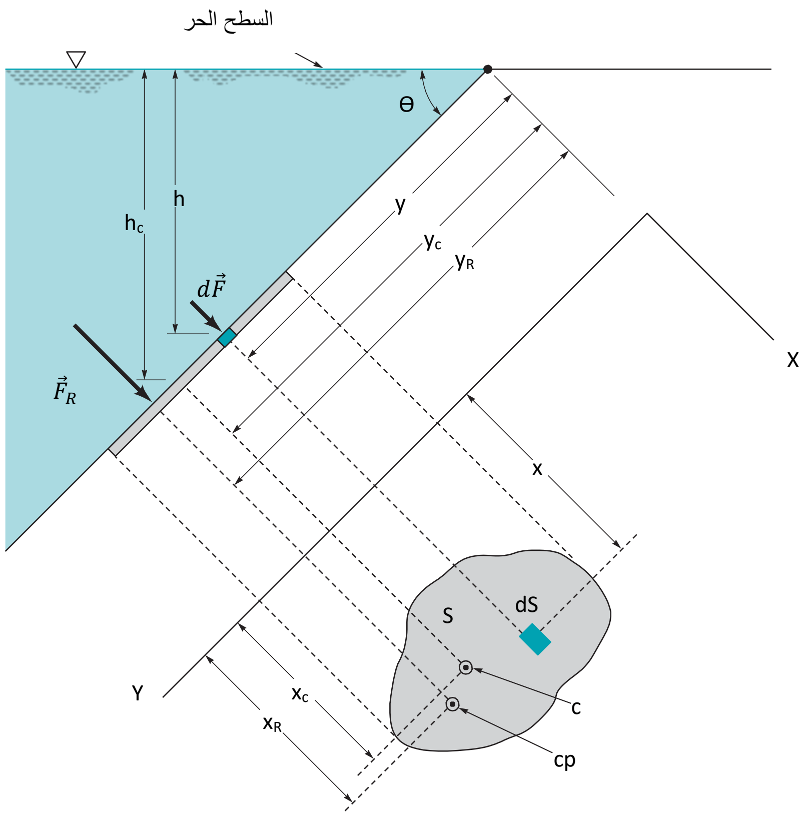
يمثل التكامل $\int_S y dS$ العزم من الدرجة الأولى للسطح S (مركز الثقل) المحسوب بالنسبة للمحور x. حيث نكتب $\int_S yds = y_c S$ مع y_c الإحداثي y لمركز ثقل للسطح S فيما بالنسبة للمحور X والذي يمر عبر O، لذلك لدينا:

$$F_R = \rho g sin\theta y_c S \qquad 2.16$$

وكذلك $h_c = sin\theta y_c$

$$F_R = \rho g h_c S \qquad 2.17$$

شدة قوة المائع تساوي الضغط الذي يعمل في مركز الثقل للسطح مضروبًا في السطح الكلي.



حساب موضع القوة F_R:

نبدأ بالاتجاه Y، يتم الحصول على موضع F_R عن طريق حساب العزم:

$$F_R\, y_R = \int_S y dF = \int_S \rho g y^2 sin\theta dS \quad \text{لان} \quad dF = \rho g y sin\theta dS \qquad 2.18$$

نعوض F_R بقيمتها $F_R = \rho g sin\theta y_c S$ مما يعطي $\rho g sin\theta y_c S y_R = \int_S \rho g y^2 sin\theta dS$

و نحصل على :

$$y_R = \frac{\int_S y^2 dS}{y_c S} \qquad 2.19$$

يسمى التكامل $\int_S y^2 dS$ بالعزم التربيعي للسطح S (عزم العطالة) بالنسبة للمحور OX، ويرمز له بـ I_x ، لذلك نحصل على :

$$\boldsymbol{y_R = \frac{I_x}{y_c S}}$$

من الأنسب كتابة العزم التربيعي I_x بالنسبة للمحور الذي يمر عبر مركز ثقل السطح S الذي يرمز إليه I_{xc}. يتم حساب الموضع $\boldsymbol{y_R}$ وفقًا لـ I_{xc} باستخدام العلاقة $I_x = I_{xc} + y_c^2 S$ ، و هذا يعطي:

$$\boldsymbol{y_R = y_c + \frac{I_{xc}}{y_c S}} \qquad 2.20$$

باستثناء الأسطح الأفقية، نرى أن عمق القوة المحصلة لا يمر عبر مركز الثقل ولكن أسفله لأن $\frac{I_{xc}}{y_c S} > 0$.

لحساب إحداثيات $\boldsymbol{x_R}$ ، نتابع بنفس الطريقة، نحسب عزم القوة:

$$F_R\, x_R = \int_S x dF = \int_S \rho g x y sin\theta dS \quad \text{لان} \quad dF = \rho g y sin\theta dS$$

نعوض F_R بقيمتها $F_R = \rho g sin\theta y_c S$ فنحصل على

$$\rho g sin\theta y_c S x_R = \int_S \rho g x y sin\theta dS$$

و هذا ما يعطي :

$$x_R = \frac{\int_S xydS}{y_c S} = \frac{I_{xy}}{y_c S}$$

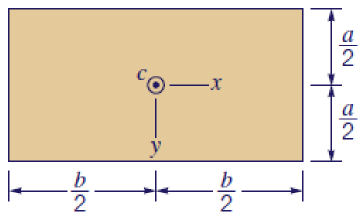
مع $I_{xy} = \int_S xydS$ هوجداء عزم العطالة بالنسبة للمحاور x و y . نغير المحور بتطبيق العلاقة $I_{xy} = I_{xyc} + x_c y_c S$ فنحصل على:

$$\boldsymbol{x_R = x_c + \frac{I_{xyc}}{y_c S}}$$

I_{xyc} هو جداء عزم العطالة بالنسبة لمعلم متعامد يمر عبر مركز ثقل للسطح S وينشأ من ازاحة للمعلم XY.

إذا كان السطح متماثلًا بالنسبة لمحور يمر عبر مركز الثقل ومتوازيًا مع X أو Y ، يجب أن يكون F_R على طول x_c لأن $I_{xyc} = 0$.

الخصائص الهندسية لبعض الأسطح المعتادة.



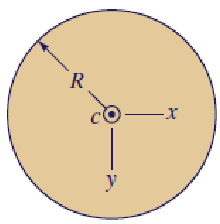
$A = ba$

$I_{xc} = \frac{1}{12} ba^3$

$I_{yc} = \frac{1}{12} ab^3$

$I_{xyc} = 0$

(*a*) Rectangle

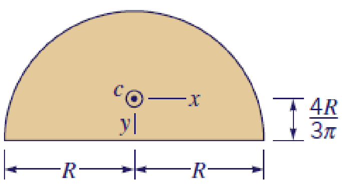


$A = \pi R^2$

$I_{xc} = I_{yc} = \frac{\pi R^4}{4}$

$I_{xyc} = 0$

(*b*) Circle



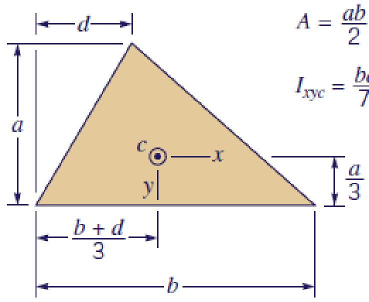
$A = \frac{\pi R^2}{2}$

$I_{xc} = 0.1098 R^4$

$I_{yc} = 0.3927 R^4$

$I_{xyc} = 0$

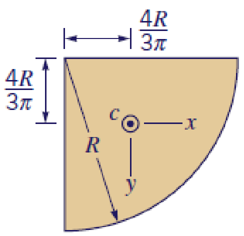
(*c*) Semicircle



$A = \frac{ab}{2}$ $\quad I_{xc} = \frac{ba^3}{36}$

$I_{xyc} = \frac{ba^2}{72}(b - 2d)$

(*d*) Triangle



$A = \frac{\pi R^2}{4}$

$I_{xc} = I_{yc} = 0.05488 R^4$

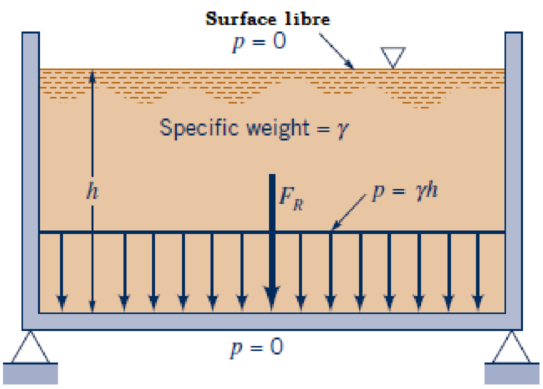
$I_{xyc} = -0.01647 R^4$

(*e*) Quarter circle

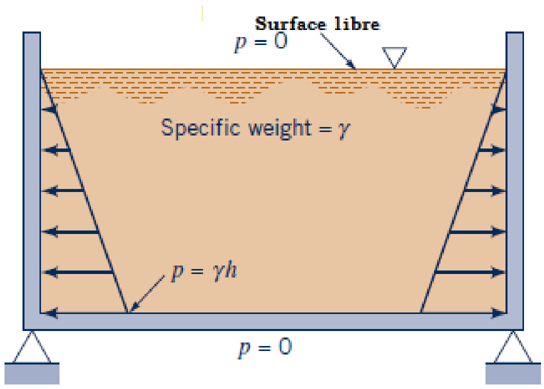
Calculation of hydrostatic forces on flat surfaces

Lorsqu'une surface est submergée dans un fluide, des forces se développent sur la surface due à la pression du fluide. Le calcul de ces forces est important dans la conception des réservoirs, bateaux, barrages et d'autres structures hydrauliques. On sait que lorsque les fluides sont au repos, les forces sont perpendiculaires aux surfaces car les forces de frottement sont nulles. Aussi, la pression varie linéairement en fonction de la profondeur dans les fluides incompressibles. Au fond du réservoir (figure 5 (a)) la pression est $p = p_0 + \gamma h$ si la pression effective ou manométrique $p_0 = 0$ à la surface libre, ona $p = \gamma h$. Pour calculer la force résultatnte au fond du réservoir F_R, qui agit au centre de gravité, il suffit de multiplier p par la surface du fond $F_R = pS = \gamma hS$. Dans le cas de la figure (b), la distribution d e la pression n'est pas uniforme, la calcul e la force fera l'objet de la partie suivante.

When a surface is submerged in a fluid, forces develop on the surface due to the pressure of the fluid. Calculating these forces is important in the design of reservoirs, boats, dams and other hydraulic structures. We know that when fluids are at rest, the forces are perpendicular to the surfaces because the friction forces are zero. Also, pressure varies linearly with depth in incompressible fluids. At the bottom of the tank (figure 5 (a)) the pressure is $p = p_0 + \gamma h$ if the effective or gauge pressure $p_0 = 0$ at the free surface, ona $p = \gamma h$. To calculate the resulting force at the bottom of the tank F_R, which acts at the center of gravity, simply multiply p by the surface area of the bottom $F_R = pS = \gamma hS$. In the case of figure (b), the pressure distribution is not uniform, the calculation of the force will be the subject of the following part.



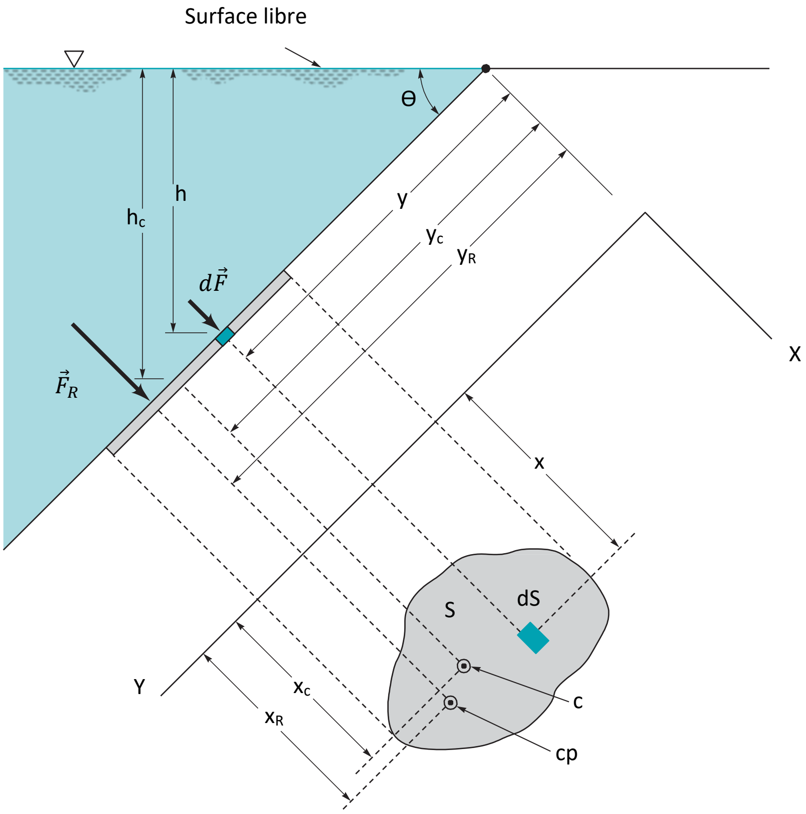
(a) Pression en bas du réservoir



(b) Pression sur le côté du réservoi

7. Determination of the hydrostatic force and its position:

Consider a surface S inclined with an angle Θ subjected to the pressure of a liquid of density ρ, the ambient pressure being P_{atm} everywhere. The goal is to calculate the value of the resulting force F_R as well as the x_R and y_R coordinates of its point of application. Let us take an X-Y coordinate system such that the Y axis is parallel to the surface S and perpendicular to the force F_R.



a) Calculation of the force value F_R:

The resulting force is $F_R = \int_S dF = \int_S \rho g h dS$ with $h = y sin\theta$

Therefore $F_R = \int_S \rho g y sin\theta dS = \rho g sin\theta \int_S y dS$

The integral $\int_S y dS$ represents the first order moment of the surface S (barycenter) calculated with respect to the x axis. We write $\int_S y ds = y_c S$ with y_c coordinate of the barycenter of the surface S with respect to the x axis and which passes through O, we therefore have:

$$F_R = \rho g sin\theta y_c S \qquad 2.16$$

Since $h_c = sin\theta y_c$

$$F_R = \rho g h_c S \qquad 2.17$$

The intensity of the fluid force is equal to the pressure acting at the barycenter of the surface multiplied by the total surface area.

b) **Calculation of the position of the force $\boldsymbol{F_R}$:**

Starting with the Y direction, the position of $\boldsymbol{F_R}$ is obtained by calculating the moment:

$$F_R\, y_R = \int_S ydF = \int_S \rho g y^2 sin\theta dS \text{ because } dF = \rho gysin\theta dS \qquad 2.18$$

Replacing F_R by its value $F_R = \rho gsin\theta y_c S$ which gives $\rho gsin\theta y_c S y_R = \int_S \rho g y^2 sin\theta dS$

We obtain $$y_R = \frac{\int_S y^2 dS}{y_c S} \qquad 2.19$$

The integral $\int_S y^2 dS$ is called the quadratic moment of the surface S (moment of inertia) with respect to the axis OX, it is denoted I_x, we therefore have $\boldsymbol{y_R = \frac{I_x}{y_c S}}$.

It is more convenient to write the quadratic moment I_x with respect to an axis which passes through the barycenter of the surface S denoted by I_{xc}. The position y_R is calculated as a function of I_{xc} using the relation $I_x = I_{xc} + y_c^2 S$, this gives:

$$\boldsymbol{y_R = y_c + \frac{I_{xc}}{y_c S}} \qquad 2.20$$

Sauf pour les surfaces horizontales, on voit que la force résultante ne passe pas par le barycentre mais au-dessous car $\frac{I_{xc}}{y_c S} > 0$.

Except for horizontal surfaces, we see that the resulting force does not pass through the barycenter but below because $\frac{I_{xc}}{y_c S} > 0$.

To determine the $\boldsymbol{x_R}$ coordinate, we proceed in the same way, calculating the moment of the force:

$$F_R\, x_R = \int_S xdF = \int_S \rho gxysin\theta dS \text{ because } dF = \rho gysin\theta dS$$

Substituting F_R by its value $F_R = \rho gsin\theta y_c S$ we obtain

$$\rho gsin\theta y_c S x_R = \int_S \rho gxysin\theta dS$$

Which gives $$x_R = \frac{\int_S xydS}{y_c S} = \frac{I_{xy}}{y_c S}$$

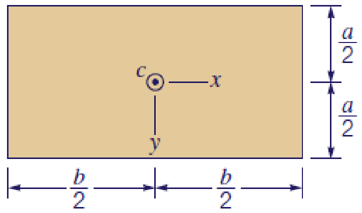
With $I_{xy} = \int_S xydS$ is the product of inertia with respect to the x and y axes. Let's change axis by applying the relation $I_{xy} = I_{xyc} + x_c y_c S$.

$$\boldsymbol{x_R = x_c + \frac{I_{xyc}}{y_c S}}$$

I_{xyc} is the product of inertia with respect to an orthogonal system passing through the barycenter of the surface S and formed by a translation of the X-Y system.

If the surface is symmetrical about an axis passing through the barycenter and parallel to X or Y, F_R must lie along x_c because $I_{xyc} = 0$.

c) <u>Geometric properties of some common surfaces.</u>



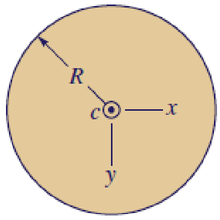
$A = ba$

$I_{xc} = \frac{1}{12}ba^3$

$I_{yc} = \frac{1}{12}ab^3$

$I_{xyc} = 0$

(*a*) Rectangle

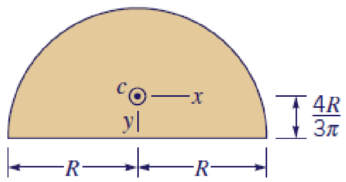


$A = \pi R^2$

$I_{xc} = I_{yc} = \frac{\pi R^4}{4}$

$I_{xyc} = 0$

(*b*) Circle



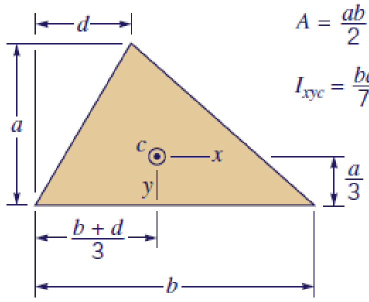
$A = \frac{\pi R^2}{2}$

$I_{xc} = 0.1098R^4$

$I_{yc} = 0.3927R^4$

$I_{xyc} = 0$

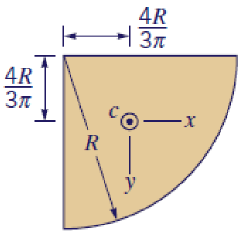
(*c*) Semicircle



$A = \frac{ab}{2}$ $\quad I_{xc} = \frac{ba^3}{36}$

$I_{xyc} = \frac{ba^2}{72}(b - 2d)$

(*d*) Triangle



$A = \frac{\pi R^2}{4}$

$I_{xc} = I_{yc} = 0.05488R^4$

$I_{xyc} = -0.01647R^4$

(*e*) Quarter circle