0.1. Généralités sur les fonctions de plusieurs variables

Définition. 0.1. Une application de $\mathbb{R}^n$, ou d'une partie de $\mathbb{R}^n$, dans $\mathbb{R}$ est appelé fonction numérique réelle de n variables réelles.

Définition. 0.2. Une fonction numérique de n variables réelles est une application f d'une partie D de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Ou bien

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \longmapsto f(x) \quad \text{ou} \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Exemple 0.1.

1. $f(x,y) = x^2 + 2xy - y. \quad D = \mathbb{R}^2.$

2. $f(x,y,z) = \frac{x+y}{x^2+y^2+z^2}. \quad D = \mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0).$

3. $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2-1}. \quad D = \mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0).$

4. $f(x,y) = e^{xy}. \quad D = \mathbb{R}^2.$

5. $f(x,y) = \sin(x+y). \quad D = \mathbb{R}^2.$

0.2. Dérivées partielles

Définition. 0.3. La dérivée partielle de la fonction à n variables $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ par rapport à la variable x_k (où $k = 1, \dots, n$) est la dérivée de la fonction

$$x_k \longmapsto f(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n)$$

de la variable x_k en considérant toutes les autres variables x_j comme des constantes (ou paramètres) . Cette dérivée partielle de f par rapport à x_k est note

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}$$

Exemple 0.2.

1. $f(x, y) = x^2 + xy$.

2. $f(x, y) = e^{x+y} + \ln(xy)$.

3. $f(x, y, z) = \sin(xyz)$.

Remarque. Les dérivées partielles secondes de la fonction à deux variables $f(x, y)$ sont les dérivées partielles des fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. On a

1. La dérivée partielle seconde par rapport à x notée

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

2. La dérivée partielle seconde par rapport à x notée

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

3. La dérivée partielle seconde par rapport à x et puis y notée

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

4. La dérivée partielle seconde par rapport à y et puis x notée

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Exemple 0.3.

1. $f(x, y) = x^3 + xy^2$.

2. $f(x, y) = e^{xy} + \sin(x)\cos(y)$.

1.1. Notions générales

1.1.1. Qu'est qu'une équation aux dérivées partielles ?

Définition 1.1. Une équation aux dérivées partielles (noté EDP) est une relation entre une fonction de plusieurs variables réelles v, et ses dérivées partielles, et une fonction donnée f

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^n v}{\partial x_n^n}\right) = f, \qquad (1.1)$$

où v et ses dérivées partielles sont continués dans un domaine ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et F est une fonction de plusieurs variables.

1.1.2. Dimension et ordre d'une EDP

Définition 1.2. La dimension d'une équation aux dérivées partielles est le nombre de variables indépendantes dont dépend la fonction inconnue v.

Définition 1.3. L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est le plus haut degré de dérivation présent dans l'équation.

Exemple 1.1.

1. L'équation suivante

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + xy\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 0,$$

est de dimension 2 et d'ordre 1.

2. L'équation suivante

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(x, y, z) = 0,$$

est de dimension 3 et d'ordre 2.

3. L'équation suivante

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}(x, y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 0,$$

est de dimension 2 et d'ordre 3.

1.1.3. Équation aux dérivée partielle linéaire

Définition 1.4. Une équation aux dérivées partielles (1.1) est linéaire par rapport à la fonction v et à toutes ses dérivées partielles. On peut écrire sous la forme :

$$L(v) = f. \tag{1.2}$$

où L est l'opérateur aux dérivées partielles associé à une EDP.

Remarque 1.1. L'équation (1.2) est linéaire si et seulement si L'opérateur L est linéaire. c.-à-d.

$$L\,(av_1 + bv_2) = aL\,(v_1) + bL\,(v_2), \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Exemple 1.2. L'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial v}{\partial x} + xy\frac{\partial v}{\partial y} = x + y,$$

est linéaire.

Soit

$$L = \frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} L\,(av_1 + bv_2) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}\right)(av_1 + bv_2) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(av_1 + bv_2) + xy\frac{\partial}{\partial y}(av_1 + bv_2) \\ &= a\frac{\partial v_1}{\partial x} + b\frac{\partial v_2}{\partial x} + axy\frac{\partial v_1}{\partial y} + bxy\frac{\partial v_2}{\partial y} \\ &= a\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + xy\frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + b\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} + xy\frac{\partial v_2}{\partial y}\right) \\ &= aL\,(v_1) + bL\,(v_2). \end{aligned}$$

Définition 1.5. Une équation aux dérivées partielles linéaire est homogène si $f = 0$. On peut écrire sous la forme :

$$L(v) = 0. \tag{1.4}$$

Définition 1.6. (Principe de superposition).

Si $v_1, v, \dots, v_n$ sont n solutions d'une EDP linéaire homogène (1.4), alors une combinaison linéaire arbitraire

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2\, v_2 + \cdots + \alpha_n\, v_n, \qquad \alpha_i \in \mathbb{R},$$

est solution du (1.4).

1.1.4. Équation aux dérivée partielle non linéaire

Définition 1.7. Une équation aux dérivées partielles (1.1) est non linéaire si l'équation est non linéaire par rapport aux dérivées partielles de la fonction inconnue.

Exemple 1.3.

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\right)^2 - v(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0.$$

1.1.5. Problème aux limites

Condition initiale (Condition de Cauchy) : On rappelle que l'on a la donnée de la valeur de $v(x,t)$ en t_0, soit $v(x,t_0) = v_0(x)$

Condition aux limites.

Soit v une fonction de $\in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, il existe plusieurs types de conditions citons ici :

Condition de Dirichlet

Où v est fixé à bord de Ω, tel que $v|_{\partial\Omega} = g$.

Condition de Neumann

Où la dérivée normale de v est fixé à bord de Ω, tel que $\left.\frac{\partial v}{\partial \eta}\right|_{\partial\Omega} = g_1$.

Condition Mixte

On note $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$, alors, $\left\{ v|_{\partial\Omega_1} = g,\ \left.\frac{\partial v}{\partial \eta}\right|_{\partial\Omega_2} = g_2. \right.$

Définition 1.8. On appelle problème aux limites, une équation aux dérivées partielles munie de conditions aux limites sur la totalité de la frontière ou bord du domaine sur lequel elle est posée.

1.2. Equations différentielles ordinaires

1.2.1. Généralité sur équations différentielles ordinaires

Définition 1.9. Une équation différentielle ordinaire, également notée **EDO**, d'ordre n est une relation entre la variable réelle x, une fonction inconnue $y(x)$ et ses dérivées $y', y", \ldots, y^{(n)}$, au point t définie par :

$$F\left(x, y, y', y", \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{1.5}$$

où F n'est pas indépendante de sa dernière variable.

Définition 1.10. Une équation différentielle ordinaire de type (1.5) d'ordre n est **linéaire** si elle est de la forme :

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x)$$
$$= f(x), \tag{1.6}$$

avec tous $y^{(i)}$ de degré 1 et tous les coefficients dépendant au plus de t.

Exemple 1.4.

1. L'équation suivante

$$y' + 3y = 0,$$

est du 1^er ordre.

2. L'équation suivante

$$2y'' + y' + 2y = 0 \sin x,$$

est du $2^{ème}$ ordre.

3. L'équation suivante

$$y''' + y'' + 2y = 0,$$

est du $3^{ème}$ ordre.

1.2.2. Équation différentielle ordinaires linéaire du premier ordre

Définition 1.11. Une équation différentielle ordinaires linéaire du premier ordre sur un intervalle I, est une équation de la forme :

$$y' + a(x)y = f(x), \tag{1.7}$$

où l'inconnue y est une fonction de x dérivable que l'on cherche à déterminer, a et f sont des fonctions continues sur un intervalle I.

Théorème 1.1. (Résolution de l'équation homogène).

Les solutions de de l'équation différentielle ordinaires linéaire homogène du premier ordre

$$y' + a(x)y = 0, \quad x \in I, \tag{1.8}$$

sont toutes les fonctions

$$y(x) = ke^{-\int a(x)dx}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad x \in I. \tag{1.9}$$

Exemple 1.5. : Résoudre l'ODE suivante :

1. $y' + 3y = 0$.

2. $y' - 2xy = 0$.

D'après Théorème 1.1., on a

1. $y(x) = ke^{-3x}$.

2. $y(x) = ke^{x^2}$.

1.2.3. Équation différentielle linéaire du seconde ordre

Définition 1.12. Une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants sur un intervalle I, est une équation de la forme :

$$ay'' + by' + cy = f(x), \tag{1.10}$$

où l'inconnue y est une fonction de x dérivable deux fois que l'on cherche à déterminer et où a, b, c sont des réels avec $a \neq 0$ et f une fonction continue sur un intervalle I.

Exemple 1.6.

1.

$$2y'' + 3y' + y = 0.$$

2.

$$y'' + 3y = 0.$$

3.

$$y'' + y' + y = x.$$

Définition 1.13. On appelle polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle linéaire du second ordre homogène (1.10), le polynôme

$$P(r) = ar^2 + br + c.$$

Théorème 1.2. **(Résolution de l'équation homogène).** Soit $P(r)$ le polynôme caractéristique associé à l'équation (1.10) et $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du polynôme P.

1. Si $\Delta > 0$, le polynôme P admet deux racines réelles r_1 et r_2, alors la solution générale de (1.10) peuvent se mettre sous la forme :

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Si $\Delta = 0$, le polynôme P admet une racine double r_0, alors la solution générale de (1.10) peuvent se mettre sous la forme :

$$y(x) = c_1 e^{r_0 x} + c_2 x e^{r_0 x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Si $\Delta < 0$, le polynôme P admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = r_0 + iw$ et $r_2 = r_0 - iw$, alors la solution générale de (1.10) peuvent se mettre sous la forme :

$$y(x) = e^{r_0 x}\left[c_1 \cos(wx) + c_2 \sin(wx)\right], \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.7. Résoudre l'ODE suivante :

$$2y'' + 3y' + y = 0.$$

L'équation caractéristique : $P(r) = 2r^2 + 3x + 1.$

On a $\Delta = b^2 - 4ac = 1 > 0$, alors $r_1 = -1$ et $r_2 = -\frac{1}{2}$, alors la solution générale de l'équation précédente est

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-\frac{x}{2}}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.8. Résoudre l'ODE suivante :

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1.11}$$

Solution :

L'équation caractéristique associée à (1.11) est :

$$\mathrm{r}^2 + \lambda = 0.$$

Alors,

$$\Delta = -\lambda.$$

Alors nous avons 3 cas :

1. Si $\lambda < 0 \Longrightarrow \Delta > 0$. Les racines sont $\pm\sqrt{-\lambda}$ et la solution générale de (1.11) est :

$$y(x) = ae^{\sqrt{-\lambda}x} + ae^{-\sqrt{-\lambda}x}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Si $\lambda = 0 \Longrightarrow \Delta = 0$, alors, $\mathrm{r} = 0$ est racine double et la solution générale de (1.11) est :

$$y(x) = a + bx, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

3. Si $\lambda > 0 \Longrightarrow \Delta < 0$. Les racines sont $\pm i\sqrt{\lambda}$ et la solution générale de (1.11) est :

$$y(x) = a\ \cos\sqrt{\lambda}x\ + b\sin\sqrt{\lambda}x\,, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1.2. L'équation (1.11) s'appelle **l'équation de Sturm-Liouville**.

1.4. Séries de Fourier

1.4.1. Séries trigonométriques

Définition 1.16. Une fonction f définie sur un ensemble $I \in \mathbb{R}$ est dite périodique de période $T \in \mathbb{R}^*$ (ou T-périodique) si pour tout $x \in I$, on a $x + T \in I$ et

$$f(x + T) = f(x). \tag{1.13}$$

Exemple 1.11.

1. La fonction $f(x) = \sin(x)$ est 2π-périodiques. On a

$$f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin(x)\cos(2\pi) + \cos(x)\sin(2\pi) = \sin(x) = f(x).$$

2. La fonction $f(x) = \cos(x)$ est 2π-périodiques. On a

$$f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) = \cos(x)\cos(2\pi) - \sin(x)\sin(2\pi) = \cos(x) = f(x).$$

Définition 1.17. ([3,6]). On appelle série trigonométrique réelle, toute série de fonctions de la forme :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)], \tag{1.14}$$

où $x \in \mathbb{R}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, a_n et $b_n \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.4.2. Séries de Fourier de fonctions 2π-périodiques

Définition 1.18. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite périodique. On appelle série de Fourier associée à f, la série trigonométrique notée

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)], \tag{1.15}$$

où

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{1.16}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.17}$$

Remarque 1.3.

1. Si la fonction f est paire, on a

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \quad \text{et} \quad b_n = 0 \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.18}$$

2. Si la fonction f est impaire, on a

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \quad \text{et} \quad a_n = 0 \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.19}$$

1.4.2. Séries de Fourier de fonctions 2ℓ-périodiques ($\ell \neq 2\pi$)

Remarque 1.4. Dans le cas f est 2ℓ-périodiques ($\ell \neq 2\pi$), l'équations $(1.15) - (1.17)$ devient

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \right],$$

où

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) dx, \qquad n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) dx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$