**Larbi Ben Mhidi University - Oum El Bouaghi-**

**Faculty of exact sciences, natural and life science**

**Department of Mathematics and Computer Science** **Academic year: 2023/2024**

**Level: L1 Computer S** **Duration:1h30**

**Catch-up exam: Analysis 2**

**Exercise 1(09 pts) (9=4+2+3)**

1) Find a limited development of order $2$ in a neighborhood of $0$ for the functions

$$h(x) = e^{x-x^2} \quad \text{and} \quad f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}.$$

2) Using the previous limited Developments, calculate the following limit:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{h(x) - f(x) - 1}{x^2}\right).$$

3) Let $g$ be a function defined on $]0,+\infty[$ by

$$g(x) = x^2\sqrt{\frac{x}{1+x}}\ln\left(\frac{1+x}{x}\right).$$

a)Deduce a limited development in the neighborhood of $+\infty$ for the function $g$ (note that $g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2}f(t)$).

b) Calculate the limit $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x) - x + 1)$. What do you conclude?

**Given:**

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \ ; \ \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \ ;$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

**Exercise 2(07 pts) (7=4+3)**

1) Calculate the integral:

$$I = \int \frac{3x^2 - 2x + 3}{(x^2+1)(x-1)}\,dx.$$

2) Using integration by Change of variable calculate the integral:

$$J = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx.$$

**Exercise 3 (04 pts) (4=3+1)**

1) Find the general solution of the differential equation:

$$y' - 2y = 2x + 1 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (E).$$

2) Deduce the particular solution to equation $(E)$ that achieves $y(0) = 1$.

**Good luck.**

جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة

قسم: الرياضيات والإعلام الآلي　　　　　　　　　　السنة الجامعية : 2023/ 2024

المستوى :إعلام آلي　　　　امتحان استدراكي في مادة التحليل 2　　　　المدة: ساعة و نصف

**التمرين الأول**:(09 نقاط)

1) أوجد نشرا محدودا من المرتبة 2 بجوار0 للتوابع:

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}} \quad \text{و} \quad h(x) = e^{x-x^2}.$$

2) أحسب، باستعمال النشور السابقة، النهاية:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{h(x)-f(x)-1}{x^2}\right).$$

3) ليكن التابع $g$ المعرف على $\mathbb{R}^*$ بـ $g(x) = x^2\sqrt{\frac{x}{1+x}}\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$.

أ) استنتج نشرا محدودا بجوار $]0,+\infty[$ للتابع $g$ (لاحظ أن $g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2}f(t)$).

ب) أحسب النهاية $\lim_{x\to+\infty}(g(x)-x+1)$ ، ماذا تستنتج؟

**يعطى**: $e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$ ; $\ln(1+x) = x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$;

$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$ .

**التمرين الثاني**:(06 نقاط)

1) أحسب التكامل

$$I = \int \frac{3x^2-2x+3}{(x^2+1)(x+1)}dx.$$

2) باستعمال المكاملة بتغيير المتغير, أحسب التكامل:

$$J = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx.$$

**التمرين الثالث**:(05 نقاط)

1) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية: $y' - 2y = 2x+1$ ……………… $(E)$.

2) استنتج الحل الخاص للمعادلة $(E)$ الذي يحقق: $y(0) = 1$.

**جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي**

**كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة**

**قسم: الرياضيات والإعلام الآلي** **السنة الجامعية : 2023/ 2024**

**المستوى : 1ج م رياضيات و إعلام آلي**

**الإجابة النموذجية مع سلم التنقيط للامتحان الاستدراكي في مادة التحليل 2**

**التمرين الأول**:(..نقاط)

1) أوجد نشرا محدودا من المرتبة 3 بجوار0 للتوابع: $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}$ و $h(x) = e^{x-x^2}$

لدينا

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}} = \frac{x - \frac{1}{2}x^2}{1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2}.$$ (0.5)

$$\begin{array}{r|l} x - \frac{1}{2}x^2 & 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \\ \cline{2-2} x + \frac{1}{2}x^2 & x - x^2 \\ \hline -x^2 & \\ -x^2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$ (1.5)

و منه

$$f(x) = x - x^2 + o(x^2).$$

$$h(x) = e^{x-x^2} = 1 + (x - x^2) + \frac{1}{2}(x - x^2)^2$$ (0.5)

$$= 1 + (x - x^2) + \frac{1}{2}(x)^2$$

$$= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$ (1.5)

2)-(..نقاط) أحسب، باستعمال النشور السابقة، النهاية: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{h(x)-f(x)-1}{x^2}\right).$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{h(x)-f(x)-1}{x^2}\right)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1 + x - \frac{1}{2}x^2 - (x - x^2) - 1}{x^2}\right)$$ (0.5)

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2}\right)$$ (0.5)

$$= \lim_{x \to 0} \left( \frac{1}{2} + o(1) \right)$$ (0.5)

$$= \frac{1}{3}.$$ (0.5)

3) أ) بوضع $x = \frac{1}{t}$ و من أجل $t > 0$ فإن:

$$g\left(\frac{1}{t}\right) = \left(\frac{1}{t}\right)^2 \sqrt{\frac{\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t}}} \ln\left(\frac{1+\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}}\right)$$

$$= \frac{1}{t^2} \sqrt{\frac{1}{1+t}} \ln\left(\frac{1+t}{1}\right) = \frac{1}{t^2} f(t).$$ (1)

بما أن $f(t) = t - t^2 + o(t^2)$ فإن:

$$g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2}\left(t - t^2 + o(t^2)\right) = \frac{1}{t} - 1 + o(1)$$ (0.5)

و منه

$$.\, g(x) = x - 1 + \frac{1}{3x} + o(1)$$ (0.5)

أو

$$.\, g(x) = x - 1 + \frac{1}{3x} + \varepsilon(x) \quad \text{With } \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$$

ب)- أحسب النهاية $\lim_{x \to +\infty} (g(x) - x + 1)$ ، ماذا تستنتج؟

لدينا

$$\lim_{x \to +\infty} (g(x) - x + 1) = \lim_{x \to +\infty} \left(x - 1 + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - x + 1\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0.$$ (0.5)

الاستنتاج: التمثيل البياني للدالة $g$ يقبل مستقيم مقارب في جوار $+\infty$ معادلته $y = x - 1$. (0.5)

**<u>التمرين الثاني</u>:**

1) أحسب التكامل $I = \int \frac{3x^2-2x+3}{(x^2+1)(x-1)} dx$.

نضع

$$\frac{3x^2 - 2x + 3}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-1}$$ (0.5)

و منه

$$\frac{3x^2-2x+3}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{(a+c)x^2+(b-a)x+(c-b)}{(x^2+1)(x-1)}$$ (0.5)

بالمطابقة بين الطرفين نحصل على

$$.\begin{cases} a+c=3 \\ b-a=-2 \\ c-b=3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} a=1 \\ b=-1 \\ c=2 \end{matrix}$$ (1)

و منه

$$I=\int \frac{3x^2-2x+3}{(x^2+1)(x-1)}dx$$

$$=\int\left(\frac{x-1}{x^2+1}+\frac{2}{x-1}\right)dx$$

$$=\int\left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}+\frac{2}{x-1}\right)dx$$ (0.5)

$$=\int\left(\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}+\frac{2}{x-1}\right)dx$$

$$=\int\left(\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}+\frac{2}{x-1}\right)dx$$ (0.5)

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\arctan x+2\ln|x-1|+C$$ (1)

2) باستعمال المكاملة بتغيير المتغير, أحسب التكامل: $J=\int_0^4\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$.

بوضع $t=\sqrt{x}$ فإنّ $t^2=x$ و منه $dx=2tdt$.
(0.5)

| $x$ | $0$ | $4$ |
|---|---|---|
| $t$ | $0$ | $2$ |

(0.5)

$$J=\int_0^4\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$$

$$=\int_0^2\frac{t}{t+1}2tdt$$ (0.5)

$$=2\int_0^2\frac{t^2}{t+1}dt$$

$$=2\int_0^2\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt$$ (0.5)

$$=2\cancel{\int_0^2}\left(\frac{1}{2}t^2-t+\ln|t+1|\right)_0^2 dt$$ (0.5)

$J = 2\ln 3.$ (0.5)

**التمرين الثالث**:(.. نقاط)

1) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية: $y' - 2y = 2x + 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (E).$

حساب المعامل التكاملي

$$v(x) = e^{\int a(x)dx} = e^{\int -2dx} = e^{-2x}$$ (0.5)

نضرب طرفي المعادلة في المعامل السابق نحصل على

$$e^{-2x}y' - 2e^{-2x}y = (2x+1)e^{-2x}$$

و منه

$$\left(e^{-2x}y\right)' = (2x+1)e^{-2x}$$ (0.5)

و منه

$$y = e^{2x}\int (2x+1)e^{-2x}\,dx.$$ (0.5)

حساب التكامل $\int (2x+1)e^{-2x}\,dx$.

نضع $v = 2x + 1$ و $u' = e^{-2x}$ ومنه $v' = 2$ و $u = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

ومنه

$$\int (2x+1)e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}(2x+1)e^{-2x} + \int e^{-2x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}(2x+1)e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$$

$$= -(x+1)e^{-2x} + C$$ (1)

إذن

$$y = e^{2x}\left(-(x+1)e^{-2x} + C + C\right)$$

$$= Ce^{2x} - x - 1$$ (0.5)

2) استنتاج الحل الخاص للمعادلة $(E)$ الذي يحقق: $y(0) = 1$.

لدينا

$$y(0) = 1 \iff Ce^{2(0)} - (0) - 1 = 1$$

$$\iff C - 2 =$$

$$\iff C = 2$$ (0.5)

و منه

$$y_P = 2e^{2x} - x - 1$$ (0.5)

**ملاحظة:**

في السؤال الأول و في حالة حل المعادلة بالطريقة الثانية ($y_G = y_H + y_P$) توزع العلامة كالتالي:

$y_H$........(0.5)      $y_P$.......(1.5)      $y_G = y_H + y_P$.........(0.5).