سلسلة تمارين تتعلق بالمحور السادس: تحليل قناة التوزيع: نماذج النقل والتوزيع

تقوم المؤسسة الوطنية للمياه المعدنية بالجزائر بتموين المناطق الشمالية للوطن بمنتوجاتها من المياه المعدنية عن طريق وحداتها الثلاث الأكثر شهرة وهي:

- وحدة موزاية، تنتج قارورات المياه المسماة "موزاية" بطاقة قصوى هي $^{3}10.55$ قارورة شهريا.
- وحدة سعيدة، تنتج قارورات المياة المسماة "سعيدة" بطاقة قصوى ي $^{3}10.45$ قارورة شهريا.
- وحدة باتنة، تنتج قارورات المياة المسماة "باتنة" بطاقة قصوى هي $^{3}10. 20$ قارورة شهريا.

يتم التسويق في إتجاه النواحي الشمالية الثلاث وهي:

- الناحية الغربية مقرها وهران تقدر كميات طلبها ب $^{3}10..50$ قارورة شهريا.
- الناحية الشرقية مقرها قسنطينة تقدر كميات طلبها بـ $^{3}10.30$ قارورة شهريا.
- الناحية الوسطى مقرها البليدة تقدر كميات طلبها بـ $^{3}10.40$ قارورة شهريا.

دراسات المحاسبة التحليلية بينت أن تكلفة القارورة الواحدة المنقولة من كل وحدة إنتاج الى كل مقر ناحية من النواحي بالدينار كما يلي:

جدول رقم (1)

	الغرب	الشرق	الوسط
موزاية	5	4	1
سعيدة	3	7	5
باتنة	9	8	10

تبحث المؤسسة عن خطة لتموين مختلف بمنتوجاتها بأقل تكلفة ممكنة.

المطلوب:

1- إثبت أن هذه المسألة تخضع المسائل النقل.
2- شكل جدول المسألة.
3- أوجد الحل الأساسي الأول بطريقة الزاوية الشمالية الغربية
4- أوجد الحل الأساسي الأول بطريقة أدنى تكلفة.
5- الأساسي الأول بطريقة فوقل.
6- أوجد الحل الأمثل للمسألة اعتمادا على الحل الأساسي الأول بطريقة الزاوية الشمالية الغربية

الإجابة السؤال الأول:

هدف المؤسسة هو إيجاد الكميات الواجب توجيهها من كل منبع الى كل مصب بغية تدنة التكاليف الكلية التي تتحملها المؤسسة و بالتالي فإنه توجد دالة هدف هي على الشكل التالي:

$$\boxed{\text{Min: } Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} C_{ij}x_{ij}}$$

مجموع الطلب يساوي مجموع العرض

$\sum_{i=1}^{3} a_i$ = 120+100+130 = 120

$\sum_{j=1}^{3} b_j$= 50+40+30 = 120

يعني هذا أن مجموع العرض يساوي مجموع الطلب.

كميات العرض و كميات الطلب غير سالبة.

و عليه يمكن القول بأن هذه المسألة تخضع لنوع مسائل النقل.

.130 ،100 ،120

الإجابة عن السؤال الثاني: يمكن إجمال معطيات المسألة في الجدول التالي:

	الوسط	الشرق	الغرب	**الطلب. 10^3 قا**
موزاية	1 x_{11}	4 x_{12}	5 x_{13}	**55**
سعيدة	5 x_{21}	7 x_{22}	3 x_{23}	**45**
باتنة	10 x_{31}	8 x_{32}	9 x_{33}	**20**
الطلب. 10^3 قا	**40**	**30**	**50**	**120**

الإجابة عن السؤال الثالث: يتم توزيع الكميات من مختلف المنابع الى مختلف المصبات كما يلي:

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i	باقي	باقي
منبع 1	1 **40**	4 15	5	55	15	0
منبع 2	5	7 **15**	3 **30**	45	30	0
منبع 2	10	8	9 **20**	20	0	
b_j	40	30	50	120		
باقي	0	15	20			
باقي		0	0			

وفيما يلي شرح للجدول:

أ- نبدأ بأول خلية في الجدول و هي الخلية العلوية اليسرى "الشمالية الغربية"، المقابلة لمنبع 1 مصب1، نجد أن إحتياجات المصب 1 هي 40 ألف وحدة، بينما حجم ما يعرضه المنبع 1 هو 55 ألف وحدة ، لذلك فيمكن

لهذا المصب أن يتحصل على كامل إحتياجاته المقدرة بـ. 40 ألف وحدة من المنبع 1 ويتشبع بذلك العمود الأول كلية، بينما يتبقى للمنبع 1 كمية تقدر بـ 15 ألف وحدة تابع التوزيع من خلال الجدول التالي:

ب - ننتقل الى الخلية الموالية و هي المقابلة للمنبع 1 و المصب 2 مقابلها نجد كمية عرض تقدر ب 15 ألف وحدة و هي المقدار المتبقي بعد تسويق المنبع 1 الجزء من معروضه الى المصب 1، بينما إحتياجات المصب2 تقدر ب30 ألف وحدة، لذلك فإن أقصى كمية يمكن توجيهها من المنبع 1 الى المصب 2 هي 15ألف وحدة، وحينئذ تتبقى إحتياجات مقدارها 15 ألف وحدة ينبغي على المصب 2 أن يتحصل عليها من منبع آخر وهذا في الوقت الذي يستنفذ فيه المنبع 1 كل الكميات التي كـان يعرضها.

ج - ننتقل الى خلية أخرى، الخلية 1، 3، لا يمكن الإنتقال إليها لأنه لا يوجد للمنبع 1 ما يسوقه الخلية 2،1 لايمكن الإنتقال إليها لأن المصب 1 لبيت كل إحتياجاته، و الخلية المرشحة الآن هي الخلية المقابلة للمنبع 2 و المصب 2، حيث أن طاقة العرض هي 45 ألف وحدة، بينما الطلب غير الملبى لحد الآن للمصب 2 هو 15 ألف وحدة و هي كمية يمكن تلبيتها من المنبع 2 و يتبقى له بعد ذلك 30 ألف وحدة، و يتشبع المصب 2 كلية.

د ننتقل بعد ذلك الى الخلية الموالية و هي المقابلة للمنبع 2 والصب 3 حيث قيمة العرض المتبقي هى 30 ألف وحدة بينما قيمة الطلب هي 50 ألف وحدة، لذلك فأكبر كمية يمكن الحصول عليها من المنبع 2 هي 30 ألف وحدة و تتبقى قيمة طلب مقدارها 20 ألف وحدة، في حين يكون المنبع 2 قد سوق كل ما كان يعرضه.

هـ- ننتقل الى الخلية 3،1 حيث لا يمكن للمصب 3 أن يسوق اليها لأن إحتياجاتها لبيت كلية الخلية 3، 2، أيضا لا يمكن للمنبع 3 أن يسوق اليها شيئا لأن إحتياجاتها لبيت كلية، وتتبقى بالتالي الخلية المقابلة للمنبع 3 و للمصب 3، حيث أن الكميان المعروضة هي 20 ألف وحدة بينما كميات الطلب المتبقى للمصب 3 هي أيضا 20 ألف وحدة و بذلك يتم تلبية كل إحياجات المصب 3 و في نفس الوقت يتم تسويق كل عرض المنبع 3. و تكون كل الكميات المعروضة للمؤسسة قد سوقت ولبيت كل إحتياجات الجهات الثلاث.

ونحصل بذلك على جدول الحل الأساسي الأول التالي:

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i
منبع 1	1 **40**	4 **15**	5	**55**
منبع 2	5	7 **15**	3 **30**	**45**
منبع 2	10	8	9 **20**	**20**
b_j	**40**	**30**	**50**	**120**

و فيه نجد:

$x_{11}=40$: وتعني أن منبع 1(موزاية) يمون ناحية الوسط بـ 40 ألف وحدة شهريا.

$x_{12}=15$ و تعني أن منبع 1 (موزاية) يمون ناحية الشرق بـ 15ألف وحدة شهريا.

$x_{22}=15$: وتعني منبع2 (سعيدة) يمون ناحية الشرق بـ 15 ألف وحدة شـ هريا.

$x_{23}=30$: و تعني أن منبع 2 (سعيدة) يمون ناحية الغرب بــ 30 ألف وحدة شهريا.

$x_{33}=20$ و تعني أن منبع 3 (باتنة) يمون ناحية الغرب بـ ألف وحدة شهريا.

و بقية المتغيرات قيمها معدومة :أي: $x_{21}=x_{31}=x_{32}=x_{13}=0$

أما التكلفة التي تتحملها المؤسسة فهي:

Min: $Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} C_{ij}x_{ij}$ =1x40+4x15+7x15+3x30+9x20 = 475

و تجدر الإشارة الى أن عدد المتغيرات الداخلة في الحل الأساسي يجب أن تكون: $\boxed{m+n-1}$

حيث: m عدد المنابع (الأسطر)، n عدد المصبات (الأعمدة). وهي القاعدة الأساسية التي ينبغي توفرها لأجل سيرورة إيجاد الحل الأمثل. و بالنظر الى التمرين فإن عدد المتغيرات الداخلة في الحل يجب أن تساوي: 3+3-1= 5. وهو بالفعل عدد المتغيرات الداخلة في الحل كما يعرضها الجدول السابق.

الإجابة عن السؤال الر ابع:

إنطلاقا من الجدول رقم 2، نقوم بإيجاد جدول الحل الأساسي الأول كما يلي:

- نبدأ الحل بالبحث عن أقل تكلفة في الجدول. أقل تكلفة هي 1 في الخلية (1،1) العرض هو 55 ألف وحدة و الطلب هو 40 ألف وحدة نشبع هذه الخلية بالقيمة 40 ألف و هي أقصى ما يمكن نقله الى المصب 1 ، أي أن المنبع 1 يلبي إحتياجات المصب 1 البالغة 40 ألف وحدة ويتبقى لهذا المنبع عرض مقداره 15 ألف وحدة.

- التكلفة الموالية في الترتيب التصاعدي في الجدول هي 3 المقابلة للمنبع 2 و المصب 3، لذلك يتم تشبيع الخلية (3،2)، حيث العرض هو 45 ألف بينما الطلب هو 50 ألف لذلك فأقصى قيمة يمكن أن نشبع بها هذه الخلية هي 45 ألف، يسوق المنبع 2 كل ما كان يعرضه و يتبقى للمصب 3 قيمة 5 آلاف وحدة على تلبية كل إحتياجاته.

- التكلفة الموالية في الترتيب التصاعدي هي 4 و هي المقابلة للمنبع 1 و المصب 2، لذلك يتم تشبيع الخلية (2،1)، حيث العرض المتبقي هو 15 ألف وحدة بينما الطلب هو 30 ألف وحدة، لذلك فأقصى قيمة يمكن أن نشبع بها هذه الخلية هي 15 ألف وحدة، و بذلك يسوق المنبع 1 كل ما كان يعرضه و يتبقى للمصب 2 قيمة 15 ألف وحدة لم تلى بعد

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i	باقي	باقي
منبع 1	1 **40**	4 **15**	5	**55**	15	0
منبع 2	5	7	3 **45**	**45**	0	
منبع 2	10	8 **15**	9 **5**	**20**	5	0
b_j	**40**	**30**	**50**	**120**		
باقي	0	15	5			
باقي		0	0			

- التكلفة الموالية من حيث الترتيب التصاعدي هي 5 في الخلية (3،1)، غير أنه لا يوجد من أين نشبعها لأن المنبع سوق كل ما كان يعرضه.

- التكلفة الموالية الأخرى هي أيضا 5 في الخلية (1،2)، غير أن صف و عمود هذه الخلية معا مشبعان

- التكلفة الموالية من حيث الترتيب التصاعدي هي7 في الخلية (2،2) غير أنه لا يوجد من أين نشبعها لأن المنبع 2 سوق كل ما كان يعرضه.

التكلفة الموالية في الترتيب التصاعدي هي8 وهي المقابلة للمنبع 3 والمصب 2، لذلك يتم تشبيع الخلية (2،3)، حيث العرض هو 20 ألف وحدة و الطلب المتبقي هو 15 ألف وحدة، لذلك فأقصى قيمة يمكن أن نشبع بها هذه الخلية هي 15 ألف وحدة، وبذلك يتبقى للمنبع 3 قيمة 5 آلاف وحدة غير مسوقة، بينما يحصل المصب 2 على كل إحتياجاته.

- التكلفة الموالية هي 9 و هي المقابلة للخلية (3،3)، حيث العرض هو 5 آلاف وحدة والطلب أيضا هو 5 آلاف وحدة لذلك يتم تشبيع سطر و عمود هذه الخلية في آن واحد. و يتم بذلك تصريف كل الكميات المعروضة و تلبية كل الإحتياجات المطلوبة.

و نلاحظ أننا حصلنا على عدد من المتغيرات الداخلة الى الحل مساو الى m+n-1 وفي نفس الوقت حافضنا على توازن الجدول. ونحصل بذلك على جدول الحل الأساسي الأول بطريقة التكلفة الدنيا و هو:

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i
منبع 1	1 **40**	4 **15**	5	**55**
منبع 2	5	7	3 **45**	**45**
منبع 2	10	8 **15**	9 **5**	**20**
b_j	**40**	**30**	**50**	**120**

الإجابة عن السؤال الخامس:

إنطلاقا من الجدول رقم 2 نقوم بإيجاد جدول الحل الأساسي الأول كما يلي:

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i	فرق 1	فرق 2	فرق 3	فرق 4
منبع 1	1 **40**	4 **15**	5	**55**	3	1	1	
منبع 2	5	7	3 **45**	**45**	2	4	1	
منبع 2	10	8 **15**	9 **5**	**20**	1	1		
b_j	**40**	**30**	**50**	**120**				
فرق 1	4	3	2					
فرق 2		3	2					
فرق 3		4	4					

الفرق i: هو الفرق بين أقل تكلفة والتكلفة التي تلها على مستوى الأعمدة.

الفرق j: هو الفرق بين أقل تكلفة و التكلفة على مستوى الأسطر. تظهر فروقات التكاليف بأرقام بنفسجية.

الفروقات الأولى:

- الصف الأول: أقل تكلفة هي 1 و التي تليها هي 4 الفرق بينهما هو 3.
- الصف الثاني: أقل تكلفة هي 3 و التي تليها هي 5 الفرق بينهما هو 2.
- الصف الثالث: أقل تكلفة هي 8 و التي تليها هي و الفرق بينهما هو 1.
- العمود الأول : أقل تكلفة هي 1 و التي تليها هي 5 الفرق بينهما هو 4.
- العمود الثاني: أقل تكلفة هي 4 و التي تليها هي 7 الفرق بينهما هو 3.
- العمود الثالث: أقل تكلفة هي 3 و التي تليها هي 5 الفرق بينهما هو 2 نسجل هذه الفروقات في الجدول السابق، أي في خانات الفرق 1 سطريا و عموديا.

أكبر قيمة في الفرق 1 سطريا و عموديا . 4 موجودة في العمود الأول، وعليه نبدأ بتشبيع الخلية المقابلة لأقل تكلفة وهي الخلية (1،1)، حيث أن العرض هو 55 والطلب 40 لذلك فأقصى قيمة يمكن إعطاؤها لهذه الخلية هي 40 ويشبع بذلك العمود الأول، بينما تبقى قيمة عرض مقدارها 15 بالنسبة للمنبع 1.

نعود من جديد و نحسب الفروقات 2 مع تجاهل تكاليف الخلايا المملوءة و الأسطر و الأعمدة المشبعة.

الفروقات الثانية:

نعود من جديد بنفس المنهجية السابقة، نحسب أرقام فوقل وندونها في عمود أو سطر الفرق 2 كما يظهر في الجدول أعلاه دون الأخذ بعين الإعتبار العمود الذي تشبع، حيث نجد أن أكبر رقم من أرقام فوقل هو 4 على مستوى السطر 2 وأصغر تكلفة على مستوى هذا السطر هي 3 في الخلية (3،2) ، بما أن الكميات المعروضة عندها هي 45 و المطلوبة هي 50، لذلك نوجه لها الكمية 45 و يشبع بذلك السطر الثاني و يبقى إحتياج مقداره 5 للعمود الثالث.

الفروقات الثالثة:

نحسب من جديد أرقام فوقل، و نجد أكبر رقم هو 4 على مستوى العمودين 2 و 3 ، غير أننا نختار العمود الثاني لاحتضان أقل تكلفة، حيث المعروض المتبقي هو 15 و المطلوب هو 30 لذلك نوجه الكمية 15 و يشبع بذلك السطر الأول و يبقى المقدار 15 إحتياج في العمود الثاني.

الفروقات الر ابعة

يبقى فرق وحيد ومقداره 1 على مستوى السطر الثالث، حيث أقل تكلفة تقابله هي 8، لذلك يوجه للخلية (2،3) ما مقداره 15 و يبقى عرض مقداره 5 يوجه في المرحلة الموالية للخلية (3،3).

و يظهر الحل الأساسي الأول بطريقة فوقل كما هو واضح في الجدول أدناه.

وواضح أن عدد الخلايا الداخلة في الحل تساوي الى m+n-1 و هو 5.

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i
منبع 1	1 **40**	4 **15**	5	**55**
منبع 2	5	7	3 **45**	**45**
منبع 2	10	8 **15**	9 **5**	**20**
b_j	**40**	**30**	**50**	**120**

الإجابة عن السؤال السادس:

لقد توصلنا من إلى الحل الأساسي الأول باستخدام طريقة الشمال الغربي:

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i
منبع 1	1 **40**	4 **15**	5	**55**
منبع 2	5	7 **15**	3 **30**	**45**
منبع 2	10	8	9 **20**	**20**
b_j	**40**	**30**	**50**	**120**

لمعرفة هل هذا الحل أمثل أم ليس أمثل ينبغي إيجاد ما نصطلح عليه بالتكاليف الحدية (تكاليف الوحدة الواحدة لكل خلية غير داخلة في الحل) و ذلك على النحو التالي:

- الخلية (3،1) هي خلية غير داخلة في الحل، إذا أمررنا وحدة واحدة عبرها فإن ذلك يؤدي إلى إختلال شروط توازن المسألة و منها

على مستوى السطر الأول $\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = a_i$

على مستوى العمود الثالث $\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = b_j$

لأن مجموع السطر الأول يصبح 51، ، لذلك ينبغي طرح القيمة (- 1) من الخلية (3،2)، غير أن طرح هذه القيمة أيضا يحدث إختلالا على مستوى السطر الثاني لأن المجموع يصبح 44 بدلا من 45 لذلك نضيف القيمة (1) الى الخلية (2،2)، غير أن ذلك أيضا يحدث إختلالا على مستوى العمود 2 فيصبح مجموعه 31 و عليه ينبغي طرح القيمة (- 1) من الخلية (2،1)، و من بهذا يحصل التوازن في المسألة و الخلاصة أننا نضيف و نطرح المقدار (1) على مدار إتجاه المسار كما هو واضح في الجدول التالي

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i
منبع 1	1 **40**	1 -	4 **15**	1 +	5	**55**
منبع 2	5	7 **15** 1 +	3 **30** 1 -	**45**
منبع 2	10	8	9 **20**	**20**
b_j	**40**	**30**	**50**	**120**

إذا رمزنا لتكلفة الوحدة الواحدة المنقولة من المنبع i الى المصب في بـ σ_{ij} فإن تكلفة نقل وحدة واحدة من المنبع 1 الى المصب 3 هي :

$\sigma_{13} = 5x(1)+3x(-1)+7x\ (1)+4x(-1)=5$

و يعني أن هذه الخلية لو تدخل في الحل الأساسي فإن كل وحدة منقولة من المنبع 1 الى المصب 3 سترفع التكلفة الكلية بـ 5 وحدات نقدية، فإذا تم نقل 10 وحدات مثلا من المنبع 1 الى المصب 3 فإن ذلك سيرفيرفع التكلفة الإجمالية بمقدار 50 وحـدة نقدية، وعليه فإن هذه الخلية.

- الخلية (1،2):

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i
منبع 1	1 (1 -) **40**	4 (1 +) **15**	5	**55**
منبع 2	5 (1 +)	7 **15** (1 -)	3 **30**	**45**
منبع 2	10	8	9 **20**	**20**
b_j	**40**	**30**	**50**	**120**

و عليه تصبح تكلفة نقل وحدة واحدة من المنبع 2 الى المصب 1 هي:

$\sigma_{21}=5x(1)+1x(-1)+4\times(1)+7\times(-1)=1$

ستزيد التكلفة بوحدة نقدية واحدة.

الخلية (3،1):

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i
منبع 1	1 (1 -) **40**	4 (1 +) **15**	5	**55**
منبع 2	5	7 **15** (1 -)	3 **30** (1 +)	**45**
منبع 2	10 (1 +)	8	9 **20** (1 -)	**20**
b_j	**40**	**30**	**50**	**120**

و عليه فإن التكلفة الحدية لهذا المسار هي:

$\sigma_{31}=10\times(1)+1\times(-1)+4\times(1)+7\times(-1)+3\times(1)+9x(-1)=0$

و يعني هذا أن هذه الخلية لاتؤثر على التكلفة في حالة إدخالها الى الأساس، إذ أنها لا تنقص منها و لاتزيد فيها.

الخلية (3،2) بنفس الطريقة تماما نجد أن التكلف للمسار المتولد عن هذه الخلية هو $\sigma_{32}=8-7+3-9=-5$

و يعني

هذا أن نقل كل وحدة من المنبع 3 الى المصب 2 يؤدي الى خفض التكاليف الإجمالية بـ5 وحدات نقدية.

نجد أ، التكاليف الحدية المحصل عليها هي:

$\sigma_{32}=-5$	$\sigma_{31}=0$	$\sigma_{21}=1$	$\sigma_{13}=5$

نجد أن الخلية التي تعطي تخفيضا للتكلفة الإجمالية هي (2،3) لذلك نقول أن الحل الأساسي الأول هو غير أمثل، و عموما نقول أن الحل غير أمثل إذا كانت إحدى أو بعض التكاليف الحدية سالبة، و الخلية المرشحة للدخول الى الأساس الأكبر تكلفة حدية سالبة. و عليه فالحل الأساسي الأول يتطلب الأمر تحسينه بإدخال الخلية (2،3) الى الأساس، فكيف يتم ذلك؟. ذلك بإحداث تغييرات على طول قيم المتغيرات المتواجدة على زوايا المسار بإضافة وطرح أصغر قيمة متواجدة على الزوايا السالبة (الزاوايا التي تم طرح القيمة 1 منها)، و هذا لتجنب إحداث قيم سالبة لبعض المتغيرات في مثالنا القيم المتواجدة في المسار هي $x_{21}=15$ و $x_{33}=20$ لذلك المتغيرة التي تخرج من الأساس هي X_{21} حيث يجب أن تتحول الى قيمة معدومة بإحداث التغيير كما في الجدول الموالي:

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i
منبع 1	1 **40**	4 **15**	5	**55**
منبع 2	5	15 - 7 **15**	15 + 3 **30**	**45**
منبع 2	10	15 + 8	15 - 9 **20**	**20**
b_j	**40**	**30**	**50**	**120**

ليصبح الحل الجديد كما يلي:

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i
منبع 1	1 **40**	4 **15**	5	**55**
منبع 2	5	7	3 **45**	**45**
منبع 2	10	8 15	9 **5**	**20**
b_j	**40**	**30**	**50**	**120**

ويصبح مخطط التموين | الجديد كما يلي:

$x_{11}=40$: أي أن المنبع الأول يمون المصب الأول ب 40 ألف وحدة.

$x_{12}=15$: أي أن المنبع الأول يمون المصب الثاني ب 15 ألف وحدة.

$x_{23}=45$: أي أن المنبع الثاني يمون المصب الثالث 45 ألف وحدة.

$x_{32}=15$: أي أن المنبع الثالث يمون المصب الثاني ب 15 ألف وحدة.

$x_{33}=5$: أي أن المنبع الثالث يمون المصب الثالث بـ 5 ألاف وحدة.

أما بقية المتغيرات فهي معدومة.

بما أننا وجدنا التكلفة الحدية للخلية التي دخلت الحل هي $\sigma_{32}=-5$ لذل فإن التكلفة الإجمالية التي تتحملها المؤسسة وفق المخطط الجديد سوف تنخفض بمقدار $15x\ \sigma_{32}$ أي بمقدار 75 ألف وحدة نقدية. و عليه فعند حساب تكلفة النقل الإجمالية يجب أن نجدها تساوي 400 وحدة نقدية لأن التكلفة في الحل الأساسي الأول هي 475 ألف وحدة نقدية و لنرى إذا كان هذا صحيحا.

Min: $Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} C_{ij}x_{ij} = 1 \times 40 + 4 \text{ x } 15 + 3 \times 45 + 8 \text{ x } 15 + 5 \times 9 = 400$

و عليه فإن التكلفة الجديدة تساوي بالفعل 400 ألف وحدة نقدية. علينا أن نختبر من جديد الحل المتوصل إليه إذا كان أمثليا أم و لازال قابلا للتحسين و هذا بإستعمال نفس الطريقة السابقة.

أي إيجاد التكاليف الحدية للخلايا الفارغة و بعد إجراء الحسابات اللازمة تم التوصل إلى النتائج التالية (فرصة للطلبة لإيجادها بأنفسهم)

$\sigma_{13} = 5-9+8-4=0$ $\qquad$ $\sigma_{22}= 7-3+9-8=5$

$\sigma_{21}= 5-1+4-8+9-3=6$ $\qquad$ $\sigma_{31}=10-1+4-8-5$

بما أن كل التكاليف الحدية σ_{ij} أصبحت غير سالبة لذلك نقول أن جدول الحل الأساسي الثاني هو جدول الحل الأمثل، و عليه فإن خطة النقل التي يجب على المؤسسة أن تطبقها هيا التالية:

أ- وحدة موزاية تمون:

- منطقة الوسط بـ 40 ألف وحدة بتكلفة تقدر بـ 40 ألف دينار.
- منطقة الشرق ب 15 ألف وحدة بتكلفة تقدر ب بـ 60 ألف دينار.

ب وحدة سعيدة :تمون

- منطقة الغرب بـ 45 ألف وحدة بتكلفة تقدر بـ 135 ألف دينار.

ج- وحدة باتنة تمون :

- منطقة الشرق بـ 15 ألف وحدة بتكلفة تقدر بـ 120 ألف دينار.
- منطقة الغرب بـ 5 ألاف وحدة بتكلفة تقدر بـ 45 ألف دينار.

وتتحمل مؤسسة المياه المعدنية المالكة للثلاث وحدات أدنى تكلفة تموين و هي 400 ألف دينار خلال الفترة.