سلسلة تمارين تتعلق بالمحور الثاني: التنبؤ بمبيعات المنتجات الجديدة

تمرين (1):

احدى المنظمات الانتاجية، بدأت نشاطها الانتاجي اعتباراً من سنة 2013 في إنتاج نوع معين من السلع. وقد تم الحصول على البيانات المتعلقة بكميات الانتاج لغاية سنة 2022 كما هو موضح بالجدول التالي:

السنة	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
كمية الانتاج (طن)	10	13	15	14	18	19	22	23	27	29

المطلوب : تحديد قيم معادلة الاتجاه العام في ضوء البيانات اعلاه.

تمرين (2)

توفرت لديك البيانات التالية المتعلقة بكمية الانتاج لسلسة زمنية:

السنوات	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
الانتاج (طن)	10	13	15	14	18	20	19	22	23	27	29	35	26

المطلوب تحديد الصيغة الرياضية لمعادلة الاتجاه العام وتحديد القيم التي تمثل الاتجاه العام.

تمرين (3)

إحدى منظمات الاعمال الانتاجية تعمل على تسويق كميات من البضائع الى الأسواق المختلفة وذلك للفترة من سنة 2016 لغاية سنة 2022 كما هو واضح في الجدول التالي:

السنوات	كمية المبيعات (بالآلاف) y_i
2016	8 طن
2017	12 طن
2018	15 طن
2019	18 طن
2020	21 طن
2021	24 طن
2022	26 طن
$n = 7$	$\sum y_i = 124$

اذا علمت ان سنة الأساس هي السنة الأولى (2016) فما هو حجم المبيعات المتوقع لسنة 2023 وسنة 2024.

تمرين (4) :

إحدى منظمات الأعمال التجارية المتخصصة باستيراد وبيع المراوح كان لديها بيانات تتعلق بحجم المبيعات من هذه المراوح للفترة من سنة 2016-2022 كما هو واضح في الجدول التالي

السنوات	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
المبيعات (ألف وحدة من المراوح)	42	46	49	52	54	55	57

المطلوب

1 - ما هي معادلة الاتجاه العام المتعلقة بالتنبؤ بالمبيعات من المراوح.

2 - ما هو حجم المبيعات المتوقع لسنة 2023 .

تمرين (5):

البيانات التالية تتعلق بكمية المبيعات للفترة من 2012 ولغاية سنة 2022 :

السنة	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	المجموع
المبيعات	3	4	8	6	7	11	9	10	14	12	13	97

احسب معادلة الاتجاه العام والقيم المقدرة الاتجاهية للمعادلة المذكورة

تمرين (6):

البيانات التالية تعبر عن سلسلة زمنية لكمية المبيعات للفترة من سنة 2013 ولغاية سنة 2022

السنوات	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
المبيعات	4	8	6	7	11	9	10	14	12	13

المطلوب : احسب القيم المقدرة الاتجاهية لمعادلة الاتجاه العام.

تمرين (7)

البيانات التالية تتعلق بكمية المبيعات للفترة من 2012 ولغاية سنة 2022 :

السنة	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	المجموع
المبيعات	3	4	8	6	7	11	9	10	14	12	13	97

احسب معادلة الاتجاه العام والقيم المقدرة الاتجاهية للمعادلة المذكورة علما أنها تعبر عن منحنى من الدرجة الثانية

حل سلسلة التمارين المتعلقة بالمحور الأول: التنبؤ بمبيعات المنتجات الجديدة

حل التمرين (1):

من الجدول السابق يتضح أن لدينا سلسلة زمنية تتكون من (10) مشاهدات لذلك تقسم السلسلة الى نصفين، النصف الأول يتضمن 5 سنوات والنصف الثاني 5 سنوات ايضاً.

في الخطوة التالية، يتم تثبيت قيم افتراضية (Xi) لسنوات السلسلة الزمنية ويتحدد موقع اصل المعادلة (X=0) في منتصف الفترة الزمنية وذلك اما للنصف الاول او للنصف الثاني، وعلى سبيل المثال لو اعتبرنا النصف الأول هو أساس الدراسة، لذلك سوف تكون سنة 2015 هي الأصل، وعليه تصبح القيم كما يلي:

السنوات Years	كمية الانتاج (طن)	Xi	Y_t= a + b (Xi) Y_t= 14 + 2 (Xi)
2013	10	-2	14 + 2 (-2) = 10
2014	13	-1	14 + 2 (-1) = 12
2015	15	0	14 + 2 (0) = 14
2016	14	1	14 + 2 (1) = 16
2017	18	2	14 + 2 (2) = 18
2018	19	3	14 + 2 (3) = 20
2019	22	4	14 + 2 (4) = 22
2020	23	5	14 + 2 (5) = 24
2021	27	6	14 + 2 (6) = 26
2022	29	7	14 + 2 (7) = 28

حيث أن

$$M_1 = \frac{\sum y1}{n1} = \frac{10+13+15+14+18}{5} = \frac{70}{5} = 14$$

$$M_2 = \frac{\sum y2}{n2} = \frac{19+22+23+27+29}{5} = \frac{120}{5} = 24$$

$$b = \frac{M2-M2}{ni} = \frac{24-14}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

ان النتائج التي تمثل قيمة معادلة الاتجاه العام توضع في العمود الأخير من الجدول حيث يستفيد متخذ القرار من هذه القيم في معرفة سلوك الظاهرة في السنوات بعد سنة 2022 وذلك بزيادة مقدار (2) على أخر قيمة عليه فان حجم الانتاج المتوقع لسنة 2023 سوف يكون بحدود 30 طن وعلى هذا الاساس ينبغي حساب مقدار المبيعات المتوقع.

حل التمرين (2):

يتضح من البيانات اعلاه، أن لدينا 13 مشاهدة، وهذا يعني انه لا يمكن قسمة السلسلة الى قسمين متساويين، لذلك ينبغي اهمال القيمة الوسطية وهي سنة 2016 وعندها نحصل على قسمين متساويين. وعلى سبيل المثال والافتراض ان نصف السلسلة الثاني سوف يعتمد لتحديد اصل المعادلة، وبما ان عدد سنوات النصف الثاني هي (6) لذلك فإن اصل المعادلة (Xi) سوف يقع بين سنة 2019 وسنة 2020 وعليه سوف يكون لدينا ما يلي:

السنوات Years	كمية الانتاج (طن)	Xi	Y_t= a + b (Xi) Y_t= 27 + 2 (Xi)
2010	10	-8.5	27 + 2 (-8.5) = 10
2011	13	-7.5	27 + 2 (-7.5) = 12
2012	15	-6.5	27 + 2 (-6.5) = 14
2013	14	-5.5	27 + 2 (-5.5) = 16
2014	18	-4.5	27 + 2 (-4.5) = 18
2015	20	-3.5	27 + 2 (-3.5) = 20
2016	19		تهمل
2017	22	-2.5	27 + 2 (-2.5) = 22
2018	23	-1.5	27 + 2 (-1.5) = 24
2019	27	-0.5	27 + 2 (-0.5) = 26
2020	29	0.5	27 + 2 (0.5) = 28
2021	35	1.5	27 + 2 (1.5) = 30
2022	26	2.5	27 + 2 (2.5) = 32

حيث أن

$$M_1 = \frac{\sum y1}{n1} = \frac{10+13+15+14+18+20}{6} = \frac{90}{6} = 15$$

$$M_2 = \frac{\sum y2}{n2} = \frac{22+23+27+29+53+26}{6} = \frac{162}{6} = 27$$

$$b = \frac{M2-M2}{ni} = \frac{27-15}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

حل التمرين (3):

يتم في البداية تحديد قيم a، b من المعادلات التالية

$$\sum y_i = na + b\sum x_i$$
$$\sum x_i\, y_i = a\sum x_i + b\sum (x_i)^2$$

ويتم تهيئة البيانات اللازمة لهذه المعادلات من خلال الجدول التالي:

السنوات t	المبيعات Y_i	X_i	X_i^2	X_iY_i
1997	8	0	0	0
1998	12	+1	1	12
1999	15	+2	4	30
2000	18	+3	9	54
2001	21	+4	16	84
2002	24	+5	25	120
2003	26	+6	36	156
n = 7	$\sum y_i = 124$	$\sum x_i = 21$	$\sum (x_i)^2 = 91$	$\sum x_i\, y_i = 456$

بالتعويض عن القيم المجهولة في المعادلات اعلاه تتضح ما يلي:

$b = 3$

$a = 8.7$

وبالتعويض في معادلة الاتجاه نحصل على ما يلي:

$y_t = a + bx_i$

$y_t = 8.7 + 3x_i$

1. حجم المبيعات المتوقع لسنة 2004

$Y\ (2004) = 8.7 + 3\ (2004 - 1997)$

$Y\ (2004) = 8.7 + 3\ (7)$

$Y\ (2004) = 8.7 + 21$

$Y\ (2004) = 29.7$

2. حجم المبيعات المتوقع لسنة 2005

$y\ (2005) = 8.7 + 3\ (2005 - 1997)$

$Y\ (2005) = 8.7 + 3\ (8)$

$Y\ (2005) = 8.7 + 24 = 32.7$

حل التمرين (4):

في البداية يتم تحليل البيانات للمبيعات للفترة (2016 - 2022، وذلك كما يلي:

السنة	X	Y	X^2	YX
2016	0	42	0	0
2017	1	46	1	46
2018	2	49	4	98
2019	3	52	9	156
2020	4	54	16	216
2021	5	55	25	275
2022	6	57	36	342
المجموع	21	355	91	1133

1- من أجل ايجاد قيمة (X) يتم اعتبار سنة 2016 كسنة أساس وذلك من أجل ايجاد الحرافات قيم بقية السنوات عن قيمة مبيعات سنة الأساس المذكورة، لذلك يتم طرح السنوات اللاحقة من سنة الأساس 2016 وبعد ذلك يتم ايجاد قيم بقية أعمدة الجدول والتي سيتم استخدامها لايجاد معادلة الاتجاه العام وذلك بتطبيق الصيغ الرياضية السابقة وذلك كما يلي:

$$b = \frac{n\sum x\,y - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

يتم في البداية ايجاب الاوساط الحسابية:

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{21}{7} = 3$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y}{n} = \frac{355}{n7} = 50.71$$

و عليه فإن: $b = \frac{7931 - 7455}{637 - 441} = 2.43$

وبما أن: $a = \overline{Y} - b\overline{X}$

و عليه فإن: $a = 50.71 - [(2.43)(3)] = 43.42$

وبذلك نحصل على معادلة التنبؤ بطريقة الاتجاه العام (المربعات الصغرى وهي:

$$Y_t = a + bX_i$$

$$Yt = 43.42 + 2.43X_i$$

2 - لاجابة المطلوب الثاني والتنبؤ بمبيعات عام 2023 تقوم بطرح سنة الأساس من سنة2023 من أجل الحصول على قيمة X في المعادلة السابقة أي أن:

2023 - 2016 = 7 سنة

نقوم بالتعويض عن (Xi) وهو الفرق الذي يساوي الرقم (7) فتحصل على حجم المبيعات المتنبأ بها من المراوح لعام 2023 وذلك كما يلي:

$Y_{2023}=43.42 + (2.43)\ (7)$

60430 = مروحة لعام 2023

ان النتائج التي يتم التوصل اليها لرقم المبيعات لعام 2023 تحمل معها خطا معين فهي قد لا تكون دقيقة ولذلك فإن لأي اسلوب تنبؤ هنالك هامش خطا يمثل الانحرافات التي من المحتمل ان ترافق التوقعات المستقبلية كما هو الحال في المبيعات التي تشهد تذبذبا جراء حصول حالات فجائية غير منتظمة، فهي ليست دورية ولا موسمية، وفي مثل هذه الحالة يتم تحديد الانحراف المعياري لتلك التوقعات والتي يتم تعديل الارقام في ضوءها (سواء كان ذلك بالزيادة او بالنقصان بمقدار الانحراف المعياري والذي صيغته الاحصائية هي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum(Xi-\overline{X})^2}{n}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

$$S = \sqrt{\frac{(0-3)^2+(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2+(6-3)^2}{7}}$$

$$S = \sqrt{\frac{28}{7}} = \sqrt{4} = 2$$

وهو يعني ان الانحراف المعياري هو بمقدار 2000 مروحة وفي ضوء ذلك يتم تعديل التنبؤ بالمبيعات حيث سيكون الرقم الجديد بقيمة المبيعات لسنة 2023 التي تم الحصول عليها أعلاه ما بين قيمتين هما (2000+60430) = 62430، و (60430 - 2000) = 58430 مروحة.

حل التمرين (5):

يتم في البداية تنظيم الجدول التالي بالاعتماد على قيم a ، b التي تحسب ايضاً:

القيم المقدرة الاتجاهية للمعادلة

السنة	قيمة الظاهرة	X_i	X_i^2	X_iY_i	$8.82 + 1X_i = Y_t$
2012	3	-5	25	-15	8.82 +(1) (-5) = 3.82
2013	4	-4	16	-16	8.82 + (-4) = 4.82
2014	8	-3	9	-24	8.82 + (-3) = 5.82
2015	6	-2	4	-12	8.82 + (-2) = 6.82
2016	7	-1	1	-7	8.82 + (-1) = 7.82
2017	11	0	0	0	8.82 + (0) = 8.82
2018	9	+1	1	9	8.82 + (1) = 9.82
2019	10	+2	4	20	8.82 + (2) = 10.82
2020	14	+3	9	42	8.82 + (3) = 11.82

2021	12	+4	16	48	8.82 + (4) = 12.82
2022	13	+5	25	65	8.82 + (5) = 13.82
n =11	$\sum Y_i = 97$	$\sum X_i = 0$	$\sum X_i^2$	$\sum X_i Y_i$	

وقد تم حساب قيم المعلمات a b كما يلي

$$a = \frac{\sum Yi}{n} = \frac{97}{11}$$

$$b = \frac{\sum YiXi}{\sum Xi^2} = \frac{110}{110} = 1$$

ومن قيم المعادلة الموضحة بالجدول اعلاه يمكن استنباط مؤشرات كمية تساعد متخذ القرار في ادارة التسويق على معرفة معالم او قيم الظاهرة (كمية المبيعات في السنوات التي تلي سنة 2022 كما مر معنا في حالة طريقة نصفي السلسلة.

حل التمرين (6):

في البداية يتم حساب القيم a، b على اساس البيانات المتوفرة وذلك كما يلي:

$$a = \frac{\sum Yi}{n} = \frac{94}{10} = 9.4$$

$$b = \frac{\sum YiXi}{\sum Xi^2} = \frac{78}{82.5} = 0.95$$

وبذلك تكون معادلة الاتجاه العام كما يلي:

$$Y_t = 9.4 + 0.94\ X_i$$

ويتم تحضير القيم اللازمة لهذه المعادلة من خلال الجدول التالي

السنة	Y_i المبيعات	X_i	X_i^2	X_iY_i	$9.4 + 0.94X^i$
2013	4	-4.5	20.25	- 18	9.4 + 0.94 (- 4.5) = 5.17
2014	8	-3.5	12.25	- 28	9.4 + 0.94 (- 3.5) = 6.11
2015	6	-2.5	6.25	- 15	9.4 + 0.94 (- 2.5) = 7.10
2016	7	-1.5	2.25	- 10.5	9.4 + 0.94 (- 1.5) = 7.99
2017	11	-0.5	0.25	- 5.5	9.4 + 0.94 (- 0.5) = 8.93
2018	9	0.5	0.25	4.5	9.4 + 0.94 (0.5) = 9.87
2019	10	1.5	2.25	15	9.4 + 0.94 (1.5) = 10.81
2020	14	2.5	6.25	35	9.4 + 0.94 (2.5) = 11.75
2021	12	3.5	12.25	42	9.4 + 0.94 (3.5) = 12.69
2022	13	4.5	20.25	58.5	9.4 + 0.94 (4.5) = 13.63
n=10	$\sum Y_i = 94$	$\sum X_i = 0$	$\sum X_i^2 = 82.5$	$\sum X_iY_i = 78$	

ويستفاد من مؤشرات قيم معادلة الاتجاه العام في حساب كمية المبيعات المتوقعة لسنة 2023 وما بعدها.

حل التمرين (7):

يتم الحل كما هو واضح في الجدول التالي:

السنة	Y	X	X^2	X^4	XY	X^2Y	Yt قيمة الاتجاه العام
2012	3	-5	25	625	-15	75	3.19
2013	4	-4	16	256	-16	64	4.28
2014	8	-3	9	81	-24	72	5.86
2015	6	-2	4	16	-12	24	7.07
2016	7	-1	1	1	-7	7	8.20
2017	11	0	0	0	0	0	9.24
2018	9	+1	1	1	9	9	10.20
2019	10	+2	4	16	20	40	11.07
2020	14	+3	9	81	42	126	11.86
2021	12	+4	16	256	48	192	12.58
2022	13	+5	25	625	65	325	13.19
n =11	$\sum Y_i = 97$	$\sum X_i = 0$	$\sum X_i^2 = 110$	$\sum X^4 = 1958$	$\sum X_i Y_i = 110$	$\sum X^2Y = 934$	

حيث تم حساب قيمة الاتجاه العام (y) وفقاً للعلاقة الرياضية:

$$Yt = a + bx_i + cx_i^2$$

لدينا العلاقات الرياضية القياسية التالية:

$$\Sigma Y = na + c\Sigma X_i^2 \quad \text{.....(1)}$$

$$\Sigma XY = b\Sigma X_i^2 \quad \text{.....(2)}$$

$$Ex^2 y = a\Sigma X_i^2 + c\Sigma X_i^4 \quad \text{..... (3)}$$

وبالتعويض في العلاقات الرياضية القياسية السابقة نحصل على ما يلي:

$97 = 110\,a + 110\,c$ .....(1)

$110 = 110b$ .....(2)

$934 = 110\,a + 1958c$.....(3)

وبالتعويض او التبسيط يتبين لنا بأن

$b = 1$

ويحل المعادلتين رقم (1) ورقم (3) نحصل على ما يلي:

$a = 9.24$

$b = -0.042$

وبذلك تصبح معادلة الاتجاه العام المقدرة كما يلي:

$y = 9.24 + 1 * X - 0.042 X^2;$

حيث ان نقطة الأصل هي سنة 2017 وان الوحدة الزمنية هي (1) سنة حيث باستخدام العلاقة الرياضية اعلاه وبالتعويض عن قيم X المناظرة لها يتم الحصول على القيم الاتجاهية التي وردت في العمود الاخير والتي تمثل المؤشرات الاحصائية اللازمة والتي على أساسها يتم بيان القراءة المستقبلية لحجم المبيعات المتوقع للسنوات التي تلي سنة 2022.