Université Larbi Ben M'hidi Om El-Bouaghi

Département MI | Examen de Géométrie | L2 Mathématiques | 2023/2024

Nom et prénom : | Corrigé type | Groupe : 01 et 02.

الإجابة على السؤال 1) تكون على ورقة الإجابة والبقية على ورقة الأسئلة

1) **[05 points] Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire défini par :**

$$\forall p, q \in \mathbb{R}_2[X] : (p|q) = \int_{-3}^{3} p(x)q(x)dx.$$

$(u_0, u_1, u_2) = (1, x, x^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ qui n'est pas orthonormée …………………**0.5 pts**

On utilise l'algorithme de Gram-Smith pour déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ à partir de le base (u_0, u_1, u_2) ……………………………………………………………………………**0.5 pts**

On a $(u_0|u_1) = \int_{-3}^{3} x dx = 0$ ……………………………………………………………**0.5 pts**

On pose $v_0 = u_0$ et $v_1 = u_1$ ……………………………………………………………**0.5 + 0.5 pts**

Soit $v_2 = u_2 + \alpha u_1 + \beta u_0$. ……………………………………………………………**0.5 pts**

On a $v_2 \perp v_1 \Leftrightarrow (u_2|u_1) + \alpha(u_1|u_1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{(u_2|u_1)}{(u_1|u_1)} = 0$. …………………………**0.5 pts**

$v_2 \perp v_0 \Leftrightarrow (u_2|u_0) + \beta(u_0|u_0) = 0 \Leftrightarrow \beta = -\frac{(u_2|u_0)}{(u_0|u_0)} = -\frac{18}{6} = -3$. …………………………**0.5 pts**

$v_2 = x^2 - 3$. ……………………………………………………………………………**0.5 pts**

Une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ est

$(e_1, e_2, e_3) = \left(\frac{v_1}{||v_1||}, \frac{v_2}{||v_2||}, \frac{v_3}{||v_1||}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{18}}x, \frac{5}{6\sqrt{30}}(x^2 - 3)\right)$ ……………………………………**0.5 pts**

2) **[04 points] Soient $A, B, C, A', B', C' \in \mathcal{E}$. Soient G le barycentre de point pondérés $(A, -1), (B, 1), (C, 1)$ et G' le barycentre de points pondérés $(A', -1), (B', 1), (C', 1)$. Montrer que :**

$$-\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 0_E \Leftrightarrow G = G'.$$

On a $-\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = 0_E$ et $-\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} = 0_E$……………………………**0.5 + 0.5 pts**

$(\Longrightarrow)$ Supposons $-\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 0_E$ alors $-\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = 0_E$, donc $\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = 0_E$ et comme G' est l'unique point vérifiant $\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = 0_E$ alors $G = G'$.**1.5 pts**

$(\Longleftarrow)$ Supposons $G = G'$, alors $\begin{cases} -\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = 0_E \\ -\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = 0_E \end{cases}$; donc

$-(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA'}) + (\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GB'}) + (\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GC'}) = 0_E$, d'où $-\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 0_E$. ……………………**1.5 pts**

3) **[03 points] - Donner une définition d'un sous-espace affine de $\mathcal{E}$.**

- **Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. Soient $\mathrm{A, B, C} \in \mathcal{F}$ et D le point de $\mathcal{E}$ vérifiant $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 12\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 7\overrightarrow{\mathrm{BD}}$. Montrer que $\mathrm{D} \in \mathcal{F}$.**
- Un sous-espace affine de E est une partir de E non vide qui est stable par barycentration.………**1pts**

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 12\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 7\overrightarrow{\mathrm{BD}} \Longrightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = 12\overrightarrow{AD} + 12\overrightarrow{DB} + 7\overrightarrow{BD} \Longrightarrow 11\overrightarrow{AD} - 5\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD} = 0_E$. D est le barycentre de points pondérés $(A, 11), (B, -5)$ et $(C, 1)$, donc $\mathrm{D} \in \mathcal{F}$. ……………………………………………………**2pts**

4...) **[02 points] Les droites D : $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -3t - 1, \\ z = t + 1 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et D' : $\begin{cases} x = 3t' + 2 \\ y = -t' \\ z = t' + 1 \end{cases}$, $t' \in \mathbb{R}$ sont –ils du même plan ?**

Il est clair que D et D' ne sont pas parallèles. Etudions l'intersection de D et D'. $\begin{cases} 2t + 1 = 3t' + 2 \\ -3t - 1 = -t' \\ t + 1 = t' + 1 \end{cases} \Longrightarrow$ $\begin{cases} t = -1 \\ 2t = -1, \\ t = t' \end{cases}$ alors $D \cap D' = \Phi$, donc D et D' ne sont pas de même plan. ………………………………...…….**2pts**

5) **[03 points] Déterminer la nature et les caractéristiques de chacun des applications affines suivantes :**

$$f: \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 3 \\ z' = z - 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad g: \begin{cases} x' = -x + 1 \\ y' = -y + 6 \end{cases}$$

f est une translation du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$……………………………………………………..…...…**0.5+0.5pts**

g est une homothétie de rapport -1……………………………………………...……...…**0.5+0.5pts**

$\begin{cases} x = -x + 1 \\ y = -y + 6 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{2}, 3\right)$, ……………………………………………..……………......…**0.5pts**

Le centre de g est le point $A\left(\frac{1}{2}, 3\right)$……………………………………………..……...…………**0.5pts**

6) **[03 points] Ecrie l'équation de l'image de la droite d'équation $2x - 3y = 1$ par la translation du vecteur $v\binom{-2}{5}$.**

t_v: $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 5 \end{cases}$ ………………………………………………………………….…..………….......… **1 pts**

$\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' - 5 \end{cases}$…………………………………………………….….………….......… **1 pts**

L'équation de l'image de la droite d'équation $2x - 3y = 1$ par la translation du vecteur v est $2(x' + 2) - 3(y' - 5) = 1$, c-à-dire $2x' - 3y' = -18$………………………...………….................… **1pts**