Correction de l'examen de Géomértrie 4 : 2018-2019

Exercice 1 : [09 points]

[**1.5**] 1) Au départ, on remarque que γ est définie pout tout $t \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
L'application ($\varphi : t \mapsto -t$) est bejective de $]-\infty, 0[$ dans $]0, +\infty[$ et $\gamma(-t) = (-x(t), -y(t))$, donc on peut limiter l'intervalle d'étude à $]-\infty, 0[$ et on complétera par la symétrie par rapport à l'origine.
L' application ($\psi : t \mapsto 1/t$) est bejective de $]0, 1]$ dans $[1, +\infty[$ et $\gamma(1/t) = (x(t), -y(t))$, donc on peut limiter l'intervalle d'étude à $]0, 1]$ et on complétera par la symétrie par rapport à (Ox).

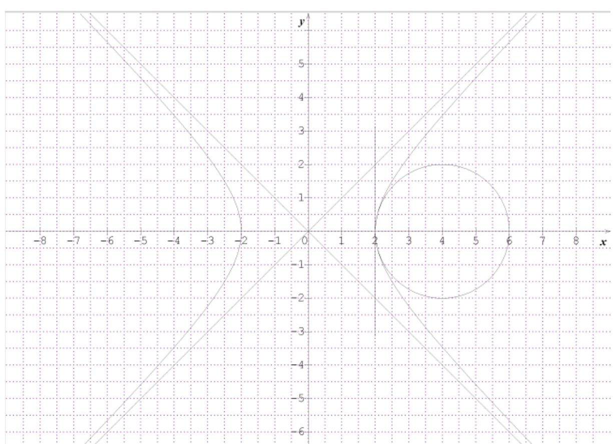
[**1.5**] 2) Variations de $x(t)$ et $y(t)$ sur I_1.

t	0		1
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	2
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0

[**1.5**] 3) Les asymptotes de (C).
$\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = -1$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} y(t) + x(t) = 0$, donc $(\Delta) : y = -x$ est une asymptote oblique de (C) pout $t \longrightarrow 0^+$. La symétrie de (Δ) par rapport à l'origine est (Δ) lui même et la symétrie de (Δ) par rapport à (Ox) est $(\Delta') : y = x$ donc (C) admet deux asymptotes $(\Delta) : y = -x$ et$(\Delta') : y = x$.

[**1.5**] 4) $\gamma(t) = (2, 0) \Longleftrightarrow t = 1$. On a $\gamma'(1) = (0, 2) = 2\overrightarrow{j}$ donc la tengente à (C) au point $A(2, 0)$ est la droite (T) parallèle à (Oy) passant par A c-à-dire $(T) : x = 2$.

[**1.5**] 5) $\gamma'(1) = (0, 2)$ et $\gamma''(1) = (2, -2)$ donc $\kappa_\gamma(1) = \dfrac{-4}{2^3} = \dfrac{-1}{2}$. D'après la figure $N_\gamma(1) = (1, 0)$, donc le cercle oscilateur est de centre $(0, 4)$ et de rayan 2.



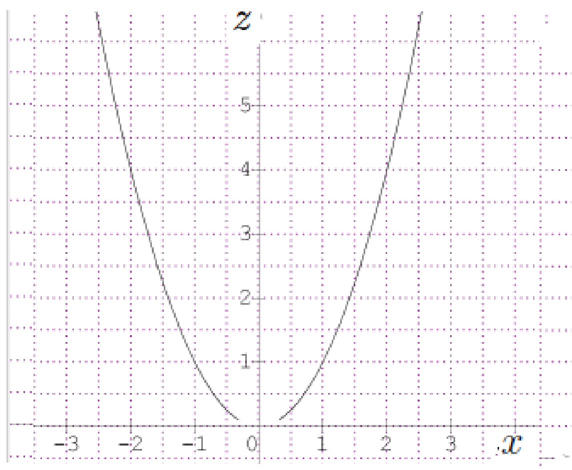
[**1.5**] 6) $\begin{cases} x = t + 1/t \\ y = t - 1/t \end{cases} \Longrightarrow t = \frac{1}{2}(x + y)$ et $1/t = \frac{1}{2}(x - y)$ donc une équation cartisienne de (C) et $\frac{1}{4}(x^2 - y^2) = 1$.

Exercice 2 : [06 points]

[**1.5**] 1) $x^2 - y^2 = \dfrac{u^2 - v^2}{(u^2 - v^2)^2} = z$ donc $(S) : x^2 - y^2 - z = 0$.

On pose $g(x, y, z) = x^2 - y^2 - z$ donc $(S) : g(x, y, z) = 0$. $M(x, y, z)$ est un point régulier de (S) si et seulement si $\nabla g(x, y, z) \neq 0$. On a $\nabla g(x, y, z) = (2x, -2y, -1) \neq$

$(0,0,0), \forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ donc tous les points de (S) sont réguliers.
[1.5] 2) On a $\nabla g(0,1,-1) = (0,-2,-1)$ est un vecteur normal de plan (P) tangent à (S) au point $(0,1,-1)$ donc $(P) : -2y - z + d = 0$, comme $(0,1,-1) \in (P)$ on a $-2+1 = d = 0$ d'où $d = 1$.
[1.5] 3) Considérons la fammille de plans $(\pi_\alpha) : x - y = \alpha$. On pose $\Delta_\alpha = (S) \cap (\pi_\alpha)$.
$\begin{cases} x^2 - y^2 = z \\ x - y = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = \alpha \\ z = 2\alpha x + \alpha^2 \end{cases}$
donc Δ_α est une droite.
Montrons maintenant que $S = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} \Delta_\alpha$. On a $\Delta_\alpha \subset (S), \forall \alpha \in \mathbb{R}$ donc $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} \Delta_\alpha \subset (S)$.
Soit $M(x,y,z) \in (S)$ donc $x^2 - y^2 - z = 0$, on pose $t = x - y$ donc $\begin{cases} x - y = t \\ z = x^2 - y^2 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x - y = t \\ z = 2ty + t^2 \end{cases}$ donc $M \in \Delta_t$ ce qui implique $(S) \subset \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} \Delta_\alpha$, d'où (S) est une surface réglée.
[1.5] 4)$f(u,0) = \left(\frac{1}{u}, 0, \frac{1}{u^2}\right)$ donc cette courbe est caréctérisée par $\begin{cases} x \in \mathbb{R}^* \\ y = 0 \\ z = x^2 \end{cases}$



Exercice 3 : [05 points]
[2 points]1) Un espace affine $\mathcal{E}$ attaché à un espace vectoriel E est un couple $(\mathcal{E}, +)$ formé d'un ensemble $\mathcal{E}$ non vide et d'une loi $'+'$ définie sur $\mathcal{E} \times E$ vérifiant les axiome suivante :
1)$\forall A \in \mathcal{E} : A + \overrightarrow{0_E} = A$.
2) $\forall A \in \mathcal{E}, \forall u, v \in E : A + (u + v) = (A + u) + v$.
3) $\forall A, B \in \mathcal{E} : \exists! u \in E : B = A + u$.
[3 points] 2) a)Par définition $B = A + \overrightarrow{AB}$, donc $A = A + \overrightarrow{AA}$ d'où $\begin{cases} A = A + \overrightarrow{AA} \\ A = A + \overrightarrow{0} \quad \text{(par 1))} \end{cases}$
donc par l'axiome 3) on trouve $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.
b) Par l'axiome 2) $A + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = (A + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = B + \overrightarrow{BC} = C$,
$\begin{cases} C = A + \overrightarrow{AC} \\ C = A + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \end{cases}$ d'où par l'axiome 3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
c) Par $b)$ et $a)$ on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.