

Examen

Exercice 1 : [09 points]

Soit (C) le support de la courbe paramétrée $\gamma(t) = \left(t + \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t}\right)$

- 1) En utilisant les applications $(\varphi : t \mapsto -t)$ et $(\psi : t \mapsto 1/t)$, montrer qu'on peut limiter l'intervalle d'étude à $I_1 =]0, 1]$ (préciser les différentes symétries de (C)).
- 2) Etudier les variations de $x(t)$ et $y(t)$ sur I_1 .
- 3) Déterminer les asymptotes de (C) s'elles existent et tracer (C) .
- 4) Tracer la tangente à (C) au point $A(2, 0)$.
- 5) Tracer le cercle osculateur à (C) au point A .
- 6) Calculer t et $1/t$ en fonction de x et y , en déduire une équation cartésienne de (C) .

$$\left(\text{Rappelons que } \kappa_\gamma(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{\|\gamma'(t)\|^3} \right)$$

Exercice 2 : [06 points]

Soit (S) la surface paramétrée par $f(u, v) = \left(\frac{u}{u^2 - v^2}, \frac{v}{u^2 - v^2}, \frac{1}{u^2 - v^2}\right)$, $\mathbb{R} \ni u \neq v \in \mathbb{R}$.

- 1) Trouver une équation cartésienne de (S) . (*Indication* : calculer $x^2 - y^2$). En déduire les points réguliers de (S) .
- 2) Ecrire l'équation de plan tangent à (S) au point $(0, 1, -1) \in (S)$.
- 3) Montrer que (S) est une surface réglée.
- 4) Tracer le support de la courbe paramétrée par $f(u, 0)$, $u \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 3 : [05 points]

- 1) Rappeler la définition d'un espace affine $\mathcal{E}$ attaché à un espace vectoriel E .
- 2) Soit E un espace affine attaché à un espace vectoriel E , montrer les propriétés suivantes :
 - a) $\forall A \in \mathcal{E} : \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.
 - b) $\forall A, B, C \in \mathcal{E} : \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
 - c) $\forall A, B \in \mathcal{E} : \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.