Exercices sur le chapitre 3 : Paramétrisation des courbes et surfaces

Exercice 3.1

Soit $\gamma :]0,1[\rightarrow \mathbb{R}^3$ la courbe donnée par $\gamma(t) = \left(\frac{1}{1-t^2}, t^2 + 1\right)$.

1. Montrer que γ est une courbe régulière.
2. Soit $a \in]0,1[$. Déterminer la droite tangente de γ à en $\gamma(a)$.
3. Déterminer une équation cartésienne du support géométrique de γ .

Solution.

1. Pour tout $t \in]0,1[$: $\gamma'(t) = \left(\frac{2t}{(1-t^2)^2}, 2t\right) \neq (0,0)$, donc γ est une courbe régulière.

2. La droite tangente de γ à en $\gamma(a)$ est la droite de vecteur directeur $\gamma'(a) = \left(\frac{2a}{(1-a^2)^2}, 2a\right)$ passant par le point $\gamma(a) = \left(\frac{1}{1-a^2}, a^2 + 1\right)$. Un paramétrage de cette droite est

$$\begin{cases} x = \frac{2a}{(1-a^2)^2} s + \frac{1}{1-a^2}, \\ y = 2as + a^2 + 1 \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$$

3. On a $\begin{cases} x = \frac{1}{1-t^2} \\ y = t^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{1-t^2} \\ t^2 = y - 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{1-(y-1)} = \frac{2}{2-y}$.

$$\text{D'autre par } \begin{cases} x = \frac{1}{1-t^2} \\ y = t^2 + 1 \\ t \in]0,1[\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Donc une équation cartésienne du support géométrique de γ est

$$x = \frac{2}{2-y} \text{ avec } 0 \leq y \leq 2.$$

Exercice 3.2

1. Déterminer une paramétrisation normale de la courbe $\gamma :]0,1[\rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $\gamma(t) = \left(\frac{8}{3}t\sqrt{t}, t^2 - 2t + 1\right)$.
2. Calculer la longueur de l'arc de γ correspondante à $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Solution.

$$\begin{aligned} \text{On pose } s(t) &= \int \gamma'(t) dt = \int \sqrt{16t + 4t^2 - 8t + 4} dt \\ &= \int (2t + 2) dt = t^2 + 2t + c. \end{aligned}$$

On a $s(t) = t^2 + 2t + 1 = (t + 1)^2$ est une abscisse curviligne de γ .

$s^{-1}(t) = \sqrt{t} - 1$. Donc, une paramétrisation normale de γ est

$$\tilde{\gamma} :]1,4[\rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ avec}$$

$$\gamma(t) = \left(\frac{8}{3}(\sqrt{t} - 1)\sqrt{\sqrt{t} - 1}, (\sqrt{t} - 1)^2 - 2\sqrt{t} + 3 \right).$$

La longueur de l'arc de γ correspondante à $t \in [0, \frac{1}{2}]$ est $s\left(\frac{1}{2}\right) - s(0) = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$.

Exercice 3.3.

Démontrer la **Proposition 3.12**.

Solution.

La formule $\vec{T}'(t) = \bar{\kappa}(t)\vec{N}(t)$ est démontré dans la **Proposition 3.8**.

Pour la deuxième formule, pour tout $t \in I$ on a

$$\vec{N}(t) \cdot \vec{N}(t) = \|\vec{N}(t)\|^2 = 1.$$

En dérivant les deux membres on trouve $\vec{N}'(t) \cdot \vec{N}(t) = 0, \forall t \in I$, alors $\vec{N}'(t)$ et $T(t)$ sont colinéaires (car les deux vecteurs sont orthogonaux à le même vecteur $\vec{N}(t)$).

D'autre part, en dérivant les deux membres de l'identité

$$\vec{N}(t) \cdot \vec{T}(t) = 0, \forall t \in I,$$

on trouve

$$\vec{N}'(t) \cdot \vec{T}(t) + \vec{N}(t)T'(t) = 0, \forall t \in I,$$

d'où $\vec{N}'(t) \cdot \vec{T}(t) = -\vec{T}'(t) \cdot \vec{N}(t) = -\bar{\kappa}(t)$.

Enfin, comme $\vec{N}'(t)$ et $T(t)$ sont colinéaires, on a

$$\vec{N}'(t) = \left(\vec{N}'(t) \cdot \vec{T}(t) \right) T(t) = -\bar{\kappa}(t)\vec{T}(t).$$

Exercice 3.4.

Démontrer la **Proposition 3.17**.

Solution.

La première formule découle de la définition de la normale principale.

Montrons la deuxième formule. Soit $t \in I$.

On a $\vec{T}(t) \cdot \vec{N}(t) = 0$, en dérivant on trouve

$$\vec{N}'(t) \cdot \vec{T}(t) = -\vec{T}'(t) \cdot \vec{N}(t) = -\left(\kappa(t)\vec{N}(t) \right) \cdot \vec{N}(t) = -\kappa(t).$$

On a $\vec{N}(t) \cdot \vec{N}(t) = 1$, en dérivant on trouve $\vec{N}'(t) \cdot \vec{N}(t) = 0$.

De même, on a $\vec{B}(t) \cdot \vec{N}(t) = 0$, en dérivant on trouve

$$\vec{N}'(t) \cdot \vec{B}(t) = -\vec{B}'(t) \cdot \vec{N}(t) = -\left(\tau(t)\vec{N}(t) \right) \cdot \vec{N}(t) = -\tau(t).$$

Enfin, $N'(t) =$

$$\left(\vec{N}'(t) \cdot \vec{N}(t) \right) \vec{T}(t) + \left(\vec{N}'(t) \cdot \vec{N}(t) \right) \vec{N}(t) + \left(\vec{N}'(t) \cdot \vec{N}(t) \right) \vec{B}(t) = -\kappa(t)\vec{T}(t)\tau(t)\vec{B}(t).$$

Pour la troisième formule, on a $\tau(t) = \vec{B}'(t) \cdot \vec{N}(t)$, donc il s'agit de montrer que $\vec{B}'(t)$ et $\vec{N}(t)$ sont colinéaire.

Pour tout $t \in I$, on a $\begin{cases} \vec{B}(t) \cdot \vec{B}(t) = 1 \\ \vec{B}(t) \cdot \vec{T}(t) = 0 \end{cases}$, en dérivant, on trouve

$$\begin{cases} \vec{B}'(t) \cdot \vec{B}(t) = 0 \\ \vec{B}'(t) \cdot \vec{T}(t) + \underbrace{\vec{B}(t) \cdot \vec{T}'(t)}_{=0(\text{car } T'=\kappa(t)\vec{N}(t))} = \vec{B}'(t) \cdot \vec{T}(t) = 0, \end{cases}$$

donc le vecteur $\vec{B}'(t)$ est donc orthogonal $\vec{T}(t)$ et $\vec{B}(t)$, il est donc colinéaire à $\vec{N}(t)$ ainsi $\vec{B}'(t) = (\vec{B}'(t) \cdot \vec{N}(t)) \vec{N}(t) = \tau(t)\vec{N}(t)$.

Exercice 3.4.

Soit (C) le support de la courbe paramétrée

$$\gamma(t) = \left(t + \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t} \right), t \in \mathbb{R}^*.$$

- 1) En utilisant les applications ($\varphi: t \rightarrow -t$) et ($\psi: t \rightarrow \frac{1}{t}$), montrer qu'on peut limiter l'intervalle d'étude à $I_1 =]0, 1]$ (préciser les différentes symétries de (C)).
- 2) Expliquer (sans faire l'étude) comment on construit (C).

Solution.

1) Soient $(x(t), y(t)) = \left(t + \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t} \right)$.

- L'application φ est bijective de $] -\infty, 0[$ dans $]0, +\infty[$ et $\gamma(-t) = (-x(t), -y(t)), \forall t \in \mathbb{R}$.

donc on peut limiter l'intervalle d'étude à $]0, +\infty[$ et on complétera par la symétrie par rapport à l'origine.

- L'application ψ est bijective de $]0, 1]$ dans $[1, +\infty[$ et

$$\gamma\left(\frac{1}{t}\right) = (x(t), -y(t)), \forall t \in]0, +\infty[.$$

donc on peut limiter l'intervalle d'étude à $]0, 1]$ et on complétera par la symétrie par rapport à $(O, \vec{i})$.

- 2) On construit (C_1) l'arc de (C) correspondante à $t \in]0, 1]$, puis (C_2) la symétrie de (C_1) par rapport à $(O, \vec{i})$ (cela signifie qu'on a construit l'arc de (C) correspondante à $t \in]0, +\infty[$), ensuite on a construit les symétries de (C_1) et (C_2) par rapport à l'origine ainsi on a construit la courbe (C) toute entière.

Exercice 3.4.

Etudier le comportement asymptotique de la courbe paramétrée

$$\gamma(t) = \left(t + \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t} \right), t \in \mathbb{R}^*.$$

Les extrémités du domaine de définition de (C) sont $-\infty, 0^+, 0^-$ et $+\infty$. On pose $x(t) = t + \frac{1}{t}$ et $y(t) = t - \frac{1}{t}$.

- On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$. On calcule $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)}$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t - \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t}} = 1, \text{ alors on calcule } \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) - 1 \times x(t).$$

On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) - 1 \times x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2}{t} = 0$, donc (C) admet la droite d'équation $y = x$ comme asymptote oblique quand tend vers $t \rightarrow +\infty$.

- On a $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = -\infty$. On calcule $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y(t)}{x(t)}$.

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t - \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t}} = 1, \text{ alors on calcule } \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) - 1 \times x(t).$$

On a $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) - 1 \times x(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{2}{t} = 0$, donc (C) admet la droite d'équation $y = x$ comme asymptote oblique quand tend vers $t \rightarrow -\infty$.

- On a $\lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) = +\infty$. On calcule $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{y(t)}{x(t)}$.

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{t - \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t}} = -1, \text{ alors on calcule } \lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) - (-1) \times x(t).$$

On a $\lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) - (-1) \times x(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} 2t = 0$ donc (C) admet la droite d'équation $y = -x$ comme asymptote oblique quand tend vers $t \rightarrow 0^-$.

- On a $\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = -\infty$. On calcule $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{y(t)}{x(t)}$.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t}} = -1, \text{ alors on calcule } \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) - (-1) \times x(t).$$

On a $\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) - (-1) \times x(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} 2t = 0$ donc (C) admet la droite d'équation $y = -x$ comme asymptote oblique quand tend vers $t \rightarrow 0^+$.