Chapitre 3 : Paramétrisation des courbes et surfaces

Dans tout ce chapitre $n \in \{2,3\}$ et I désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Pour simplifier le cours, on se limite à l'espace $\mathbb{R}^n$ considérée comme espace euclidien affine attaché à $\mathbb{R}^n$. Tout le contenu de cours peut reformuler dans un espace euclidien affine E.

3.1 Courbe paramétrée

Définition 3.1.

- On appelle courbe paramétrée de classe C^{k} de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ une application $\gamma: \mathrm{I} \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ de classe C^{k}.
- Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ $\gamma(\mathrm{I}) = \{\gamma(\mathrm{t}), \mathrm{t} \in \mathrm{I}\}$ est appelé support géométrique de la courbe γ.
- Si $n = 2$ alors γ est dite courbe plane.
- Si $n = 3$ alors γ est dite courbe gauche.

Exemple.

- L'application $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ donnée par
$$\gamma(t) = (2t - 1, 3t + 2, -t + 5)$$
est une courbe paramétrée de classe C^∞, sa support géométrique est la droite orientée par le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et passant par le point $(-1,2,5)$.
- L'application $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ donnée par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ est une courbe paramétrée de classe C^∞, sa support géométrique est le cercle du centre $(0,0)$ et de rayon 1.

Soit I et J deux intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Une application $\varphi: I \to J$ est dite C^1-difféomorphisme si

- $\varphi: I \to J$ est bijective.
- φ et φ^{-1} sont de classe C^1.

Proposition 3.2.
Soient $\gamma : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ une courbe paramétrée de classe C^1 et $\varphi : I \to J$ est un C^1difféomorphisme, alors $\gamma \circ \varphi : \mathrm{J} \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ est une courbe paramétrée de classe C^1 qui a le même support géométrique de γ.

Définition 3.3.
Soient $\gamma : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ une courbe paramétrée de classe C^1 et $\varphi : I \to J$ est un C^1difféomorphisme, alors φ est appelée changement de variable amissible et $\gamma \circ \varphi$ est appelée reparamétrisation de γ.

Exemple.

- Soit $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée de classe C^∞donnée par $\gamma(t) = (2t - 1{,}3t + 2)$. Il est clair que l'application $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $\varphi(t) = 3t - 10$ est un changement de variable amissible, alors $\gamma \circ \varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma \circ \varphi\ (\mathrm{t}) = (6\mathrm{t} - 21{,}9\mathrm{t} - 28)$ est un reparamétrisation de γ.
- Soit $\gamma:]0{,}2\pi[\to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée de classe C^∞donnée par $\gamma(t) = (\cos t\,, \sin t)$. L'application $\varphi:]0{,}2\pi[\to]0{,}2\pi[$ donnée par $\varphi(t) = 2\pi - t$ est un changement de variable amissible, alors $\gamma \circ \varphi:]0{,}2\pi[\to \mathbb{R}^2$, $\gamma \circ \varphi\ (\mathrm{t}) = (\cos(2\pi - t)\,, \sin(2\pi - t)) = (\cos t\,, -\sin t)$ est un reparamétrisation de γ.

Définition 3.4.
Soit $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée. On dit que $\overrightarrow{v_0}$ est est un vecteur tangent à la courbe γ en $\gamma(t_0), avec\ t_0 \in I$ s' il existe $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in I$,

$$\overrightarrow{\gamma(t_0)\gamma(t)} = \lambda(t)\overrightarrow{v_0} + \lambda(t)\varepsilon(t), \text{ avec } \lim_{t \to t_0} \varepsilon(t) = (0{,}0).$$

La droite passant par t_0 et de vecteur directeur $\overrightarrow{v_0}$ est alors appelée la droite tangente de γ à en $\gamma(t_0)$.

Si $\gamma: \mathrm{I} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ est une courbe paramétrée de classe C^1, alors par la formule de Taylor, on a

$$\overrightarrow{\gamma(t_0)\gamma(t)} = \gamma'(t_0)(t-t_0) + (t-t_0)\varepsilon(t), \text{ avec } \lim_{t \to t_0} \varepsilon(t) = (0,0).$$

Alors, on a la proposition suivante

Proposition 3.5.
Soient $\gamma: \mathrm{I} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ une courbe paramétrée et $t_0 \in I$. Si $\gamma'(\mathrm{t}_0) \neq 0_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}}$, alors $\gamma'(\mathrm{t}_0)$ est un vecteur tangent à la courbe γ en $\gamma(t_0)$.

Définition 3.6.
Une courbe paramétrée $\gamma: \mathrm{I} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ de classe C^1 est dite régulière si pour tout $t \in I$, $\gamma'(\mathrm{t}) \neq 0_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}}$.

Exemple.
- La courbe paramétrée de classe C^{∞} $\gamma:]0,2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ est régulière, en effet $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq (0,0)$ pour tout $t \in]0,2\pi[$.
- La courbe paramétrée de classe C^{∞} $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $\gamma(t) = (t^2+1, -t^3+t^2-2, t^4)$ n'est régulière, car $\gamma'(t) = (2t, -3t^2+2t, 4t^3)$, donc $\gamma'(0) = (0,0,0)$.

3.2 Paramétrage par abscisse curviligne

Définition 3.7.
On appelle abscisse curviligne de la courbe $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ toute application $s: I \rightarrow \mathbb{R}$ tel que, si $t_1, t_2 \in I$ avec $t_1 < t_2$ alors $s(t_2) - s(t_1)$ est la longueur de l'arc de γ correspondant à $t \in [t_1, t_2]$.

On admet la proposition suivante qui assure que toute courbe paramétrée de classe C^1 admet une abscisse curviligne, de plus, deux abscisses curvilignes de la même courbe paramétrée sont égale à une constante additive près (sa démonstration repose sur les méthodes pratiques du calcul de la longueur d'un arc d'une courbe paramétrée)

Proposition 3.8.
Les abscisses curvilignes de la courbe $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 sont les primitives sur Ide la fonction $||\gamma'(t)||$.

Toute courbe paramétrée régulière de classe C^1 peut être reparamétrée par abscisse curviligne.

Proposition 3.9.
Soit s une abscisse curviligne de la courbe $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$. Alors s est une application strictement croissante de J dans $J = s(I)$(donc s un changement de variable admissible), de plus, la reparamétrisation de γ donnée par $\tilde{\gamma}: J \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(s^{-1}(t))$ est normale c-à-dire vérifie $\left||\tilde{\gamma}(t)|\right| = 1, \forall t \in J$.

3.3 Etude locale des courbes planes

Dans cette section, toutes les courbes considérées sont des courbes planes régulières**.**

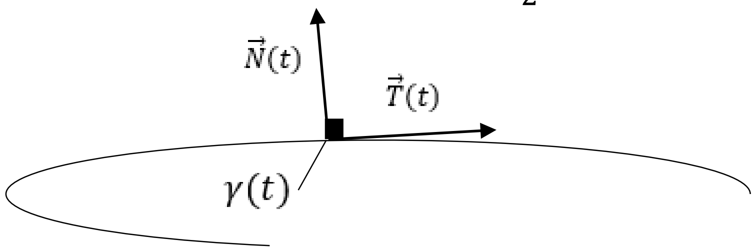
- Le plan est orienté dans le sens positif ou direct (voir les animations dans lien suivant).

https://www.trigofacile.com/maths/trigo/notions/orientation/plan.htm

- Une base $(\vec{u}, \vec{v})$ du plan est directe si et seulement si la mesure principale de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ est positive.
- Un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ du plan est direct si et seulement si la base $(\vec{u}, \vec{v})$ est directe.

Définition 3.7. (Repère de Serret-Frenet)
Soit γ: $[a, b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière de classe C^1.
Soit $\vec{T}(t) = \frac{\gamma\prime(t)}{||\gamma\prime(t)||}$ et $\vec{N}(t)$ le vecteur unitaire du plan tel que $(\vec{T}(t), \vec{N}(t))$ est une base orthonormée directe du plan.
Le repère de Serret-Frenet de γ au point $\gamma(t)$ est le repère orthonormé direct : $(\gamma(t), \vec{T}(t), \vec{N}(t))$.

- Le vecteur $\vec{T}(t)$ est tangent à la courbe au point $\gamma(t)$ et $\vec{N}(t)$ est l'image de $\vec{T}(t)$ par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.



Proposition 3.8.
Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière normale de classe C^2, alors pour tout $t \in I$, $\gamma''(t)$ est un vecteur colinéaire à $\vec{N}(t)$, de plus il existe une application continue $\bar{\kappa} : I \to \mathbb{R}$ telle que, $\gamma''(t) = \vec{\mathrm{T}}'(\mathrm{t}) = \bar{\kappa}(\mathrm{t})\, \vec{N}(t)$ pour tout $t \in I$.

Démonstration.

Pour tout $t \in I$, $\vec{T}(t) \cdot \vec{T}(t) = \left|\left|\vec{T}(t)\right|\right|^2 = 1$. En dérivant, on trouve $2\vec{T}'(t) \cdot \vec{T}(t) = 0$, alors $T'(t) \perp T(t)$, pour tout $t \in I$.
On pose $\bar{\kappa}(\mathrm{t}) = \vec{\mathrm{T}}'(\mathrm{t}) \cdot \vec{N}(t)$, alors $\gamma''(t) = \vec{\mathrm{T}}'(\mathrm{t}) = \bar{\kappa}(\mathrm{t})\, \vec{N}(t)$.

Proposition 3.9.
Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée normale régulière de classe C^2. Soit $t \in I$.

- La courbure algébrique de γ au point $\gamma(t)$ est $\bar{\kappa}(\mathrm{t}) = \vec{\mathrm{T}}'(\mathrm{t}) \cdot \vec{N}(t)$.
- La courbure de γ au point $\gamma(t)$ est $\kappa(\mathrm{t}) = |\bar{\kappa}(\mathrm{t})| = ||\gamma''(\mathrm{t})||$.
- Le point $\gamma(t)$ est bi-régulier si $\gamma''(\mathrm{t}) \neq (0,0)$.
- La courbe γ est bi-régulière si tous ses points sont bi-réguliers.

Exemple.
Soit : $]0,2\pi[\to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée donnée par $\gamma(t) = (\cos t\,, \sin t)$. Clairement γ est une courbe paramétrée normale régulière de classe C^{∞}.
Pour tout $t \in I$, on a

- $\gamma''(t) = (-\cos t\,, -\sin t)$.
- La courbure γ au point $\gamma(t)$ est $\kappa(t) = \left|\left|\gamma''(t)\right|\right| = 1$.
- La courbe γ est bi-régulières.

Remarque 3.10.
Si la courbe paramétrée régulière de classse C^2 $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ n'est pas normale, on utilise un reparamitrisation par abscisse curviligne pour montrer que la courbure algébrique est donnée pour tout $t \in I$ par
$$\overline{\kappa}(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{||\gamma'(t)||^3},$$
avec $\det\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a & a \\ b & c \end{vmatrix} = ac - ba.$

Exemple.
Soit $\gamma :]0,2\pi[\to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée donnée par $\gamma(t) = (\mathrm{r}\cos t\,, r\sin t)$. Clairement γ est une courbe paramétrée régulière de classe C^∞ qui n'est pas forcément normale.
On a $\gamma'(t) = (-\mathrm{r}\sin t\,, \mathrm{r}\cos\ t)$ et $\gamma''(t) = (-\,\mathrm{r}\cos t\,, -\,\mathrm{r}\sin\ t)$, alors
$$\overline{\kappa}(t) = \frac{\begin{vmatrix} -r\ sin\ t & -r\ cost \\ r\ cos\ t & -r\sin t \end{vmatrix}}{r^3} = \frac{1}{r}.$$

Définition 3.11.
Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}$ une courbe paramétrée régulière et de classe C^2.

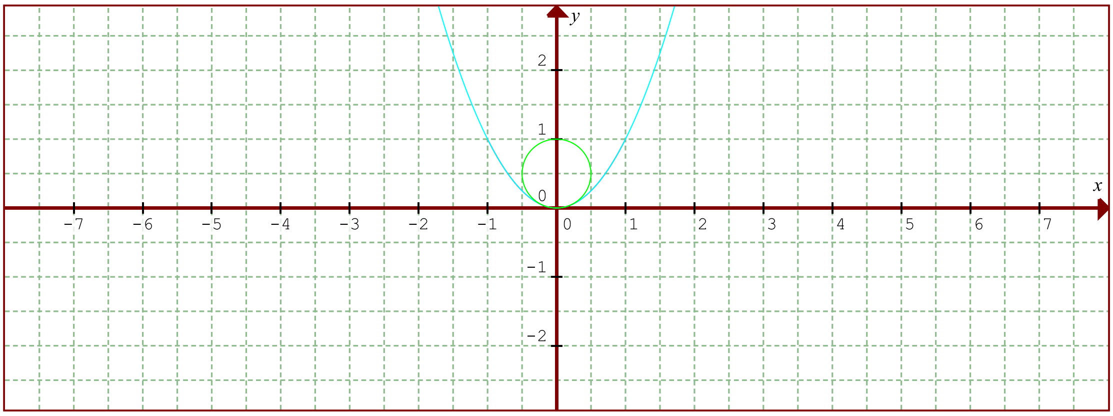
- Le centre de courbure de γ en un point $\gamma(t)$ de courbure non nulle est le point $C(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\overline{\kappa}(t)}\vec{N}(t)$.
- Le cercle osculateur de γ en un point $\gamma(t)$ de courbure non nulle est le cercle de centre $C(t)$ et de rayon $\frac{1}{|\overline{\kappa}(t)|}$.

Exemple.
Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée donnée par $\gamma(t) = (t, t^2)$. Clairement γ est une courbe paramétrée régulière de classe C^∞ qui n'est pas normale.

On a $\gamma'(t) = (1, 2t)$ et $\gamma''(t) = (0, 2)$, alors

$$\bar{\kappa}(t) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2t & 2 \end{vmatrix}}{\left(\sqrt{1+4t^2}\right)^3} = \frac{2}{\left(\sqrt{1+4t^2}\right)^3}.$$

On a $\bar{\kappa}(0) = 2 \neq 0$, alors le centre de courbure est $C(0) = \gamma(0) + \frac{1}{2}\vec{N}(t) = (0, \frac{1}{2})$ et le cercle osculateur de γ en un point $\gamma(0)$ de est le cercle de centre $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.



Définition 3.12. (Formules de Serret Frenet)

Soit $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée normale régulière de classe C^2. Soit $t \in I$ et $(\gamma(t), \vec{T}(t), \vec{N}(t))$ le repère de Serret-Frenet de γ au point $\gamma(t)$. Alors

$$\begin{cases} \vec{T}'(t) = \bar{\kappa}(t)\vec{N}(t) \\ \vec{N}'(t) = -\bar{\kappa}(t)\vec{T}(t) \end{cases}.$$

Démonstration

Voir exercice 3.3.

3.4 Etude locale des courbes gauches

Dans cette section, toutes les courbes considérées sont des courbes gauche régulières.

- L'espace est orienté (Orienter l'espace, c'est distinguer les repères "directs" de ceux qui ne le sont pas , voir le lien suivant) https://uel.unisciel.fr/physique/outils_nancy/outils_nancy_ch03/co/apprendre_03_03.html

- Un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ d'espace est direct si et seulement si la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est directe.
- Le produit vectoriel de $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{v}(\alpha, \beta, \gamma)$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$.

Définition 3.13.

- La courbure d'une courbe paramétrée régulière $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$ de classe C^2 est $\kappa(t) = \frac{||\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)||}{||\gamma'(t)||^3}$.
- En particulier, si de plus, la courbe est normale alors $\kappa(t) = ||\gamma''(t)||$.

Définition 3.14.

Soit $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière normale de classe C^2.

- Un point $\gamma(t)$ est dit bi-régulier si $\gamma''(t) \neq (0,0,0)$.
- Le rayon de courbure de γ en un point bi-régulier $\gamma(t)$ est $R(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$.
- Soit $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||}$. La normale principale de γ en un point bi-régulier $\gamma(t)$ est $\vec{N}(t) = \frac{1}{\kappa(t)} T'(t) = \frac{\gamma''(t)}{||\gamma''(t)||}$.
- Comme dans le cas des courbes planes, $\overrightarrow{\gamma'}(t)$ et $\overrightarrow{\gamma''}(t)$ sont deux vecteurs orthogonaux, alors $\vec{T}$ et $\vec{N}$ sont deux vecteurs unitaires orthogonaux.
- La bi-normale de γ en un point b-régulier $\gamma(t)$ est le vecteur $\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \wedge \vec{N}(t)$.
- Le repère de Serret-Frenet de de γ en un point b-régulier $\gamma(t)$ est $\left(\gamma(t), \vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)\right)$.

Exemple.
Soit $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la courbe paramétrée donnée par

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{2}\cos t, \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t, \sin t\right).$$

γ est une courbe régulière normale de classe C^∞ dont tous ses points sont bi-réguliers car $\left||\gamma(t)|\right| = 1$,
$\gamma'(t) = \left(-\frac{1}{2}\sin t, -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t, \cos t\right) \neq (0,0,0)$
et
$\gamma''(t) = \left(-\frac{1}{2}\cos t, -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t, -\sin t\right) \neq (0,0,0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||} = \left(-\frac{1}{2}\sin t, -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t, \cos t\right).$$

$\kappa(t) = \left||\gamma''(t)|\right| = 1.$

$$\vec{N}(t) = \frac{\gamma''(t)}{||\gamma''(t)||} = \left(-\frac{1}{2}\cos t, -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t, -\sin t\right).$$

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \wedge \vec{N}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{1}{2}\sin t & -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t & \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t & -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t & -\sin t \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right).$$

Proposition 3.15.
Soit $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière de classe C^3. La torsion de γ en un point bi-régulier $\gamma(t)$ est

$$\tau(t) = \vec{B'}(t) \cdot \vec{N}(t) = -\frac{\det\left(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)\right)}{\left||\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)|\right|^2}.$$

En particulier, si γ est normale, alors

$$\tau(t) = -\frac{\det\left(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)\right)}{\left|\left|\gamma''(t)\right|\right|^2}.$$

Exemple

Dans l'exemple précédent $\vec{B}(t)$ est constant, alors $\tau(t) = \vec{B'}(t) \cdot \vec{N}(t) = 0$.

Remarque 3.16.
Soit $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière de classe C^3 dont tous les points sont bi-réguliers. La courbe γ est plane si et seulement si $\tau(t) = 0, \forall t \in I$.

Proposition 3.17. (Formules de Serret Frenet)
Soit $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée normale régulière de classe C^3 et $\gamma(t)$ un point bi-régulier. Alors on a :

$$\begin{cases} \vec{T}'(t) = \kappa(t)\vec{N}(t) \\ \vec{N}'(t) = -\kappa(t)\vec{T}(t) - \tau(t)\vec{B}(t) \\ B'(t) = \tau(t)\vec{N}(t) \end{cases}$$

Démonstration.
Voir exercice 3.4.

3. 5 Tracé des courbes paramétrées planes

3.5.1 Courbes en coordonnées cartésiennes

1) Réduction du domaine d'étude

Il s'agit de déterminer un domaine d'étude plus petit que le domaine de définition de $x(t)$ et $y(t)$, tracer la courbe dans ce domaine réduit, ensuite compléter la trace grâce aux symétries, rotations, translation, périodicités...

On rappelle l'effet de transformations ponctuelles usuels sur un point $M(x, y)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On désigne par $M'(x, y)$ l'image de $M(x, y)$ par la transformation indiquée alors, on a

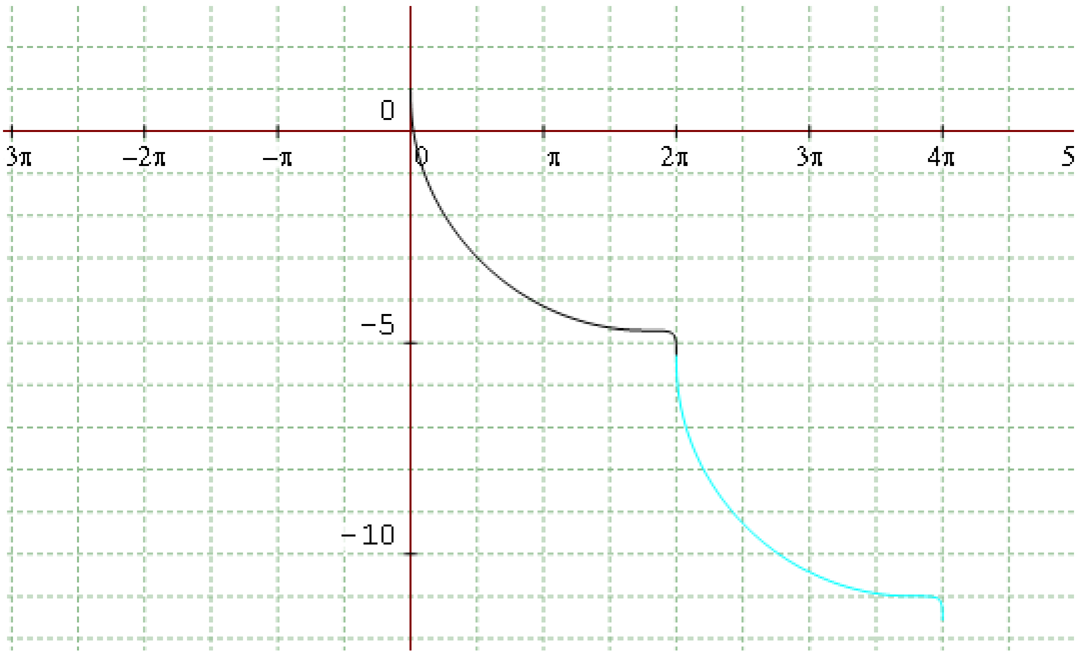
- Translation de vecteur $\vec{u}(a, b)$: $M'(x + a, y + b)$.
- Réflexion d'axe $(O, \vec{\imath})$: $M'(x, -y)$.

- Réflexion d'axe $(O, \vec{\imath})$: $M'\ (-x, y)$.
- Symétrie centrale de centre $\Omega(a, b)$: $M'(2a - x, 2b - y)$.
- Réflexion d'axe la droite (D) d'équation $y = x$: $M'\ (y, x)$.
- Réflexion d'axe la droite (D') d'équation $y = x$: $M'\ (-y-, x)$.
- Rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de O : $M'(-y, x)$.
- Rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ autour de O : $M'\ (y, -x)$.

Exemple

Soit $\gamma(t) = (t - \sin t\,, -t + \cos t), t \in]0, 4\pi[$.

On a $\gamma(t + 2\pi) = \big((t - \sin t) + 2\pi, (-t + \cos t) - 2\pi\big)$, alors $\gamma(t + 2\pi)$ est l'image de $\gamma(t)$ par la translation de vecteur $(2\pi, -2\pi)$. Si $t \in]0, 2\pi[$ alors $t + 2\pi \in]2\pi, 4\pi[$. Alors, On étudie la courbe et on le trace sur un l'intervalle $]0, 2\pi[$ et on obtient la courbe complète par la translation de vecteur $(2\pi, -2\pi)$.



2) Étude des branches infinies.

Dans ce paragraphe, $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$ est une courbe paramétrée donnée par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ *et* t_0 désigne une extrémité de l'intervalle I (on peut avoir $t_0 = +\infty$ *ou* $-\infty$).

- Si $\lim_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t \to t_0} y(t) = c \in \mathbb{R}$, alors la courbe possède une asymptote horizontale d'équation $y = c$ (quand le paramètre tend vers t_0).

- Si $\lim_{t\to t_0} x(t) = c \in \mathbb{R}$ et $\lim_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$, alors la courbe possède une asymptote verticale d'équation $x = c$ (quand le paramètre tend vers t_0).
- S'i existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ tels que $\lim_{t\to t_0} y(t) - ax(t) = b$ alors la courbe possède une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ (quand le paramètre tend vers t_0).
- Si $\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$, alors la courbe possède une branche parabolique dans la direction $\vec{\imath}$.
- Si $\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$, alors la courbe possède une branche parabolique dans la direction $\vec{\jmath}$.
- Si $\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}^*$ et $\lim_{t\to t_0} y(t) - ax(t) = \pm\infty$, alors la courbe possède une branche parabolique dans la direction de la droite d' équation $y = ax$.

Schéma d'étude de branches infinies

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty \\ \lim\limits_{t\to t_0} y(t) = c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Asymptote horizontale d’équation $y = c$

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} x(t) = c \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty \end{cases}$$

Asymptote verticale d’équation $x = c$

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty \\ \lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty \end{cases}$$

$$\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$$

Branche parabolique dans la direction $\vec{\imath}$

$$\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}^*$$

$$\lim_{t\to t_0} y(t) - ax(t) = \pm\infty$$

Branche parabolique dans la direction de la droite d’équation $y = ax$.

$$\lim_{t\to t_0} y(t) - ax(t) = b \in \mathbb{R}$$

Asymptote oblique d’équation

$y = ax + b$

$$\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$$

Branche parabolique dans la direction $\vec{\jmath}$

3) Tableau de variations conjointes et constriction de la courbe

On étude les variations de fonctions $x(t)$ et $y(t)$ et on résume cette étude dans le tableau suivant (dit tableau de variations conjointes**).**

t	
$x'(t)$	
x(t)	
$y(t)$	
$y'(t)$	

A l'aide de ce tableau on peut construire le support de la courbe en respectant les règles suivantes.

- On commence par la construction de droites asymptotiques.
- On construit le point important : par exemple les points d'intersection avec les axes du repère et avec les droites asymptotiques…..
- On construit la courbe en tenant compte les remarques suivantes

1)

t		Déplacement vers la droite et vers le haut.
x(t)	↗	
y(t)	↗	

2)

t		Déplacement vers la droite et vers le bas.
x(t)	↗	
y(t)	↘	

3)

t		Déplacement vers la gauche et vers le haut.
x(t)	↘	
y(t)	↗	

4)

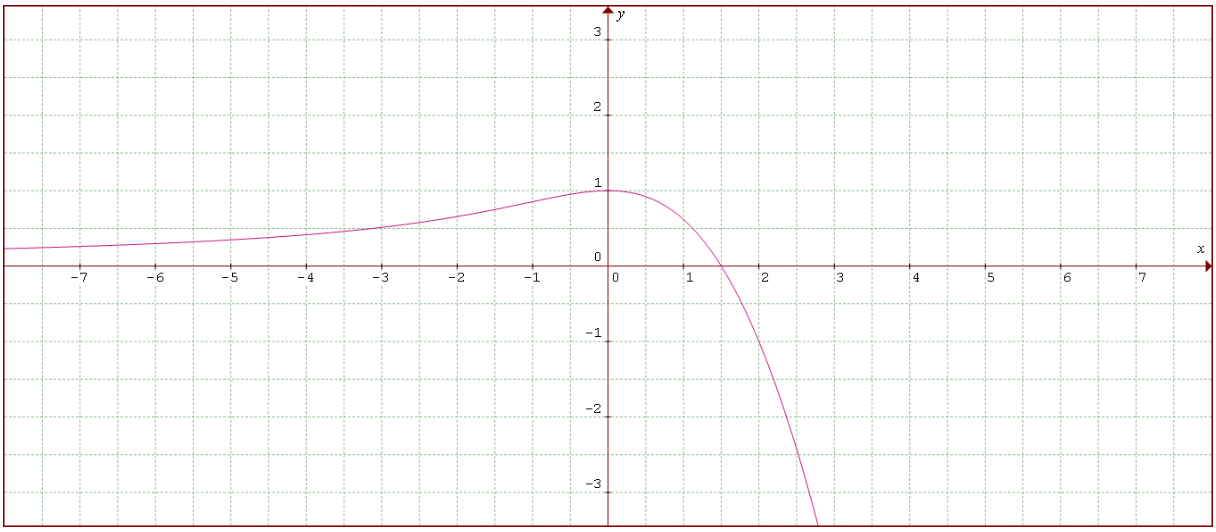
t		Déplacement vers la gauche et vers le bas.
x(t)	↘	
y(t)	↘	

Exemple

$\gamma(t) = \left(t - \frac{1}{t}, 2\,t - t^2\right), t \in]0, +\infty[.$

On a $\gamma'(t) = \left(1 + \frac{1}{t^2}, 2 - 2t\right), t \in]0, +\infty[.$

t	0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$		$+$	
x(t)		↗	**0**	↗	
$y(t)$		↗	**1**	↘	
$y'(t)$			0		



3.4.2 Courbes en coordonnées polaires

On s'intéresse à l'étude des courbes dont leur équation en cordonnée polaire est de la forme $\rho = f(\theta), \theta \in D$.

Réduction du domaine d'étude

- Si f est périodique de période T, il suffit d'étudier la courbe sur un intervalle de longueur T, par exemple $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.
- Si D est un intervalle centré en a et $f(2a - \theta) = f(\theta), \forall\theta \in D$, alors la courbe est symétrique par rapport à la droite polaire $\theta = a$. En particulier, si D est un intervalle centré en 0 et $f(-\theta) = f(\theta), \forall\theta \in D$, alors la courbe est symétrique par rapport à la droite polaire $\theta = 0$ (l'axe Ox).

- Si D est un intervalle centré en a et $f(2a-\theta) = -f(\theta), \forall\theta \in D,$ alors la courbe est symétrique par rapport à la droite polaire $\theta = a + \frac{\pi}{2}$. En particulier, si D est un intervalle centré en 0 et $f(-\theta) = -f(\theta), \forall\theta \in D$, alors la courbe est symétrique par rapport à la droite polaire $\theta = \frac{\pi}{2}$ (l'axe Oy).

Plan d'étude

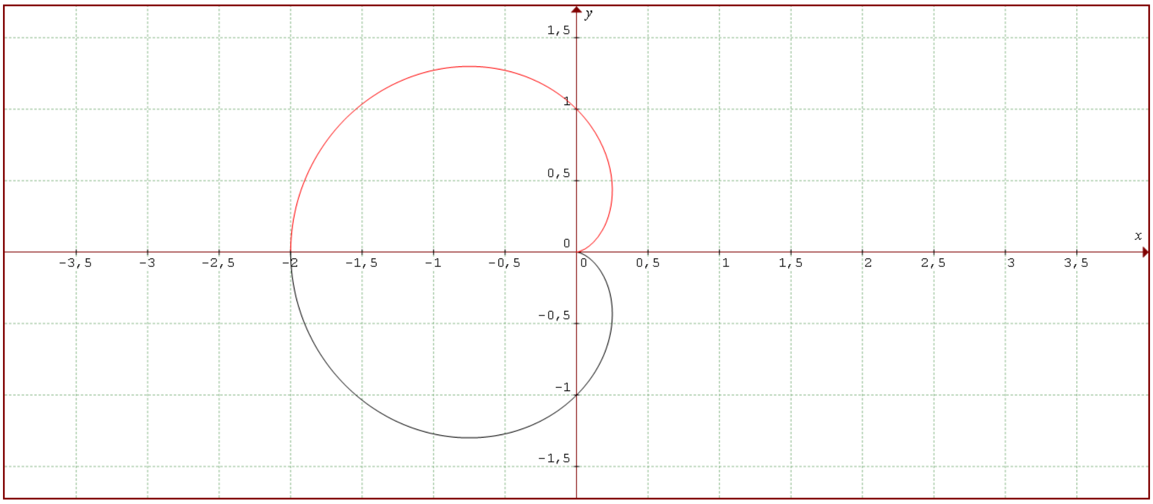
1) ensemble de définition
2) réduction de l'ensemble d'étude (période, symétries).
3) Tableau de variations de f.
5) Tracé de la courbe.

Exemple

Soit la courbe polaire d'équation $\rho(\theta) = 1 - \cos\theta$.

La fonction ρ est périodique de période 2π. I suffit de faire l'étude sur l'intervalle $I = [-\pi, \pi]$. I est un intervalle centré en 0 et $f(-\theta) = f(\theta), \forall\theta \in D$, alors la courbe est symétrique par rapport à la droite polaire $\theta = 0$ (l'axe Ox). On fait l'étude sur $= [-\pi, 0]$ et on complète par la symétrie par rapport à (Ox).

θ	$-\pi$		**0**
$\rho'(\theta)$		$-$	
$\rho(\theta)$	**2**	$\nearrow$	**0**



3.6 Exemples de courbes paramétrées cartésiennes

- Soit $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction. La courbe paramétrée définie par $\gamma(t) = (t, f(t))$ a pour support le graphe de la fonction f.
- La courbe plane paramétrée définie par $\gamma(t) = (\alpha t + x_0, \beta t + y_0)$ a pour support la droite passant par le point (x_0, y_0) et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.
- La courbe gauche paramétrée définie par

$$\gamma(t) = (\alpha t + x_0, \beta t + y_0, \gamma t + z_0)$$

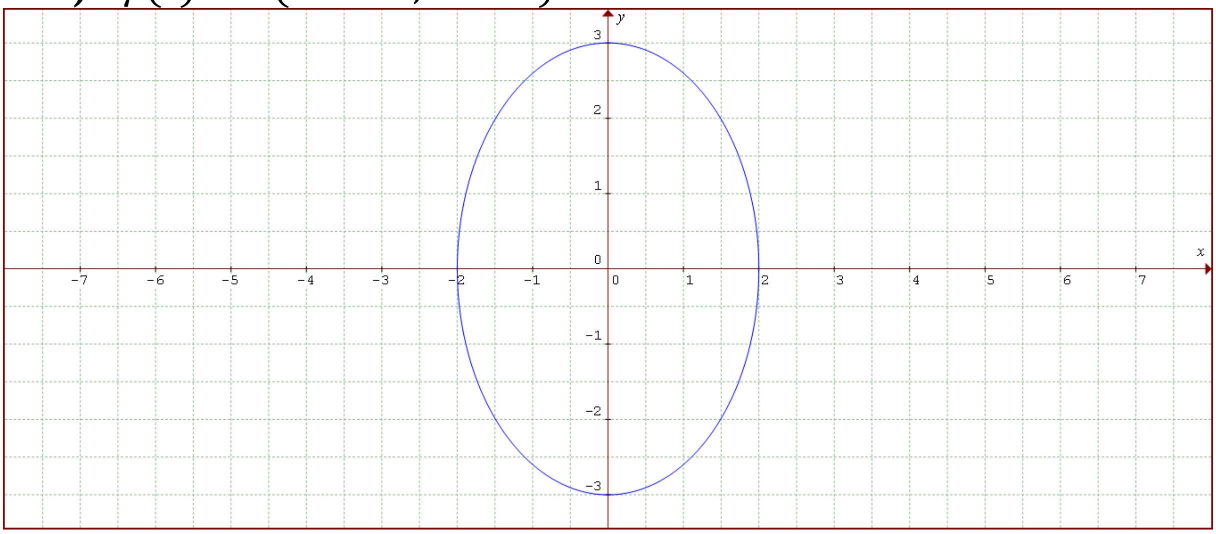
a pour support la droite passant par le point (x_0, y_0, z_0) et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.
- La courbe paramétrée définie par

$$\gamma(t) = (r\cos t + x_0, r\sin t + y_0),\ t \in [0,2\pi], r > 0$$

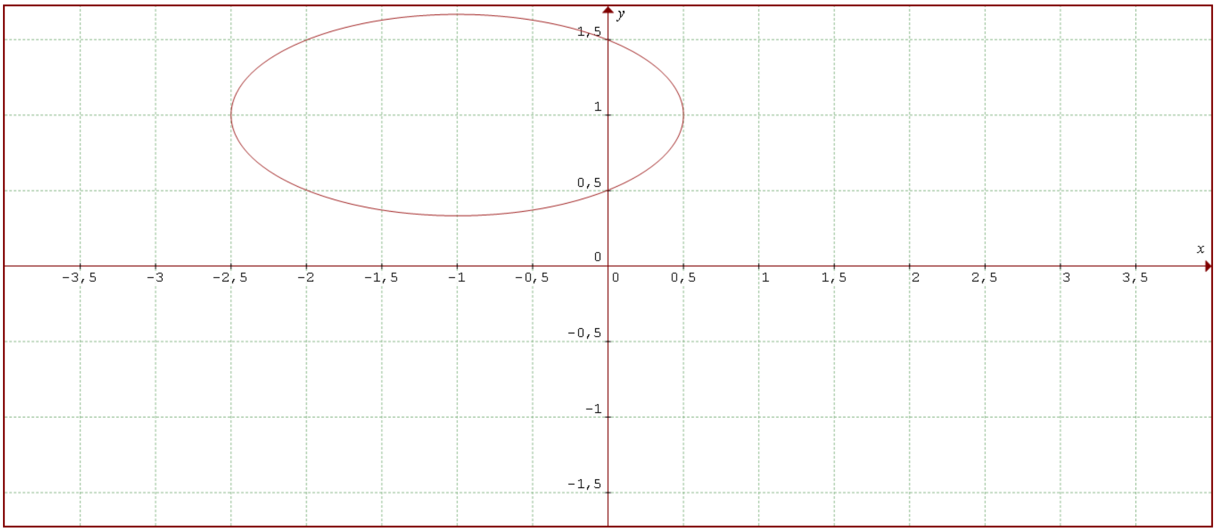
a pour support le cercle du centre (x_0, y_0) et de rayon r.
- Soient $0 < a, b \in \mathbb{R}$. Le support de la courbe paramétrée définie par $\gamma(t) = (a\cos t + x_0, b\sin t + y_0), t \in [0,2\pi]$ est une ellipse.

Exemple.

1) $\gamma(t) = (2\cos t, 3\sin t)$



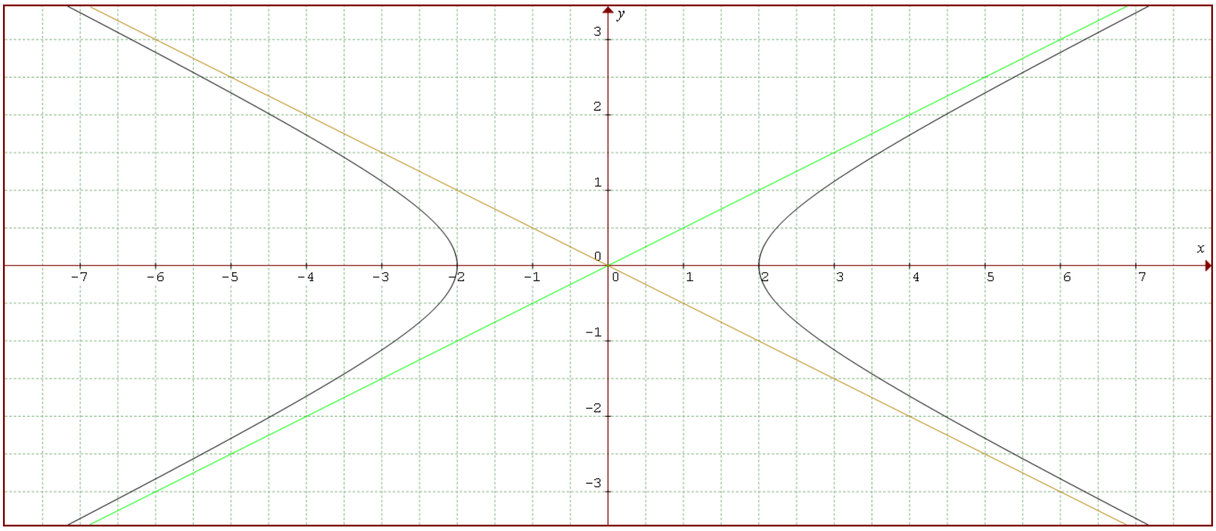
2) $\gamma(t) = \left(\frac{3}{2}\cos t - 1, \frac{2}{3}\sin t + 1\right), t \in [0,2\pi]$



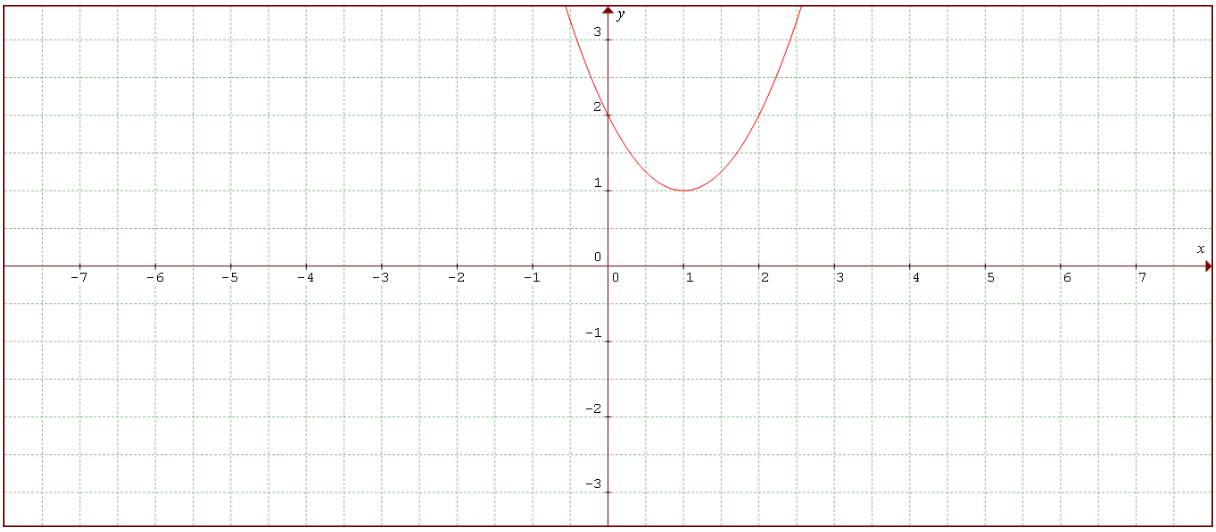
- Soient $0 < a, b \in \mathbb{R}$. Le support de la courbe paramétrée définie par $\gamma(t) = (a\,ch\,(t) + x_0, bsh(t) + y_0), t \in \mathbb{R}$ est une partie d'un hyperbole (la partie correspondante à $x \geq 0$). La partie de la même hyperbole correspondante à $x \leq 0$ est paramétrée par la courbe $\tilde{\gamma}(t) = (-a\,ch\,(t) + x_0, sh(t) + y_0)$.

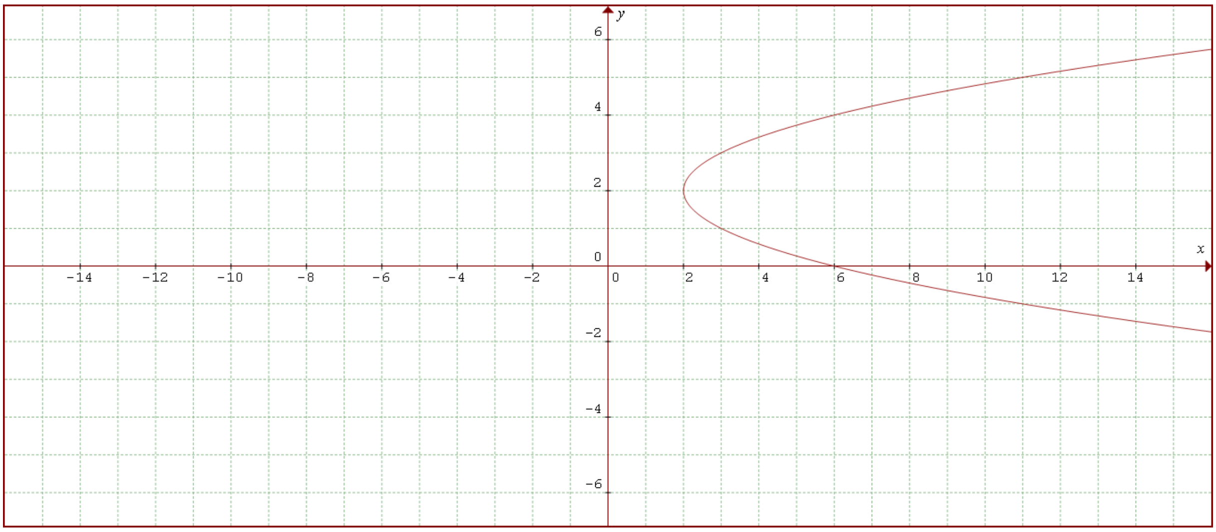
On peut montrer que les droites d' équations $y = \frac{b}{a}x\ et\ y = -\frac{b}{a}x$ sont des asymptotes de la courbe γ.

Pour $a = 2, b = 1$, on a le graphe suivant



- Soient $0 < p \in \mathbb{R}$. Les supports de courbes paramétrées définies par $\gamma(t) = (x = 2pt + x_0, y = t^2 + y_0), t \in \mathbb{R}$ et $\gamma(t) = (x = t^2 + x_0, y = 2pt + y_0), t \in \mathbb{R}$ sont des paraboles.

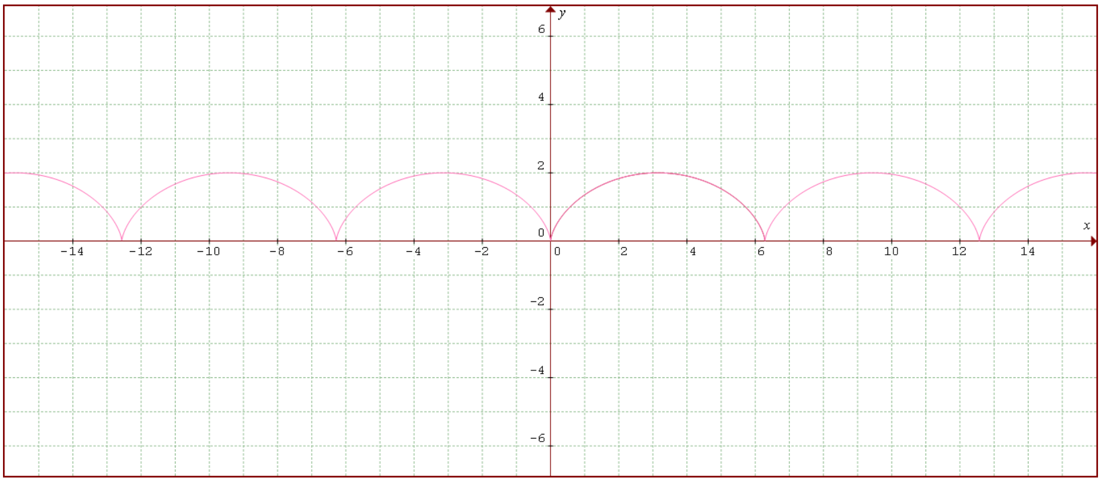




- La courbe paramétrée définie par

$$\gamma(t) \;=\; (r(t - cos\ t), r(1 - cos\ t),$$

a pour support cycloïde qui est la courbe que parcourt un point choisi de la roue d'un vélo dont le rayon de la rue est r, lorsque le vélo avance.



3.7 Exemples de courbes polaires

On passe de cordonnées cartésiennes aux cordonnée polaires en utilisant les relations $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$.

1) Droites

- L'équation polaire d'une droit passant par l'origine est de la forme $\theta = \theta_0$.
- L'équation polaire d'une droit parallèle à (Oy) est de la forme $r = \frac{a}{\cos\theta}$.
- L'équation polaire d'une droit parallèle à (Ox) est de la forme $r = \frac{a}{\sin\theta}$.
- L'équation polaire de a droite d'équation cartésienne $ax + by = c$ est $r = \frac{1}{\mathrm{a}\cos\theta + b\sin\theta}$, $\theta \neq -\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.

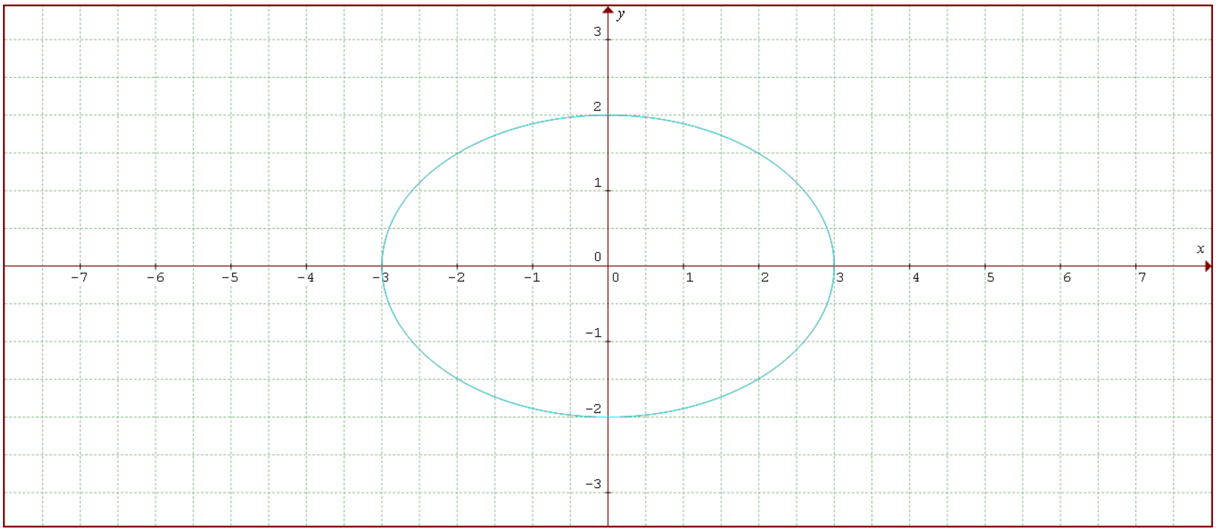
2) Cercles

- L'équation polaire du cercle de centre O est de rayon R est $r = R$.

3) Ellipses

L'équation polaire de l'ellipse d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est $r = \pm\frac{ab}{\sqrt{\mathrm{b}^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}$.

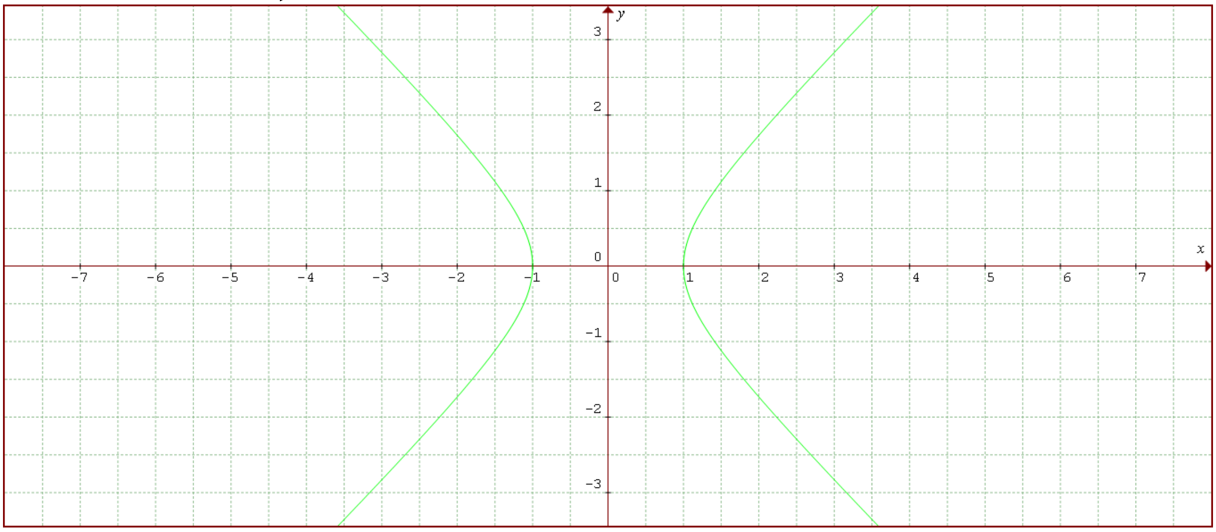
Pour $a = 2$ et $b = 2$ on a le graphe



4) Hyperbole

L'équation polaire l'hyperbole d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est $r = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta - b^2 \sin^2 \theta}}$.

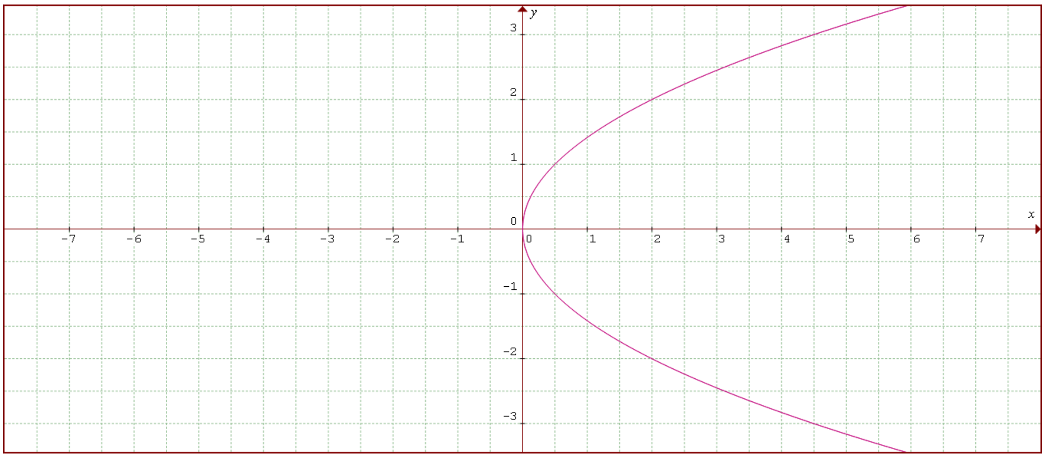
Pour $a = b = 1$, on a la courbe



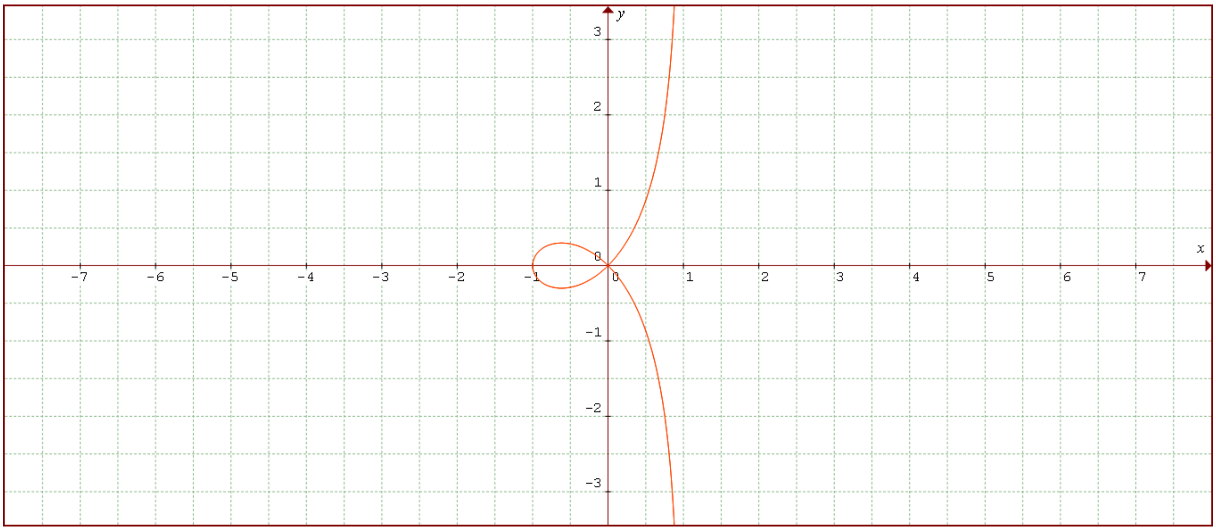
5) Paraboles

L'équation polaire de la parabole d'équation cartésienne est $y^2 = 2ax$ est $r = 2a\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$.

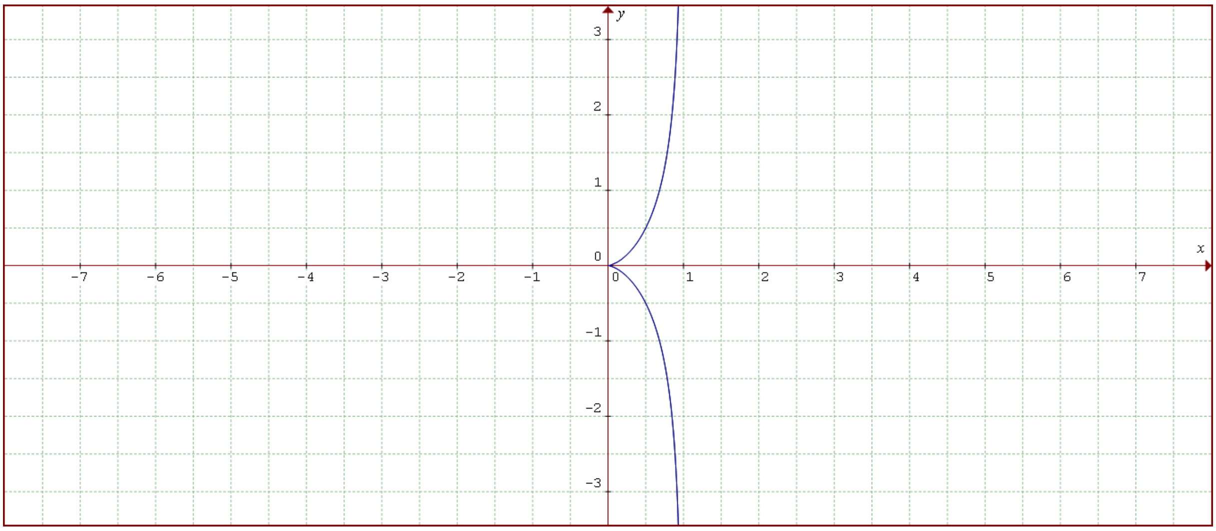
Pour $a = 1$, on a la courbe



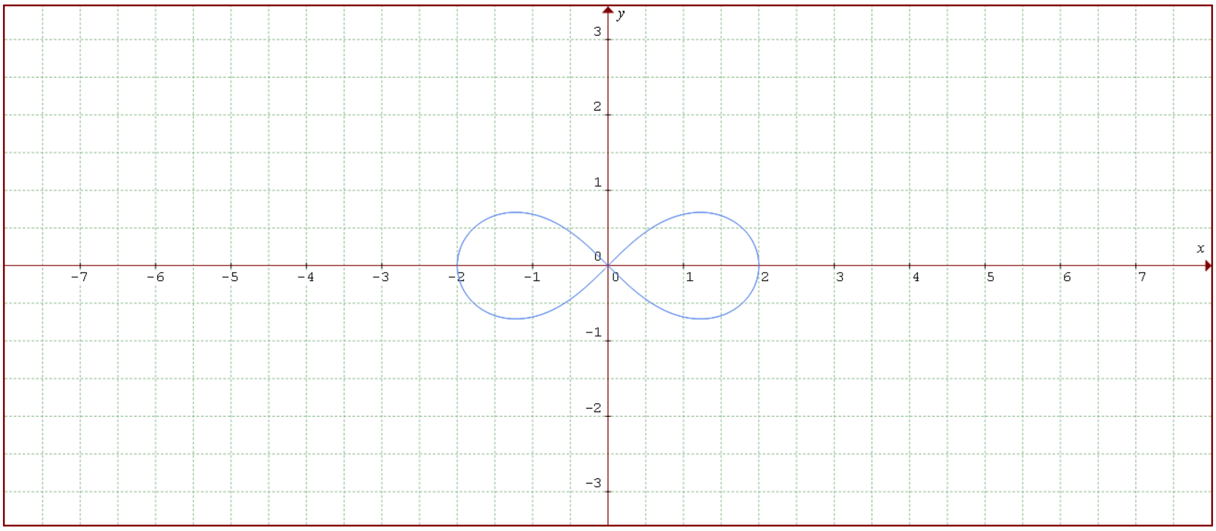
6) Strophoïde droite $\boldsymbol{r = -a\dfrac{cos(2\theta)}{cos(\theta)}}$



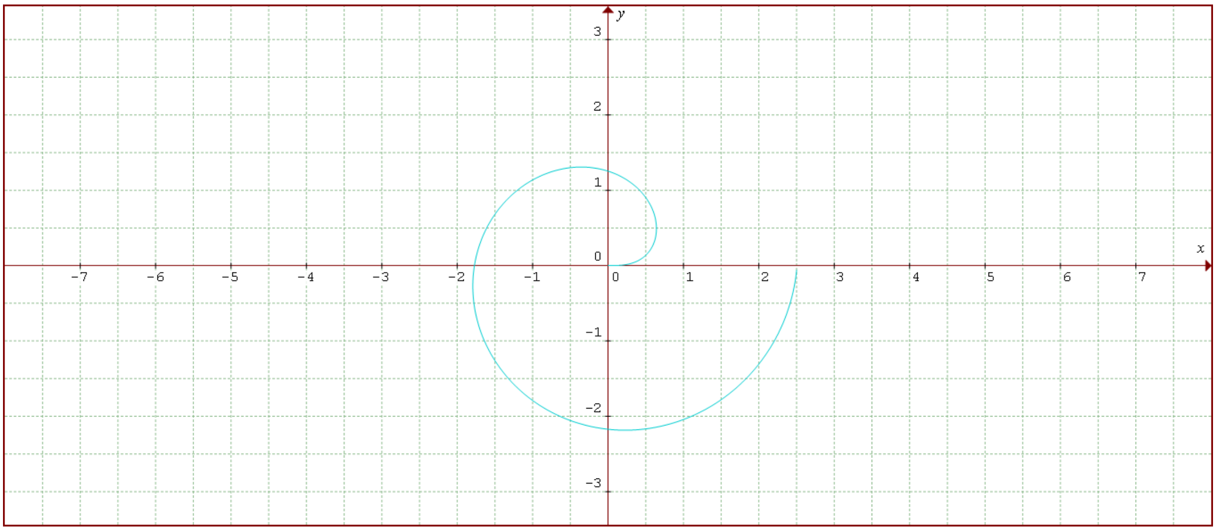
7) Cissoïde droite $\boldsymbol{r = a\dfrac{\sin^2\theta}{cos(\theta)}}$



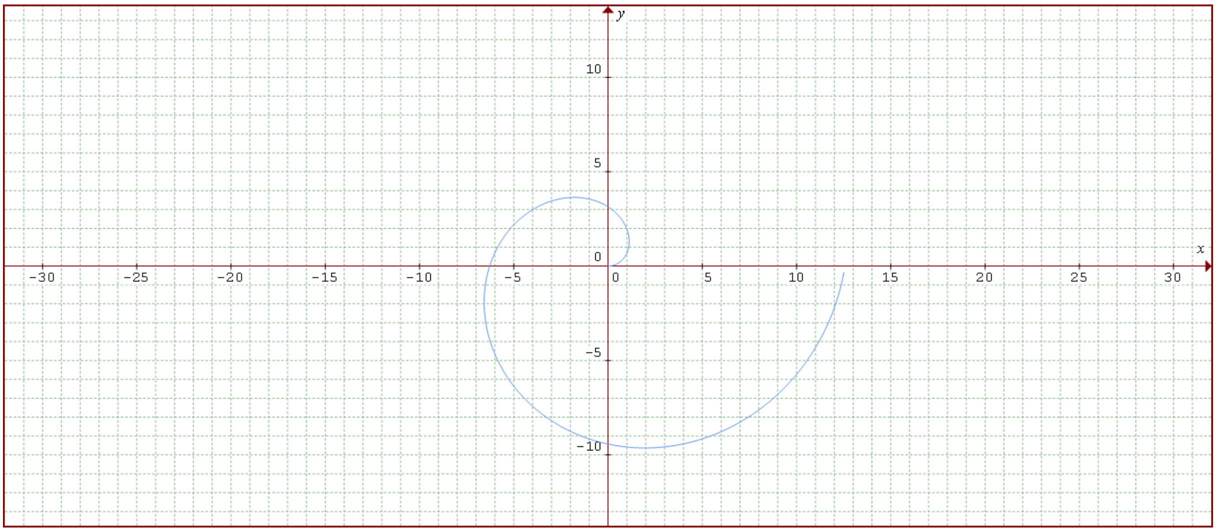
8) Lemniscate de Gerono $r = \mp\sqrt{cos(2\theta)}$



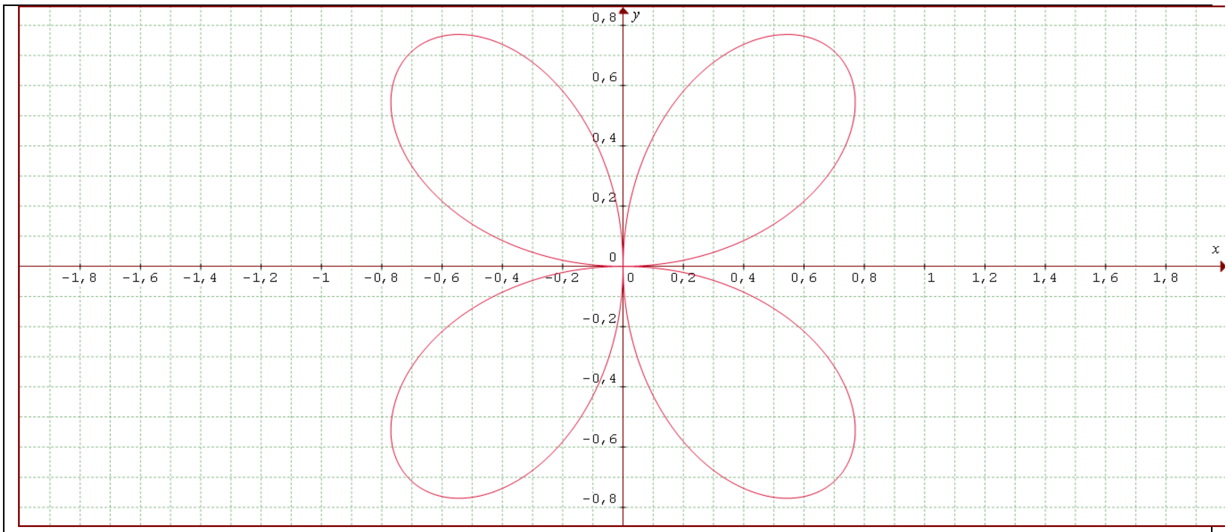
9) Spirale de Fermat $r = \mp a\sqrt{\theta}$



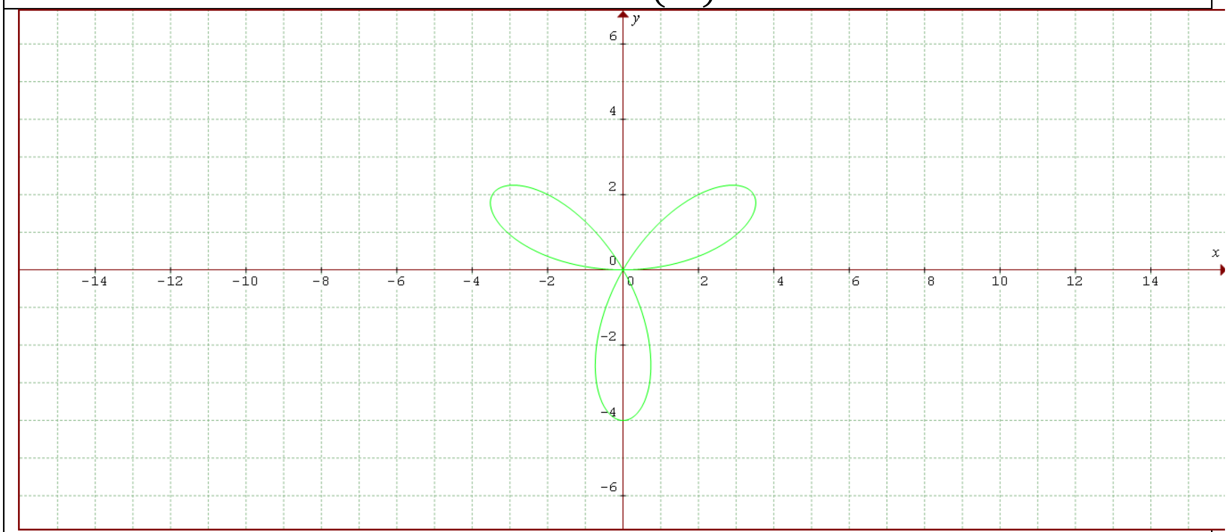
10) Spirale d'Archiméde $r = a\theta$



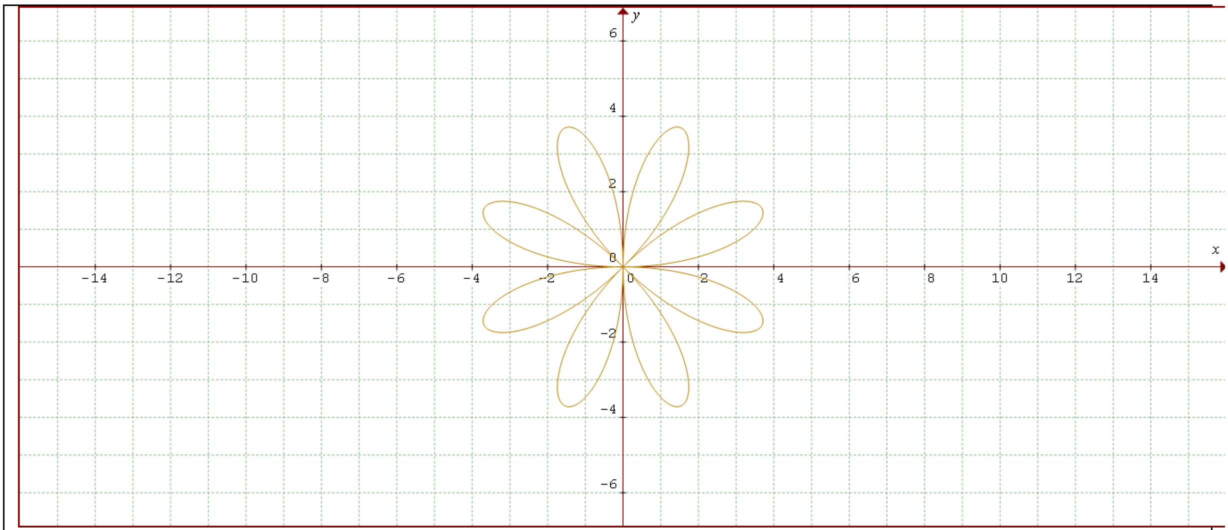
11) Les rosaces



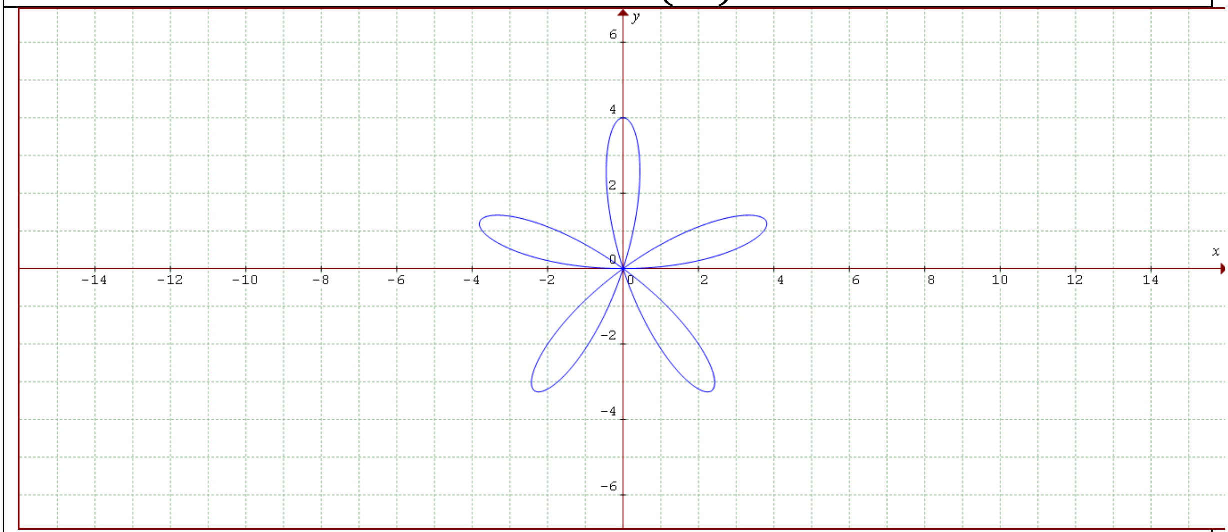
$$r = a\,sin(2t)$$



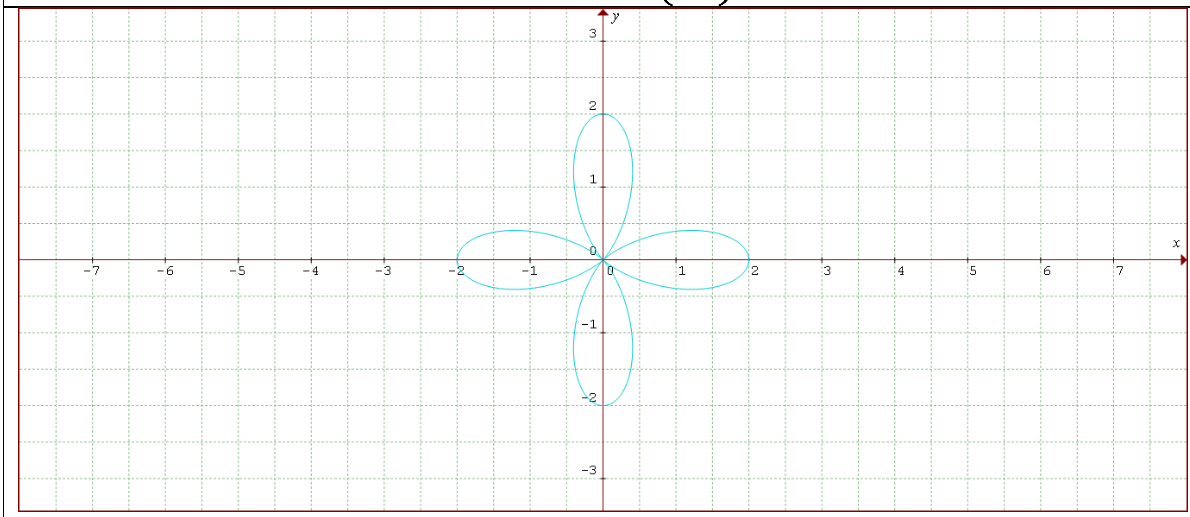
$$r = a\,sin(3t)$$



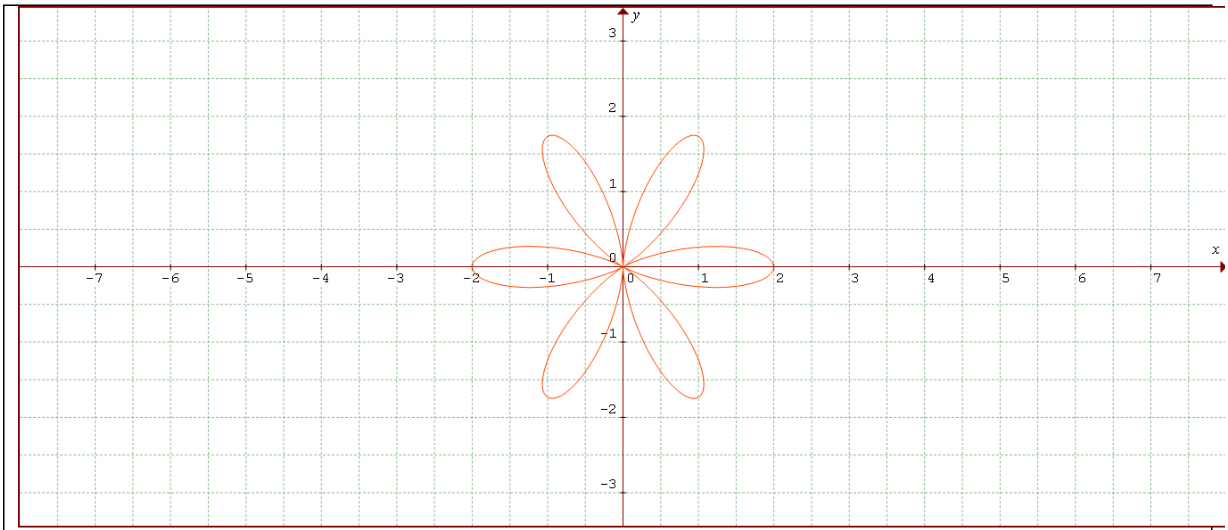
$$r = a \sin(4t)$$



$$r = a \sin(4t)$$



$$r = 1 + cos(4t)$$



$r = 1 + cos(6t)$

3.8 Exemples de surfaces

Dans ce paragraphe U désignent un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Définition 3.18.

- On appelle surface paramétrée de classe C^k toute application $\gamma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^k.

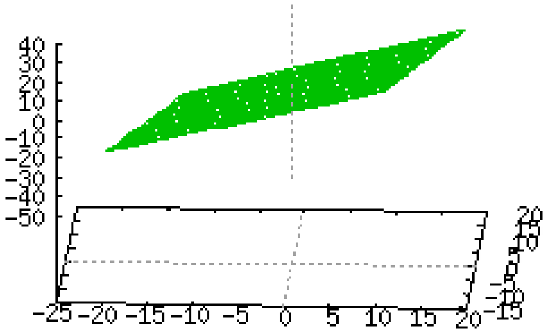
- Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ $\gamma(\mathrm{U}) = \{\gamma(\mathrm{t}, \mathrm{s}), (\mathrm{t}, \mathrm{s}) \in \mathrm{U}\}$ est appelé support géométrique de la surface γ.

1) Plan

L'application

$$\gamma(t, s) = (at + \alpha s + x_0, bt + \beta s + y_0, ct + \gamma s + z_0),$$

$(t, s) \in \mathbb{R}$ est une surface de classe C^∞ dont le support géométrique est le plan dirigé par les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et passant par le point (x_0, y_0, z_0).

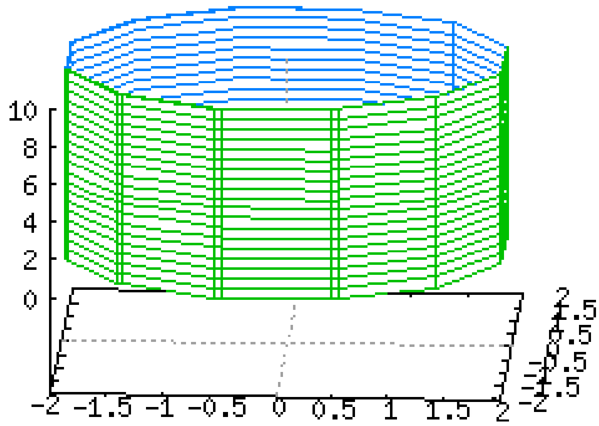


2) Cylindre

3) L'application

$$\gamma(t,s) = (r\cos(t), r\sin(t), s),\ (t,s) \in [0,2\pi] \times [0,h]$$

est une surface de classe C^∞ dont le support géométrique est le cylindre de base D et de hauteur h, avec D est le disque contenant dans le plan (xOy) de centre (0,0, 0) et de rayon r.

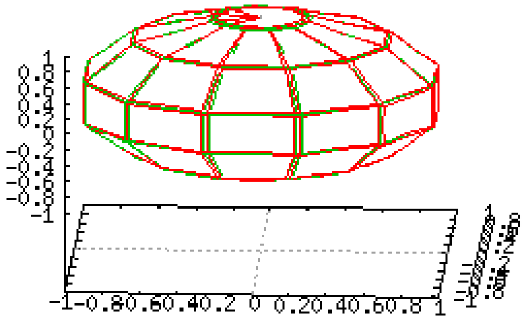


3) Sphère

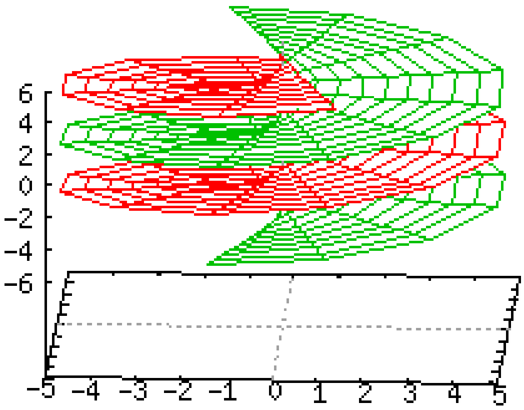
L'application

$$\gamma(t,s) = (R\cos(s)\cos(t) + x_0, R\cos(s)\sin(t) + y_0, R\sin(s) + z_0),$$

$(t,s) \in \mathbb{R}^2$ est une surface de classe C^∞ dont le support géométrique est la sphère de centre (x_0, y_0, z_0) et de rayon R.



4) Hélicoïde : $\begin{cases} x = t\cos(s) \\ y = t\sin(s) \\ z = s \end{cases}$



5) Surface d'Enneper $\begin{cases} x = t - \dfrac{t^3}{3} + ts^2 \\ y = s - \dfrac{s^3}{3} + st^2 \\ z = t^2 - s^2 \end{cases}$