جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة

قسم: الرياضيات والإعلام الآلي　　　　　　**السنة الجامعية : 2023/ 2024**

المستوى : 1ج م رياضيات و إعلام آلي　　　**امتحان في مادة التحليل 2**　　　**المدة: ساعة و نصف.**

التمرين الأول:(09 نقاط)

1) (1.5+1.5 نقطة) أوجد نشرا محدودا من المرتبة 3 بجوار0 للتوابع:

$$f(x) = e^x \sin x \quad \text{و} \quad h(x) = \ln(1+\tan x).$$

2) (2.5 نقاط) أحسب، باستعمال النشور السابقة، النهاية:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+\tan x) - e^x \sin x}{x^3} + \frac{3}{2x}\right).$$

3) ليكن التابع g المعرف على $\mathbb{R}^*$ بـ $g(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}} \sin\frac{1}{x}$.

أ) (2 نقطة)استنتج نشرا محدودا بجوار ∞ للتابع g (لاحظ أن $g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2}h(t)$.)

ب) (1+0.5 نقطة)أحسب النهاية $\lim_{x\to\infty}(g(x) - x - 1)$، ماذا تستنتج؟

يعطى: $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$; $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$;

$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$; $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$.

التمرين الثاني:(06 نقاط)

1) (4 نقاط) أحسب التكامل

$$I = \int \frac{5x^2 - 2x}{(x-1)^2(2x+1)}dx.$$

2) (2 نقطة) باستعمال التكامل بالتجزئة, أحسب التكامل:

$$J = \int \sqrt{x}\ln x\, dx.$$

التمرين الثالث:(05 نقاط)

لتكن المعادلة التفاضلية التالية:　　$y' - \frac{3}{x}y = x - 2$ ……………… (E).

1) (2 نقطة) بين أن الدالة $\varphi: x \to x^3 - x^2 + x$ هي حل خاص للمعادلة (E).

2) (2+1 نقطة) حل المعادلة: $y' - \frac{3}{x}y = 0$، ثم استنتج الحل العام للمعادلة (E).

بالتوفيق.

جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة

قسم: الرياضيات والإعلام الآلي **السنة الجامعية : 2023/ 2024**

المستوى : 1ج م رياضيات و إعلام آلي

الإجابة النموذجية مع سلم التنقيط لامتحان مادة التحليل 2

التمرين الأول:(..نقاط)

1) (..نقطة) أوجد نشرا محدودا من المرتبة 3 بجوار0 للتوابع: $h(x) = e^x \sin x$; $f(x) = \ln(1+\tan x)$.

لدينا

$$f(x) = \ln(1+\tan x) = \left(x + \frac{1}{3}x^3\right) - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{3}x^3\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{3}x^3\right)^3$$ 0,5

$$f(x) = \ln(1+\tan x) = \left(x + \frac{1}{3}x^3\right) - \frac{1}{2}(x)^2 + \frac{1}{3}(x)^3$$ 0,5

$$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).$$ 0,5

$$h(x) = e^x \sin x = \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3\right)\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$$ 0,5

$$= \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)x - \frac{1}{6}x^3$$ 0,5

$$h(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$ 0,5

2)-(..نقاط) أحسب، باستعمال النشور السابقة، النهاية: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+\tan x) - e^x \sin x}{x^3} + \frac{3}{2x}\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+\tan x) - e^x \sin x}{x^3} + \frac{3}{2x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+\tan x) - e^x \sin x + \frac{3}{2}x^2}{x^3}\right)$$ 0,5

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \left(x + x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) + \frac{3}{2}x^2}{x^3}\right)$$ 0,5

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3}\right)$$ 0,5

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3} + o(1)\right)$$ 0,5

$$= \frac{1}{3}.$$ 0,5

3) أ) بوضع $x=\frac{1}{t}$ فإن: $0{,}5$

$$g\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t^2}e^t\sin t=\frac{1}{t^2}h(t).$$

بما أن $h(t)=t+t^2+\frac{1}{3}t^3+o(t^3)$ فإن:

$$g\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t^2}\left(t+t^2+\frac{1}{3}t^3+o(t^3)\right)=\frac{1}{t}+1+\frac{1}{3}t+o(t)$$ $0{,}5+0{,}5$

و منه

$$g(x)=x+1+\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$ $0{,}5$

ب)- (..نقطة)أحسب النهاية $\lim_{x\to\infty}(g(x)-x-1)$، ماذا تستنتج؟

لدينا

$$\lim_{x\to\infty}(g(x)-x-1)=\lim_{x\to\infty}\left(x+1+\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-x-1\right)$$ $0{,}5$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0.$$ $0{,}5$

الاستنتاج: التمثيل البياني للدالة g يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=x+1$. $0{,}5$

<u>التمرين الثاني</u>:(..نقاط)

1) (..نقطة) أحسب التكامل $I=\int\frac{5x^2-2x}{(x-1)^2(2x+1)}dx$.

نضع

$$\frac{5x^2-2x}{(x-1)^2(2x+1)}=\frac{a}{(x-1)}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{(2x+1)}$$ $0{,}5$

و منه

$$\frac{5x^2-2x}{(x-1)^2(2x+1)}=\frac{(2a+c)x^2+(2b-a-2c)x+(b-a+c)}{(x-1)^2(2x+1)}$$ $0{,}5$

بالمطابقة بين الطرفين نحصل على

$$.\begin{cases}2a+c=5\\2b-a-2c=-2\\b-a+c=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{matrix}a=2\\b=1\\c=1\end{matrix}$$ 1

و منه

$$I=\int\frac{5x^2-2x}{(x-1)^2(2x+1)}dx=\int\left(\frac{2}{(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(2x+1)}\right)dx$$ $0{,}5$

$$= 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln|2x+1| + \mathrm{C}.$$ 0,5 + 0,5 + 0,5

2) (..نقطة) باستعمال التكامل بالتجزئة, أحسب التكامل: $J = \int \sqrt{x}\ \ln x\ dx$

$$J = \int \sqrt{x}\ \ln x\ dx = \int x^{\frac{1}{2}} \ln x\ dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{2}{3}\int x^{\frac{3}{2}}\ \frac{1}{x} dx$$ 0,5

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}\ dx$$ 0,5

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{2}{3}\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$ 0,5

$$J = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right).$$ 0,5

<u>التمرين الثالث</u>:(.. نقاط)

لتكن المعادلة التفاضلية التالية: $\qquad y' - \frac{3}{x}y = x - 2$ .... (E).

1) (..نقطة) بين أن الدالة $\varphi: x \to x^3 - x^2 + x$ هي حل خاص للمعادلة (E).

لدينا

$$\varphi(x) = x^3 - x^2 + x \implies \varphi'(x) = 3x^2 - 2x + 1$$ 0,5

و منه

$$\varphi'(x) - \frac{3}{x}\varphi(x) = 3x^2 - 2x + 1 - \frac{3}{x}(x^3 - x^2 + x)$$ 0,5

$$= 3x^2 - 2x + 1 - 3x^2 + 3x - 3$$ 0,5

و منه

$$\varphi'(x) - \frac{3}{x}\varphi(x) = x - 2.$$ 0,5

2) (..نقطة) حل المعادلة: $y' - \frac{3}{x}y = 0$، ثم استنتج الحل العام للمعادلة (E).

لدينا

$$y' - \frac{3}{x}y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{x}$$ 0,5

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{dx} = \int \frac{3}{x}$$ 0,5

$$\Rightarrow \ln|y| = 3\ln|x| + \mathrm{C}$$ 0,5

$$\Rightarrow y = Kx^3 \ ; K \in \mathbb{R}$$

0,5

استنتاج الحل العام للمعادلة (E)

لدينا

$$y_G = y_H + y_p = Kx^3 + x^3 - x^2 + x$$

$$= (K+1)x^3 - x^2 + x \ ; K \in \mathbb{R}.$$

0,5

ومنه الحل العام للمعادلة (E) هو

$$y_G = Cx^3 - x^2 + x \ ; C \in \mathbb{R}.$$

0,5