Larbi Ben Mhidi University - Oum El Bouaghi-

Faculty of exact sciences, natural and life science

Department of Mathematics and Computer Science **Academic year: 2023/2024**

Level: L1 Computer S **Exam: Analysis 2** **Duration:1h30**

<u>Exercise 1</u> (4.5=1.5+1.5+1.5 pts)

For each question, there is only one correct answer out of the three suggested answers. State it with justification.

1) For every non-zero natural number n we put: $u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}$, the limit of the sequence (u_n) is:

a) $+\infty$ b) $\ln 2$ c) 0.

2) For every non-zero natural number k, we put: $J_k = \int \frac{e^x}{(x+1)^k} dx$. Using integration by parts, the relationship between J_k and J_{k+1} is:

a) $kJ_{k+1} = J_k - \frac{e^x}{(x+1)^k}$ b) $J_{k+1} = kJ_k - \frac{e^x}{(x+1)^k}$ c) $kJ_{k+1} = J_k - \frac{e^x}{(x+1)^{k+1}}$.

3) The solution of the differential equation $(x^2+1)y' - xy = 0$ that satisfies $y(0) = 1$ is:

a) $y = 2\sqrt{x^2+1}$ b) $y = \sqrt{2x^2+1}$ c) $y = \sqrt{x^2+1}$.

<u>Exercise 2</u> (7.5=3+1.75+2.75 pts)

1) Find a limited development of order 2 in a neighborhood of 0 for the functions

$$h(x) = \sqrt{1+2x}\cos x \quad \text{and} \quad f(x) = \ln(1+x+x^2).$$

2) Using the previous limited Developments, calculate the following limit:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+2x}\ \cos x - \ln(1+x+x^2) - 1}{x^2}\right).$$

3) Let g be a function defined on $\mathbb{R}^*$ by $g(x) = x^2 \ln\frac{1+x+x^2}{x^2}$ and let (C_g) the graph representing the function g.

a)Deduce a limited development in the neighborhood of ∞ for the function g (note that $g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2} f(t)$).

b) Calculate the limit $\lim_{x\to\infty}\left(g(x) - x - \frac{1}{2}\right)$. What do you conclude?

Given:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \ ; \ \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \ ; \ \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

<u>Exercise 3</u> (8=4+2+2 pts)

1) Calculate the integral $I = \int \frac{4x}{(x+1)^2(x-1)} dx$.

2) Solve the deferential equation $y' + \frac{1}{x}y = \frac{4}{(x+1)^2(x-1)}$.

3) Deduce the general solution of the following Bernoulli's differential equation:

$$y' - \frac{1}{4x}y = \frac{-1}{(x+1)^2(x-1)}y^5$$

Good luck.

جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة

قسم: الرياضيات والإعلام الآلي | **السنة الجامعية : 2023/ 2024**

المستوى: أولى إعلام آلي | **امتحان في مادة التحليل 2** | **المدة: ساعة و نصف**

التمرين الأول:(4.5 =1.5+1.5+1.5 نقطة)

لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التبرير.

1) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع: $u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}$، نهاية المتتالية (u_n) هي:

أ) $+\infty$ ب) $\ln 2$ ج) 0 .

2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k نضع: $J_k = \int \frac{e^x}{(x+1)^k} dx$، باستعمال التكامل بالتجزئة فإن العلاقة بين J_k و J_{k+1} هي:

أ) $kJ_{k+1} = J_k - \frac{e^x}{(x+1)^k}$ ب) $J_{k+1} = kJ_k - \frac{e^x}{(x+1)^k}$ ج) $kJ_{k+1} = J_k - \frac{e^x}{(x+1)^{k+1}}$.

3) حلّ المعادلة التفاضلية $(x^2+1)y' - xy = 0$ الذي يحقق $y(0) = 1$ هو:

أ) $y = 2\sqrt{x^2+1}$ ب) $y = \sqrt{2x^2+1}$ ج) $y = \sqrt{x^2+1}$.

التمرين الثاني:(7.5=3+1.75+2.75 نقطة)

1) أوجد نشرا محدودا من المرتبة 2 بجوار0 للتوابع: $h(x) = \sqrt{1+2x}\cos x$ و $f(x) = \ln(1+x+x^2)$.

2) أحسب، باستعمال النشور السابقة، النهاية:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+2x}\ \cos x - \ln(1+x+x^2) - 1}{x^2}\right).$$

3) لتكن الدالة g المعرف على $\mathbb{R}^*$ بـ $g(x) = x^2 \ln\frac{1+x+x^2}{x^2}$ نرمز بـ (C_g) للمنحنى البياني الممثل للدالة g.

أ) استنتج نشرا محدودا بجوار ∞ للتابع g (لاحظ أن $g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2} f(t)$).

ب) أحسب النهاية $\lim_{x\to\infty}\left(g(x) - x - \frac{1}{2}\right)$، ماذا تستنتج؟

يعطى:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\ \ ;\ \ \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\ \ ;\ \ \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2).$$

التمرين الثالث:(8= 2+2+4 نقاط)

1) أحسب التكامل: $I = \int \frac{4x}{(x+1)^2(x-1)} dx$.

2) حل المعادلة التفاضلية: $y' + \frac{1}{x}y = \frac{4}{(x+1)^2(x-1)}$.

3) استنتج الحل العام للمعادلة التفاضلية لبرنولي التالية: $y' - \frac{1}{4x}y = \frac{-1}{(x+1)^2(x-1)}y^5$.

بالتوفيق.

جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة

قسم: الرياضيات والإعلام الآلي — السنة الجامعية : 2023/ 2024

المستوى : 1ج م رياضيات و إعلام آلي — الإجابة النموذجية مع سلم التنقيط لامتحان مادة التحليل 2

التمرين الأول: (4.5 نقاط)

1) $\lim u_n = \ln 2$ لأن: (0.5)

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{i}{n}} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right).$$ (0.25)

حيث $a = 1$ و $b = 2$ و $\sum_{i=1}^{n} f(x) = \frac{1}{x}$ بما أن f قابل للمكاملة فإن (0.25)

$$\lim u_n = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2.$$ (0.5)

2) العلاقة بين J_k و J_{k+1} هي $kJ_{k+1} = J_k - \frac{e^x}{(x+1)^k}$ لأن: (0.5)

بوضع $v = \frac{1}{(x+1)^k}$ و $u' = e^x$ و منه $v' = \frac{-k}{(x+1)^{k+1}}$ و $u = e^x$ عندئذ فإن: (2x0.25)

$$J_k = uv - \int u\, v' \, dx = \frac{e^x}{(x+1)^k} + \int e^x \frac{k}{(x+1)^{k+1}} dx = \frac{e^x}{(x+1)^k} + kJ_{k+1}.$$ (2x0.25)

3) حلّ المعادلة التفاضلية $(x^2+1)y' - xy = 0$ الذي يحقق $y(0) = 1$ هو: $y = \sqrt{x^2+1}$ لأن: (0.5)

$$y = \sqrt{x^2+1} \implies y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$ (0.25)

و منه

$$(x^2+1)y' - xy = (x^2+1)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - x\sqrt{x^2+1} = \frac{(x^2+1)x - x(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} = 0.$$ (2x0.25)

$$y(0) = \sqrt{0+1} = 1.$$ (0.25)

التمرين الثاني: (7.5 نقاط)

1) أوجد نشرا محدودا من المرتبة 3 بجوار 0 للتوابع: $h(x) = \sqrt{1+2x}\cos x$ و $f(x) = \ln(1+x+x^2)$.

لدينا

$$f(x) = \ln(1+x+x^2) = (x+x^2) - \frac{1}{2}(x+x^2)^2$$ (0.5)

$$= (x+x^2) - \frac{1}{2}(x)^2$$ (0.5)

(0.5) $$= x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

(0.5) $$h(x) = \sqrt{1+2x}\cos x = \left(1 + \frac{1}{2}(2x) - \frac{1}{8}(2x)^2\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)$$

(0.5) $$= \left(1 + x - \frac{1}{2}x^2\right)(1) - (1)\frac{1}{2}x^2$$

(0.5) $$h(x) = 1 + x - x^2 + o(x^2)$$

2) حساب النهاية: $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{1+2x}\cos x - \ln(1+x+x^2) - 1}{x^2}\right)$.

(0.5) $$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{1+2x}\cos x - \ln(1+x+x^2) - 1}{x^2}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{1 + x - x^2 - \left(x + \frac{1}{2}x^2\right) - 1}{x^2}\right)$$

(0.5) $$= \lim_{x\to0}\left(\frac{-\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2}\right)$$

(0.5) $$= \lim_{x\to0}\left(-\frac{3}{2} + o(1)\right)$$

(0.25) $$= -\frac{3}{2}.$$

3) لتكن الدالة g المعرف على $\mathbb{R}^*$ بـ $g(x) = x^2\ln\frac{1+x+x^2}{x^2}$ نرمز بـ (C_g) للمنحنى البياني الممثل للدالة g.

أ) بوضع $x = \frac{1}{t}$ فإن: $g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2}\ln\frac{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}} = \frac{1}{t^2}f(t)$ (0.25)

و بما أن $f(t) = t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ فإن:

(0.5) $$g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2}\left(t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)\right)$$

(0.5) $$= \frac{1}{t} + \frac{1}{2} + o(1) = \frac{1}{t} + \frac{1}{2} + \varepsilon_1(t) \quad \text{with} \quad \lim_{t\to0}\varepsilon_1(t) = 0$$

و بوضع $t = \frac{1}{x}$ نحصل على:

(0.5) $$g(x) = x + \frac{1}{2} + o(1) = x + \frac{1}{2} + \varepsilon_2(x) \quad \text{with} \quad \lim_{x\to\infty}\varepsilon_2(x) = 0.$$

ب) حساب النهاية $\lim_{x\to\infty}\left(g(x) - x - \frac{1}{2}\right)$.

(2x0.25) $$\lim_{x\to\infty}\left(g(x) - x - \frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to\infty}\varepsilon(x) = 0.$$

الاستنتاج: التمثيل البياني للدالة g يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = x + \frac{1}{2}$ في جوار ∞. (0.5)

التمرين الثالث: (08 نقاط)

1) أحسب التكامل $I = \int \frac{4x}{(x+1)^2(x-1)} dx$.

نضع

$$\frac{4x}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{a}{(x+1)} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x-1)}$$ (0.25)

و منه

$$\frac{4x}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{(a+c)x^2 + (b+2c)x + (-a-b+c)}{(x+1)^2(x-1)}$$ (3x0.25)

بالمطابقة بين الطرفين نحصل على

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b+2c=4 \\ -a-b+c=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} a=-1 \\ b=2 \\ c=1 \end{matrix}.$$ (3x0.25)

و منه

$$I = \int \frac{4x}{(x+1)^2(x-1)} dx = \int \left(\frac{-1}{(x+1)} + \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-1)}\right) dx$$ (3x0.25)

$$= -\ln|x+1| - 2\frac{1}{x+1} + \ln|x-1| + C.$$ (3x0.5)

و منه

$$I = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{2}{x+1} + C.$$

2) حل المعادلة التفاضلية: $y' + \frac{1}{x} y = \frac{4}{(x+1)^2(x-1)}$

حساب المعامل التكاملي

$$v(x) = e^{\int a(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = x$$ (3x0.25)

نضرب طرفي المعادلة في المعامل السابق نحصل على

$$xy' + y = \frac{4x}{(x+1)^2(x-1)}$$ (0.25)

و منه

$$(xy)' = \frac{4x}{(x+1)^2(x-1)}$$ (0.25)

و منه

(0.25)
$$xy=\int\frac{4x}{(x+1)^2(x-1)}dx$$

أو

(0.25)
$$xy=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{2}{x+1}+\mathrm{C}$$

إذن

(0.25)
$$y=\frac{1}{x}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{2}{x+1}+\mathrm{C}\right).$$

3) استنتاج الحل العام لمعادلة برنولي.

(2x0.25) نضع $z=y^{-4}$ منه $z'=-4y^{-4}y'$ و منه

(0.25)
$$y'-\frac{1}{4x}y=\frac{-1}{(x+1)^2(x-1)}y^5\Rightarrow -4y^{-5}y'+\frac{1}{x}y^{-4}=\frac{4x}{(x+1)^2(x-1)}$$

و منه

(0.25)
$$z'+\frac{1}{x}z=\frac{4}{(x+1)^2(x-1)}$$

و منه

(0.25)
$$z=\frac{1}{x}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{2}{x+1}+\mathrm{C}\right)$$

أو

(0.25)
$$y^{-4}=\frac{1}{x}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{2}{x+1}+\mathrm{C}\right)$$

إذن

(2x0.25)
$$y=\pm\left(\frac{1}{x}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{2}{x+1}+\mathrm{C}\right)\right)^{\frac{1}{4}}.$$

ملاحظة: في حالة حل المعادلة بطريقة أخرى في السؤال الثاني توزع العلامة (02)على مراحل الحل.