جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة

قسم الرياضيات والإعلام الآلي **السنة الجامعية : 2023/2022**

المستوى : (1ج م+1رياضيات+1إعلام آلي) **المدة: ساعة و نصف الساعة**

الإمتحان الاستدراكي للسداسي الثاني–التحليل 2

التمرين الأول:(12 نقطة)

1) ليكن التابع f المعرف بـ $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+2\sin x}-e^x}{\ln(1+x+x^2)-x}, & x \neq 0 \\ -2, & x = 0 \end{cases}$، نرمز بـ (C_f) للمنحنى البياني الممثل له.

ا) (2+1.5 نقطة) أوجد نشرا محدودا من المرتبة 3 بجوار0 لكل من التوابع:

$$u(x) = \sqrt{1+2\sin x} - e^x \quad , \quad v(x) = \ln(1+x+x^2) - x \, .$$

ب) (1+1.5 نقطة) باستعمال النشور السابقة أحسب النهاية:$\lim_{x\to 0} f(x)$ ثم استنتج أنَ f يقبل الاشتقاق عند 0.

ج) (1+0.5 نقطة) استنتج نشرا محدودا بجوار 0 من الرتبة 1 للتابع f ثم عين معادلة ديكارتية للمستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة $A(0,-2)$.

2) ليكن التابع g المعرف بـ $g(x) = x^2\arctan(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$، نرمز بـ (C_g) للمنحنى البياني الممثل له.

ا) (1+1.5 نقطة) أوجد نشرا محدودا من المرتبة 3 بجوار 0 للتابع $h(t) = \arctan(t^2 + t)$ ثم استنتج نشرا محدودا بجوار ∞ للتابع g.

ب) (2 نقطة) بين أن المنحنى البياني (C_g) يقبل مستقيم مقارب (Δ) في جوار∞ يطلب تعيين معادلة له ثم حدد الوضع النسبي لكل من (C_g) و(Δ) في جوار ∞.

يعطى: $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ ، $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ ،

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$ ، $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ ،

$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$.

التمرين الثاني:(4 نقاط)

أحسب التكاملات التالية:

1) (2 نقطة) $I = \int \frac{x^2+1}{x^2(x+1)}dx$ (ضع $\frac{x^2+1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$).

2) (2 نقطة) $J = \int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx$ (ضع $t = \sqrt{x-1}$).

التمرين الثالث:(4 نقاط)

حل المعادلة التفاضلية التالية: $xy' - y = x^3e^x$.

بالتوفيق.

التمرين الأول:(12 نقطة)

1) أ)

(1)..... $\sqrt{1+2\sin x} = 1+\frac{1}{2}\left(2\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)\right)-\frac{1}{8}\left(2\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)\right)^2+\frac{1}{16}\left(2\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)\right)^3$

(0.5).................... $= 1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$

$$u(x) = \sqrt{1+2\sin x}-e^x$$

$$= 1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\right)$$

(0.5).. .... $= -x^2+\frac{1}{6}x^3$

$$v(x) = \ln(1+x+x^2)-x$$

(1). .... $= (x+x^2)-\frac{1}{2}(x+x^2)^2+\frac{1}{3}(x+x^2)^3-x$

(0.5)...................... $= \frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3$

ب)

(0.5) .... $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2+\frac{1}{6}x^3+x^3\varepsilon_1(x)}{\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3+x^3\varepsilon_2(x)}$

(0.5) .... $= \lim_{x\to 0}\frac{-1+\frac{1}{6}x+x\varepsilon_1(x)}{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}x+x\varepsilon_2(x)}$

(0.5) .... $\lim_{x\to 0} f(x) = -2$

(1) .... بما أنَ $a_0 = \lim_{x\to 0} f(x) = -2 = f(0)$ فإنَ f يقبل الاشتقاق عند 0

ملاحظة: الإجابة التالية مقبولة

لدينا من أجل $x \neq 0$ فإنَ $f(x) = \frac{-1+\frac{1}{6}x+x\varepsilon_1(x)}{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}x+x\varepsilon_2(x)}$ و منه

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1+\frac{1}{6}x+x\varepsilon_1(x)}{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}x+x\varepsilon_2(x)}+2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{7}{6}+\varepsilon_1(x)+2\varepsilon_2(x)}{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}x+x\varepsilon_2(x)} = -\frac{7}{3}$$

ج) لدينا $= f(x) = \frac{-1+\frac{1}{6}x+x\varepsilon_1(x)}{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}x+x\varepsilon_2(x)}$ بالقسمة الاقليدية لـ $-1+\frac{1}{6}x$ على $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}x$ نحصل على

(1) .... $f(x) = -2-\frac{7}{3}x+\mathrm{o}(x)$

(0.5) .... $y = -2-\frac{7}{3}x$ معادلة المماس (T)

2) ا)

(1) .... $h(t) = \arctan(t^2+t) = (t^2+t) - \frac{1}{3}(t^2+t)^3$

(0.5) .... $h(t) = t + t^2 - \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)$

(0.25)........................ $g\left(\frac{1}{t}\right) = \left(\frac{1}{t}\right)^2 \arctan(t+t^2))$

$$g\left(\frac{1}{t}\right) = \left(\frac{1}{t}\right)^2\left(t + t^2 - \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)\right)$$

(0.5)........................... $g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t} + 1 - \frac{1}{3}t + o(t)$

(0.25)......................... $g(x) = x + 1 - \frac{1}{3}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

ب)

(0.5) .... $\lim\limits_{x\to 0}\left(g(x) - (x+1)\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{3} + \varepsilon(x)\right) = 0$

(0.5) .... $y = x + 1$ معادلة المستقيم المقارب (Δ)

(0.5) ...... لدينا $g(x) - (x+1) = \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{3} + \varepsilon(x)\right)$ إذن في جوار ∞ فإن إشارة الفرق تتبع $\frac{1}{-3x}$

(0.5) .... في جوار $+\infty$ $\left(C_g\right)$ يقع تحت (Δ)، أما في جوار $-\infty$ $\left(C_g\right)$ يقع فوق (Δ).

التمرين الثاني:(4 نقاط)

(0.5) .... 1) نضع $\frac{x^2+1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$ و منه $\frac{x^2+1}{x^2(x+1)} = \frac{(b+c)x^2+(a+b)x+a}{x^2(x+1)}$

(0.5) .... و منه $\begin{cases} b+c=1 \\ a+b=0 \\ a=1 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} c=2 \\ b=-1 \\ a=1 \end{cases}$

$$I = \int \frac{x^2+1}{x^2(x+1)}dx = \int \frac{1}{x^2}dx - \int \frac{1}{x}dx + 2\int \frac{1}{x+1}dx$$

(1) .... $I = -\frac{1}{x} - \ln|x| + 2\ln|x+1| == -\frac{1}{x} + \ln\frac{(x+1)^2}{|x|} + C$

(0.5) .... 2) نضع $t = \sqrt{x-1}$ و منه $dx = 2tdt \Leftarrow x = t^2 + 1$

(0.5) .... لدينا أيضا $x = 2 \Leftarrow t = 1$ و $x = 1 \Leftarrow t = 0$ و منه

(0.5) .... $J = \int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx = 2\int_0^1 t^2(t^2+1)\,dt$

(0.5) .... $J = 2\left[\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{15}$

التمرين الثالث:(4 نقاط)

تعيين الحل العام للمعادلة دون الطرف الثاني $xy' - y = 0$

(0.25) .... من الواضح أنَ $y = 0$ حل للمعادلة.

نفرض أن $y \neq 0$

من أجل $x = 0$ فإنَ $y = 0$

من أجل $x \neq 0$ فإنَ $xy' - y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x|$ .... (0.75)

إذن الحل العام للمعادلة دون الطرف الثاني هو $y_H = Cx$ حيث $C \in \mathbb{R}$. .... (0.5)

تعيين حل خاص للمعادلة مع الطرف الثاني.

نفرض $y_P = C(x).x$ بالتعويض في المعادلة نحصل على

$x(C'x + C) - Cx = x^3e^x$ و منه $x^2 C' = x^3e^x$ أو $C' = xe^x$ . ... (0.5)

باستعمال التكامل بالتجزئة نحصل على $C(x) = (x-1)e^x$ .... (1)

إذن $y_P = C(x).x = x(x-1)e^x$ .... (0.5)

تعيين الحل العام للمعادلة مع الطرف الثاني

لدينا $y_G = y_H + y_P = Cx + x(x-1)e^x$ .... (0.5)