جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة

قسم الرياضيات والإعلام الآلي السنة الجامعية : 2020/ 2021

المستوى : 1ج م رياضيات و إعلام آلي امتحان السداسي الثاني–التحليل2 **المدة**: ساعة و نصف الساعة

التمرين الأول:(8 نقاط)

1)- (3نقطة) أوجد نشرا محدودا من المرتبة 2 بجوار 0 للتابع: $f(x) = \frac{e^x \ln(1+x)}{1+x}$

2)- (2نقاط) أحسب, باستعمال النشر المحدود للتابع f, النهاية:

(يعطى: $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$)

3)-ليكن التابع: $g(x) = \frac{x^3}{1+x} e^{\frac{1}{x}} \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$

أ)- (1 نقطة)أثبت أن: $g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2} f(t)$.

ب)- (1 نقطة)استنتج نشرا محدودا بجوار ∞ للتابع g.

ج)- (1 نقطة)بين أن المنحنى البياني للتابع g يقبل مستقيم مقارب في جوار∞ يطلب تعيين معادلة له.

التمرين الثاني:(6,5 نقاط)

1)- (2نقطة)باستعمال المكاملة بالتجزئة, أحسب التكامل: $I = \int_1^e x^2 \ln x dx$.

2)- ليكن التابع: $h(x) = \frac{-x^3+4x^2-5x+4}{(x-1)^2(x^2+1)}$

أ)- (3نقطة)عين الأعداد a, b, c حيث: $h(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x^2+1}$.

ب)- (1,5 نقطة)أحسب التكامل: $J = \int h(x)\, dx$.

التمرين الثالث:(5,5 نقاط)

لتكن المعادلة التفاضلية التالية: $y' - xy = -x^3$ ……………… (E).

1)- (2 نقطة)أوجد الحل العام y_h للمعادلة: $y' - xy = 0$ ……………… (E').

2)- (2+1,5نقطة)عين العددين α, β حيث يكون: $y_p = \alpha x^2 + \beta$ حل خاص للمعادلة (E), ثم استنتج الحل العام y_G للمعادلة (E).

ملاحظة: العلامةالمتحصل عليها في التمرين الأول تحتسب في نقطة الأعمال الموجهة.

بالتوفيق.

الإجابة النموذجية مع سلم التنقيط. (امتحان 1)

التمرين الأول.	العلامات الجزئية.
1) • $e^x\ln(1+x) = (1+x+\frac{1}{2}x^2)(x-\frac{1}{2}x^2)$ $= x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$	1,5
• $\frac{e^x\ln(1+x)}{1+x} = \frac{1+\frac{1}{2}x^2}{1+x}$ $= x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$	1,5
2) • $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{e^x\ln(1+x)}{1+x}-x\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(x-\frac{1}{2}x^2-x+o(x^2)\right)$	0,5
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)$	0,5
$=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right)$. / $o(1)=\varepsilon(x)$.	0,5
$=-\frac{1}{2}$	0,5
3) أ/ •$g(\frac{1}{t}) = \frac{(\frac{1}{t})^3}{1+\frac{1}{t}}e^t\ln\left(\frac{1+\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}}\right)$	0,5
$=\frac{1}{t^2}f(t)$	0,5
ب/ •$g(\frac{1}{t}) = \frac{1}{t^2}\left(t+\frac{1}{2}t^2+t^2\varepsilon(t)\right)$	0,5
$=\frac{1}{t}-\frac{1}{2}+\varepsilon(t)$	0,5
بتعويض $\frac{1}{t}$ بـ x نحصل على: $g(x)=x-\frac{1}{2}+\varepsilon'(x)$ مع $\lim\limits_{x\to\infty}\varepsilon'(x)=0$	
جـ/ لدينا: $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-(x-\frac{1}{2})] = \lim\limits_{x\to\infty}\varepsilon'(x)=0$	0,5
إذا المنحنى البياني (C_g) يقبل مستقيم مقارب بجوار ∞ معادلته $y=x-\frac{1}{2}$	0,5

التمرين الثاني.	
1) $I=\int_1^e x^2\ln x\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\ln x\right]_1^e - \int_1^e\frac{1}{3}x^3\cdot\frac{1}{x}\,dx$	0,5
$=\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^e$	0,5 / 0,5
$=\frac{2}{9}e^3+\frac{1}{9}$	0,5
2) أ/ $h(x)=\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x^2+1} = \frac{bx^3+(a-b+c)x^2+(b-2c)x+a-b+c}{(x^2+1)(x-1)^2}$	1,5

بعد توحيد المقامات والمطابقة نحصل على:

$$\begin{cases} b=-1 \\ a-b+c=4 \\ b-2c=-5 \\ a-b+c=4 \end{cases} \Rightarrow a=1\ ;\ b=-1\ ;\ c=2$$ (1,5)

ب) $\int h(x)dx = \int \frac{1}{(x-1)^2}dx - \int \frac{1}{x-1}dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}dx$ (0,5)

$$= \frac{-1}{x-1} - \ln|x-1| + 2\,\text{Arctan}\,x + c$$ (1)

التمرين الثالث.

1) أولاً: واضح أن $y=0$ حل للمعادلة (E'). (0,5)

ثانيا: نفرض $y\neq 0$. عندئذ:

$$(E') \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = x\,dx$$ 3x(0,5)

$$\Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$\Rightarrow y = k\,e^{\frac{1}{2}x^2} \quad / k\in\mathbb{R}^*$$

ومنه فإن الحل العام للمعادلة (E') هو: $y_h = k\,e^{\frac{1}{2}x^2}$

2/ $y_p = \alpha x^2 + \beta$ حل خاص للمعادلة (E) معناه:

$$y'_p - xy_p = -x^3 \Leftrightarrow 2\alpha x - x(\alpha x^2+\beta) = -x^3$$ (0,5)

$$\Leftrightarrow -\alpha x^3 + (2\alpha-\beta)x = -x^3$$ (0,5)

ومنه $-\alpha=-1$ و $2\alpha-\beta=0$ (0,5)

إذن: $\alpha=1$ و $\beta=2$. (0,5)

ومنه $y_p = x^2+2$

الاستنتاج:

لدينا: $y_G = y_h + y_p$ (0,5)

ومنه $y_G = k\,e^{\frac{1}{2}x^2} + x^2 + 2 \quad / k\in\mathbb{R}$ (1)