جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة

قسم الرياضيات والإعلام الآلي السنة الجامعية : 2020/ 2021

المستوى :1ج م رياضيات و إعلام آلي الامتحان الاستدراكي الثاني–التحليل 2 **المدة**: ساعة و نصف

التمرين الأول:(6,5 نقطة)

1)- (2+1,5نقطة) أوجد نشرا محدودا من المرتبة 2 بجوار0 للتوابع:

$$f(x) = \ln\left(tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right) \quad ، \quad g(x) = \ln(1 + x) - x\, tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

2)-(2+1 نقطة) أحسب، باستعمال النشور المحدودةالسابقة، النهايتين التاليتين:

يعطى: بجوار 0

$$\left(\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \qquad tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)\right)$$

التمرين الثاني:(7,5نقطة)

1)- (2 نقطة) باستعمال المكاملة بالتجزئة, أحسب التكامل: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$.

2)- ليكن التابع: $h(x) = \frac{x-11}{(x+1)^2(x^2-x+2)}$

أ)- (4 نقطة) عين الأعداد a, b, c حيث:

$$h(x) = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx-1}{x^2-x+2}.$$

ب)- (1,5نقطة) أحسب التكامل: $J = \int h(x)\, dx$.

التمرين الثالث:(6 نقاط)

لتكن المعادلة التفاضلية التالية: $xy' - y = x^2 sinx$ .... (E).

1)- (2نقطة)أوجد الحل العام y_h للمعادلة: $xy' - y = 0$ .... (E').

2)-أ)-(1+2 نقطة) باستعمال طريقة تحريك الثابت, عين حلا خاصا y_p للمعادلة (E), ثم استنتج الحل العام y_G للمعادلة (E).

ب)-(1نقطة) عين الحل الخاص y_0 للمعادلة (E) الذي يحقق الشرط: $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.

بالتوفيق.

2021 / 2020

جامعة العربي بن مهيدي - أم البواقي.

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة.

المستوى: سنة أولى ر.إ.م.

قسم الرياضيات والإعلام الآلي.

امتحان استدراكي في التحليل 2.

الإجابة النموذجية مع سلم التنقيط. (امتحان 3)

التمرين الأول:

1).

$\bullet\ g(x) = \ln(1+x) - x\tan(\frac{\pi}{4}+x)$ (1,5)

$= x - \frac{1}{2}x^2 - x(1+2x+2x^2)$

$= -\frac{5}{2}x^2 + o(x^2).$

$\bullet\ f(x) = \ln(\tan(\frac{\pi}{4}+x))$. / $\lim \tan(\frac{\pi}{4}+x) = 1 \neq 0$

$= \ln(1+\tan(\frac{\pi}{4}+x)-1)$ / $\tan(\frac{\pi}{4}+x)-1 = 2x+2x^2+o(x^2)$

$= (2x+2x^2) - \frac{1}{2}(2x+2x^2)^2 + o(x^2)$ (2)

$= 2x+2x^2 - \frac{1}{2}\cdot 4x^2 + o(x^2)$

$= 2x + o(x^2)$

2) $\bullet\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}(\ln(1+x) - x\tan(\frac{\pi}{4}+x)) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}(-\frac{5}{2}x^2 + o(x^2))$ (1)

$= \lim\limits_{x\to 0}(-\frac{5}{2} + \varepsilon(x))$

$= -\frac{5}{2}$

$\bullet\ h: x \to \ln(\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}))$ لحساب النهاية الثانية يجب نشر التابع في جوار $+\infty$. (1)

$h(\frac{1}{t}) = \ln(\tan(\frac{\pi}{4}+t)) = f(t)$

$= 2t + o(x^2)$

$h(x) = \frac{2}{x} + o(\frac{1}{x^2})$

ومنه

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(\tan(\frac{\pi}{4}+x)) = \lim x(\frac{2}{x} + o(\frac{1}{x^2}))$

$= \lim\limits_{x\to\infty}(2 + o(\frac{1}{x}))$ (1)

$= \lim(2+\varepsilon'(x))$ / $\lim\limits_{x\to\infty}\varepsilon'(x) = 0$

$= 2.$

التمرين الثاني:

1/

$\bullet\ I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2}\sin x\,dx$ (2)

$$I=\left[x\cdot\sin x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1.$$

2) أ/

$$h(x)=\frac{a}{(x+1)^2}+\frac{b}{x+1}+\frac{cx-1}{x^2-x+2}$$

$$=\frac{(b+c)x^3+(a+2c-1)x^2+(b-a+c-2)x+2a+2b-1}{(x+1)^2(x^2-x+2)}$$ 4

ومنه $b+c=0\ ;\ a+2c-1=0\ ;\ b-a+c-2=0\ ;\ 2a+2b-1=-11$

اذن $a=-3\ ;\ b=-2\ ;\ c=2$

ب/ $$\int h(x)dx=-3\int\frac{1}{(x+1)^2}dx-2\int\frac{1}{x+1}dx+\int\frac{2x-1}{x^2-x+2}dx$$ 1,5

$$=\frac{3}{x+1}-2\ln|x+1|+\ln|x^2-x+2|+c.$$

التمرين الثالث:

1/ • من الواضح أن $y=0$ هو حل للمعادلة (E') (الدالة المعدومة حل) 0,5

• نفرض الآن أن $y\neq 0$ عندئذٍ فإن:

$$(E')\Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}\Rightarrow \ln|y|=\ln x+c$$ 1,5

$$\Rightarrow y=c\cdot x\quad / c\in\mathbb{R}.$$

2/ أ/ نضع $y_p=c(x)\cdot x$ حل للمعادلة (E) عندئذٍ فإن:

$$xy_p'-y_p=x^2\sin x\Rightarrow x(c'\cdot x+c)-c\cdot x=x^2\sin x$$ 2

$$\Rightarrow c'(x)=\sin x$$

$$\Rightarrow c(x)=-\cos x$$

اذن $y_p=-x\cos x$

• الحل العام للمعادلة (E) يعطى بالعلاقة $y_G=y_h+y_p$ 1

ومنه $y_G=x(c-\cos x)$

ب/ $$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi\iff\frac{\pi}{2}\left(c-\cos\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$ 1

$$\Rightarrow c=2.$$

ومنه $y_0=x(2-\cos x)$.