السنة الدراسية 2018/2019	الامتحان الاستدراكي	جامعة العربي بن المهيدي - أم البواقي
السنة الأولى MI	في مادّة التحليل 2	قسم الرياضيات و الاعلام الآلي

تمرين 1 (08 نقاط)

ليكن (C) التمثيل البياني للتابع f المعرّف على المجال $I=]-1,1[$ بالعبارة

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{Arcsinx}{x\sqrt{1-x}}, & x\in I-\{0\},\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

1) أوجد النّشر المحدود من الرّتبة 3 للتّابع $g(x)=\dfrac{Arcsinx}{\sqrt{1-x}}$ بجوار 0 .

2) باستعمال السّؤال السّابق بيّن أنّ:

أ) f مستمّر عند 0 .

ب) f قابل للاشتقاق عند 0 . حدّد قيمة $f'(0)$.

ج) (C) يقبل مماسّا (T) عند النّقطة ذات الفاصلة 0 يطلب تحديد معادلة له.
استنتج الوضع النّسبي لـ (C) و (T) بجوار هذه النّقطة.

(يعطى : $\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+o(x^3)$ و $Arcsin(x)=x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$ بجوار الصفر)

تمرين 2 (06 نقاط)

احسب التّكاملات التّالية:

1) $\int\sqrt{\sin x}\cos x\ dx$ 2) $\int\dfrac{3x+1}{x^2+4x+3}dx$ 3) $\int\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

تمرين 3 (06 نقاط)

1) أوجد الحلّ العام للمعادلة التّفاضليّة : $y'+2y=-4x^2$.

2) استنتج حلول معادلة بارنولي التّالية: $y'-y=2x^2y^3$.

بالتّوفيق

جامعة العربي بن مهيدي - أم البواقي قسم الرياضيات والإعلام الآلي.	السنة الدراسية 2019/2018 السنة الأولى MI.

الإجابة النموذجية مع سلم التنقيط للامتحان الاستدراكي في مادة التحليل 2.

التمرين الأول

/1 (0,5)

$$g(x)=\frac{x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+o(x^3)}$$

(3)

$$\begin{array}{r|l}
x+\frac{1}{6}x^3 & 1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3 \\
\hline
x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^3 & x+\frac{1}{2}x^2+\frac{13}{24}x^3 \\
\hline
0+\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{24}x^3 & \\
+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^3 & \\
\hline
0+\frac{13}{24}x^3 & \\
\frac{13}{24}x^3 & \\
\hline
o(x^3) &
\end{array}$$

ملاحظة: عند حساب $\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+o(x^3)$ فقط تعطى نفس العلامة (1,5)

$$g(x)=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{13}{24}x^3+o(x^3)$$

/2 من أجل $x\neq 0$ فإن (0,5)

$$f(x)=1+\frac{1}{2}x+\frac{13}{24}x^2+o(x^2)$$

مع x بجوار 0.

أ/ (1)

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{13}{24}x^2+o(x^2)\right)=1=f(0)$$

إذا f مستمر عند 0.

ب/ بما أن f يقبل نشرا محدودا بجوار 0 ومستمر عنده فهو يقبل الاشتقاق عنده ولدينا $f'(0)=a_1=\frac{1}{2}$. (1)+(0,5)

جـ/ من النشر المحدود للتابع f نستنتج أن معادلة المماس T هي من الشكل $y=1+\frac{1}{2}x$. (0,5)

تحديد الوضع النسبي لـ (C) و (T) بجوار A ذات الفاصلة 0

من x بجوار 0 لدينا $f(x)-\left(1+\frac{1}{2}x\right)=\frac{13}{24}x^2+o(x^2)$

ولدينا $\frac{13}{24}x^2>0$

(1) فإن (C) يكون فوق (T) بجوار النقطة A.

التمرين 02.

(0,5) (أ) نضع $x=2\sin t \Leftarrow dx=2\cos t\,dt$

(0,5) ومنه $\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}2\cos t\,dt$

$$=\int\frac{1}{2\cos t}\cdot 2\cos t\,dt$$

(0,5)

$$=\int dt=t+c$$

(0,5) ومنه $\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{2}+c.$

(0,5) (2) $x^2+4x+3=0$

$\Delta=4\ ;\ x_1=-3\ ;\ x_2=-1$

ومنه $x^2+4x+3=(x+3)(x+1)$

(0,5) ومنه $\frac{3x+1}{x^2+4x+3}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x+1}$

$$=\frac{(A+B)x+A+3B}{x^2+4x+3}.$$

(0,5) ومنه $\begin{cases}A+B=3\\A+3B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=4\\B=-1\end{cases}$

(0,5) $\int\frac{3x+1}{x^2+4x+3}dx=4\int\frac{1}{x+3}dx-\int\frac{1}{x+1}dx=4\ln|x+3|-\ln|x+1|+c.$

$$\int \sqrt{\sin x}\cdot \cos x\,dx = \int (\sin x)^{\frac{1}{2}}\cdot (\sin x)'\,dx$$ (3) (1)

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}+1}\cdot (\sin x)^{\frac{1}{2}+1} + c$$ (0.5)

$$= \frac{2}{3}\,\sin x\cdot\sqrt{\sin x} + c\ .$$ (0.5)

التمرين الثالث.

/1

$$y' + 2y = -4x^2 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$y' + 2y = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

(2) تقبل حلا عاما من الشكل $y = c\,e^{-2x}$ (1)

تحويل الثابت:

$$y = c(x)\cdot e^{-2x}$$

$$y' = c' e^{-2x} - 2c\,e^{-2x}$$

بالتعويض في (1) :

$$c' e^{-2x} - 2c\,e^{-2x} + 2c\,e^{-2x} = -4x^2$$

$$c' = -4x^2 e^{+2x}$$

$$c = -4\int x^2 e^{+2x}\,dx$$ (1)

المكاملة بالتجزئة:

$$c = -4\left(+\frac{1}{2}x^2 e^{+2x} - \int x\,e^{+2x}\,dx\right)$$ (0.75)

المكاملة بالتجزئة مرة ثانية

$$c = -2x^2 e^{2x} + 4\left(+\frac{1}{2}x\,e^{+2x} - \frac{1}{2}\int e^{+2x}\,dx\right)$$ (0.75)

$$c(x) = -2x^2 e^{+2x} + 2x\,e^{+2x} + 2\left(-\frac{1}{2}e^{+2x}\right) + c$$

$$c(x) = (-2x^2 + 2x - 1)\,e^{+2x} + c$$

إذا الحل العام للمعادلة (1) يعطى ب

$$y = -2x^2 + 2x - 1 + c\,e^{-2x}$$ (0.5)

/2. واضح أن $z = 0$ حلا للمعادلة

$$z' - z = 2x^2 z^3 \quad \ldots\ldots (3)$$ (0.5)

• نفرض الآن $z \neq 0$. عندئذ فإن:

$$(3) \Leftrightarrow z' z^{-3} - z^{-2} = 2x^2$$ (0.5)

بوضع $y = z^{-2}$ فإن المعادلة تكتب:

$$y' + 2y = -4x^2$$ (0.5)

من السؤال (1) فإن: $y = -2x^2 + 2x - 1 + c\,e^{-2x}$ (0.5)

إذا: $z = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{-2x^2 + 2x - 1 + c\,e^{-2x}}}$ أو $z = 0$ (0.5)