ULBM, FSSA, Ain Beida

2st Génie Mécanique

Le 14/05/2024

Durée 1h30 min

Examen Méthodes Numériques

Problème 1 (8pts):

Soit la fonction suivante : $f(x) = x^4 - x - 10$.

1) Prouvez que l'équation *f(x)=0* a deux racines qui appartiennent à [-2, -1.5] et [1.5, 2] ? 1,5
2) Vérifier les conditions de convergence de la méthode de Newton-Raphson pour les deux intervalles donnés ? 1,5
3) Calculer les deux racines par la méthode de Newton-Raphson si on prend comme précision 0.0001 ? 5

Problème 2 (5pts):

Dans ce problème on prend quatre chiffres après la virgule.

1) Calculer la valeur exacte de d'intégrale $\int_{-2}^{2}(x^4 - x - 10)dx$? 1
2) Utiliser la méthode de Simpson avec un pas ***h=0.5*** pour calculer numériquement cette intégrale ? 3
3) Calculer en pourcent l'erreur du calcul ? 1

Problème 3 (7pts):

Résoudre le système d'équations suivant par <u>une seule</u> méthode :

- **<u>LU</u>**
- **<u>TDMA (Algorithme de Thomas)</u>**

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix}$$

2 1) Décrire le principe de la méthode ?

5 2) Résoudre le système ?

Problème 1 : $f(x) = x^4 - x - 10$

1) Prouvons que $f(x) = 0$ a deux racines qui appartiennent à $\begin{cases} [-2, -1.5] \\ [1.5, 2] \end{cases}$

il suffit d'avoir $f(a) \cdot f(b) < 0$ pour chaque intervalle

$f(-2) = 8$, $f(-1.5) = -3{,}44$ $f(-2) \cdot f(-1.5) < 0$ 1/2 1/2 1/2

$f(1.5) = -6{,}44$, $f(2) = 4$ $f(1.5) \cdot f(2) < 0$

2) Conditions de convergence par Newton-Raphson

$f'(x)$ et $f''(x) \neq 0$ et gardent des signes constant sur $[a, b]$.

$f'(x) = 4x^3 - 1$ $\begin{cases} \text{sur } [-2, -1.5] & f'(x) < 0 \ \forall x \\ \text{sur } [1.5, 2] & f'(x) > 0 \ \forall x \end{cases}$ 0,5 $\Rightarrow$ CV 1/2

$f''(x) = 12x^2$ $\begin{cases} \text{sur } [-2, -1.5] & f''(x) > 0 \ \forall x \\ \text{sur } [1.5, 2] & f''(x) > 0 \ \forall x \end{cases}$ 0,5

3) Calcul des racines par la méthode de Newton-Raphson.

- Sur $[2, -1.5] \rightarrow x_0 = \dfrac{-2 - 1.5}{2} = -1.75$ 0,5

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^4 - x_n - 10}{4x_n^3 - 1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$ 1

$n = 0 \rightarrow x_1 = -1{,}6997$ $|x_1 - x_0| > 0$ 1,5

$n = 1 \rightarrow x_2 = -1{,}6975$ $|x_2 - x_1| > 0$

$n = 2 \rightarrow x_3 = -1{,}6975$ $|x_3 - x_2| = 0 \rightarrow \bar{x} \approx x_3 = -1.6975$.

- Sur $[1.5, 2] \rightarrow x_0 = \dfrac{2 + 1.5}{2} = 1.75$ 0,5

$n = 0 \rightarrow x_1 = 1{,}8660$ $|x_1 - x_0| > 0$ 1,5

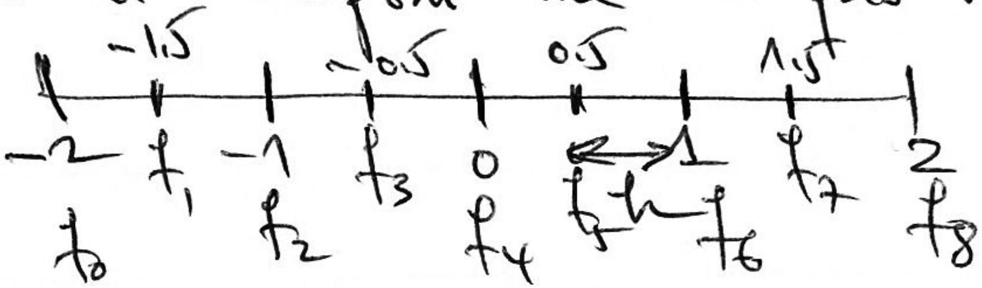
$n = 1 \rightarrow x_2 = 1{,}8557$ $|x_2 - x_1| > 0$.

$n = 2 \rightarrow x_3 = 1{,}8556$ $|x_3 - x_2| = \varepsilon \rightarrow \bar{x} \approx x_3 = 1.8556$.

Problème 2.

1 1) On calcule $\int_{-2}^{2}(x^4-x-10)dx = \left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^2}{2}-10x\right]_{-2}^{2} = -27.2$. 0,5 0,5

3 2) Méthode de Simpson avec un pas $h = 0.5$



0,5 0,5 0,5 0,5

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f_0+4(f_1+f_3+f_5+f_7)+2(f_2+f_4+f_6)+f_8\right].$$

$$= \frac{0.5}{3}\left[8+4(-3.4375-9.4375-10.4375-6.4375)+2(-8-10-10+4)\right]$$

$$= -27.17.$$ 0,5 0,5

1 3) Erreur pourcent $Err\% = \left|\frac{Valexact - Val\,num}{Valexact}\right| \times 100\%$ 0,5

$$Err\% = \left|\frac{-27.2+27.17}{-27.2}\right| \times 100\% = 0{,}11\%.$$ 0,5

Problème 3 : A) $\boxed{\text{Méthode LU}}$, On a $AX=B$

1) On factorise $A=LU \Rightarrow LUX=B$, on pose $UX=Y$ (inconnu).

$$\Rightarrow \begin{cases} LY=B & (1) \\ UX=Y & (2) \end{cases}$$

U triangulaire supérieure
L triangulaire inférieure

2) Résolution du système par LU :

On a
$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{11}U_{12} & l_{11}U_{13} \\ l_{21} & l_{21}U_{12}+l_{22} & l_{21}U_{13}+l_{22}U_{23} \\ l_{31} & l_{31}U_{12}+l_{32} & l_{31}U_{13}+l_{32}U_{23}+l_{33} \end{bmatrix}$$

En comparant avec A, on aura $l_{11}=3$, $l_{21}=1$ et $l_{31}=0$,

$l_{11}U_{12}=1 \to U_{12}=1/3$, $l_{11}U_{13}=0 \to U_{13}=0$, $l_{21}U_{12}+l_{22}=3 \to l_{22}=8/3$

$l_{31}U_{12}+l_{32}=1 \to l_{32}=1$, $l_{21}U_{13}+l_{22}U_{23}=1 \to U_{23}=3/8$

$l_{31}U_{13}+l_{32}U_{23}+l_{33}=3 \to l_{33}=3-3/8=21/8$,

On a $LY=B \Leftrightarrow$
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 8/3 & 0 \\ 0 & 1 & 21/8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$\to eq(1) \to Y_1 = 8/3$

$\to eq(2) \to Y_2 = \frac{3}{8}\left[12-8/3\right] = 7/2$

$\to eq(3) \to Y_3 = \frac{8}{21}\left[14-7/2\right] = 4$

Aussi $UX=Y \Leftrightarrow$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 3/8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/3 \\ 7/2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$\to eq(3) \to X_3 = 4$

$\to eq(2) \to X_2 = 7/2 - 3/8 \cdot 4 = 2$

$\to eq(1) \to X_1 = 8/3 - \frac{1}{3}\cdot 2 = 2$

La solution est $(X_1, X_2, X_3) = (2, 2, 4)$.

B) $\boxed{\text{TDMA}}$

1) Algorithme de Thomas pour le système donné :

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$\gamma_1 = \frac{c_1}{b_1}$, $\beta_1 = \frac{Y_1}{b_1}$

$\gamma_i = \frac{c_i}{b_i - a_i\gamma_{i-1}}$, $i=\overline{2,n-1}$ et $\beta_i = \frac{Y_i - a_i\beta_{i-1}}{b_i - a_i\gamma_{i-1}}$, $i=\overline{2,n}$, $x_n = \beta_n$

$x_i = \beta_i - \gamma_i x_{i+1}$, $i=\overline{n-1,1}$

2) Résolution par TDMA : On calcule

$\gamma_1 = 1/3$, $\beta_1 = \frac{8}{3}$, $\gamma_2 = \frac{c_2}{b_2 - a_2\gamma_1} = 3/8$, $\beta_2 = \frac{Y_2 - a_2\beta_1}{b_2 - a_2\gamma_1} = \frac{12-8/3}{8/3} = \frac{7}{2}$

$\beta_3 = \frac{Y_3 - a_3\beta_2}{b_3 - a_3\gamma_2} = \frac{14-7/2}{3-3/8} = 4$, $\beta_n = x_n \to x_3 = 4$,

$x_2 = \beta_2 - \gamma_2 x_3 = \frac{7}{2} - 3/8 \cdot 4 = 2$, $x_1 = \beta_1 - \gamma_1 x_2 = 8/3 - 1/3 \cdot 2 = 2$.

La solution est $(X_1, X_2, X_3) = (2, 2, 4)$.