Chapitre 03 :

Test d'hypothèses

Généralités sur les tests

I) Introduction

Un test d'hypothèse est un procédé d'inférence permettant de contrôler (accepter ou rejeter) à partir de l'étude d'un ou plusieurs échantillons aléatoires, la validité d'hypothèses relatives à une ou plusieurs populations. Les méthodes de l'inférence statistique nous permettent de déterminer, avec une probabilité donnée, si les différences constatées au niveau des échantillons peuvent être imputables au hasard ou si elles sont suffisamment importantes pour signifier que les échantillons proviennent de populations vraisemblablement différentes.

On distinguera deux classes de tests :

- Les tests paramétriques requièrent un modèle à fortes contraintes (normalité des distributions ou approximation normale pour des grands échantillons). Ces hypothèses sont d'autant plus difficiles à vérifier que les effectifs étudiés sont plus réduits.

- Les tests non paramétriques sont des tests dont le modèle ne précise pas les conditions que doivent remplir les paramètres de la population dont a été extrait l'échantillon. Il n'y a pas d'hypothèse de normalité au préalable.

Les tests paramétriques, quand leurs conditions sont remplies, sont les plus puissants que les tests non paramétriques. Les tests non paramétriques s'emploient lorsque les conditions d'applications des autres méthodes ne sont pas satisfaites, même après d'éventuelles transformations de variables. Ils peuvent s'utiliser même pour des échantillons de taille très faible.

On distingue les tests suivant :

- Le test de conformité consiste à confronter un paramètre calculé sur l'échantillon à une valeur préétablie. Les plus connus sont certainement les tests portant sur la moyenne, la variance ou sur les proportions. On connaît la loi théorique en général la loi normale. Par exemple, dans un jeu de dés à 6 faces, on sait que la face 3 a une probabilité de 1/6 d'apparaître. On demande à un joueur de lancer (sans précautions particulières) 100 fois le dé, on teste alors si la fréquence d'apparition de la face 3 est compatible avec la probabilité 1/6. Si ce n'est pas le cas, on peut se poser des questions sur l'intégrité du dé.

- Le test d'ajustement ou d'adéquation consiste à vérifier la compatibilité des données avec une distribution choisie a priori. Le test le plus utilisé dans cette optique est le test d'ajustement à la loi normale, qui permet ensuite d'appliquer un test paramétrique.

- Le test d'homogénéité ou de comparaison consiste à vérifier que K ($K \geq 2$) échantillons (groupes) proviennent de la même population ou, cela revient à la même chose, que la distribution de la variable d'intérêt est la même dans les K échantillons. Y a-t-il une différence entre le taux de glucose moyen mesuré pour deux échantillons d'individus ayant reçu des traitements différents ?

- Le test d'indépendance ou d'association consiste à éprouver l'existence d'une liaison entre 2 variables. Les techniques utilisées diffèrent selon que les variables sont qualitatives nominales, ordinales ou quantitatives. Est-ce que la distribution de la couleur des yeux observée dans la population algérienne fréquences est indépendante du sexe des individus ?

⟹ Principe des tests

Le principe des tests d'hypothèse est de poser une hypothèse de travail et de prédire les conséquences de cette hypothèse pour la population ou l'échantillon. On compare ces prédictions avec les observations et l'on conclut en acceptant ou en rejetant l'hypothèse de travail à partir de règles de décisions objectives. Définir les hypothèses de travail, constitue un élément essentiel des tests d'hypothèses de même que vérifier les conditions d'application de ces dernières.

Différentes étapes doivent être suivies pour tester une hypothèse :

(1) Définir l'hypothèse nulle, notée H_0, à contrôler ;

(2) Choisir une statistique pour contrôler H_0 ;

(3) Définir la distribution de la statistique sous l'hypothèse «H_0 est réalisée » ;

(4) Définir le niveau de signification du test α et la région critique associée ;

(5) Calculer, à partir des données fournies par l'échantillon, la valeur de la statistique ;

(6) Prendre une décision concernant l'hypothèse posée.

↪ Hypothèse nulle - hypothèse alternative.

L'hypothèse nulle notée H_0 est l'hypothèse que l'on désire contrôler : elle consiste à dire qu'il n'existe pas de différence entre les paramètres comparés ou que la différence observée n'est pas significative et est due aux fluctuations d'échantillonnage. Cette hypothèse est formulée dans le but d'être rejetée. L'hypothèse alternative notée H_1 est la "négation" de H_0, elle est équivalente à dire «H_0 est fausse ». La décision de rejeter H_0 signifie que H_1 est réalisée ou H_1 est vraie.

Remarque : Il existe une dissymétrie importante dans les conclusions des tests. En effet, la décision d'accepter H_0 n'est pas équivalente à « H_0 est vraie et H_1 est fausse ». Cela traduit seulement l'opinion selon laquelle, il n'y a pas d'évidence nette pour que H_0 soit fausse. Un test conduit à rejeter ou à ne pas rejeter une hypothèse nulle jamais à l'accepter d'emblée.

La nature de H_0 détermine la façon de formuler H_1 et par conséquent la nature unilatérale ou bilatérale du test. On parle de **test bilatéral** lorsque l'hypothèse alternative se "décompose en deux parties". Par exemple si H_0 consiste à dire que la population estudiantine avec une fréquence de fumeurs p est représentative de la population globale avec une fréquence de fumeurs p_0, on pose alors : $H_0 : p = p_0$ et $H_1 : p \neq p_0$. Le test sera bilatéral car on considère que la fréquence p peut être supérieure ou inférieure à la fréquence p_0.

On parle de **test unilatéral** lorsque l'hypothèse alternative se "compose d'une seule partie". Par exemple si l'on fait l'hypothèse que la fréquence de fumeurs dans la population estudiantine p est supérieure à la fréquence de fumeurs dans la population p_0, on pose alors $H_0 : p = p_0\ et\ H_1 : p > p_0$. Le test sera **unilatéral à droite** car on considère que la fréquence p ne peut être que supérieure à la fréquence p_0. Il aurait été possible également d'avoir : $H_0 : p = p_0\ et\ H_1 : p < p_0$, et on dit que **le test est unilatéral à gauche**.

↪ Statistique et niveau de signification.

Le choix du niveau de signification ou risque α est lié aux conséquences pratiques de la décision, en général on choisira $\alpha = 0,05\ ;\ 0,01\ ou\ 0,001$.

↪ Risques d'erreur

Définition 1. On appelle risque d'erreur de première espèce la probabilité de rejeter H_0 et d'accepter H_1 alors que H_0 est vraie.

Remarque : Ceci se produit si la valeur de la statistique de test tombe dans la région de rejet alors que l'hypothèse H_0 est vraie. La probabilité de cet évènement est le niveau de signification α. On dit aussi que le niveau de signification est la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle à tort.

Définition 2. On appelle risque d'erreur de seconde espèce, notée β la probabilité de rejeter H_1 et d'accepter H_0 alors que H_1 est vraie.

↪ Puissance d'un test

Définition 3. On appelle puissance d'un test, la probabilité de rejeter H_0 et d'accepter H_1 alors que H_1 est vraie. Sa valeur est $1 - \beta$.

Les différentes situations que l'on peut rencontrer dans le cadre des tests d'hypothèse sont résumées dans le tableau suivant :

Réalité / Décision	H_0 vraie	H_1 vraie
H_0 acceptée	Correct	manque de puissance risque de seconde espèce β
H_1 acceptée	Rejet à tort Risque de première espèce α	puissance du test $1 - \beta$

II) <u>Test paramétriques</u>

On suppose dans ce chapitre que les échantillons sont issus d'une loi normale ou peuvent être approximés par une loi normale.

Tests de conformité :

Les tests de conformité sont destinés **à vérifier si un échantillon peut être considéré comme extrait d'une population donnée ou représentatif de cette population**, vis-à-vis d'un paramètre comme la moyenne, la variance ou la fréquence observée. Ceci implique que **la loi théorique du paramètre est connue au niveau de la population**.

1) Test de la moyenne

Principe du test :

Étapes pour réaliser le test :

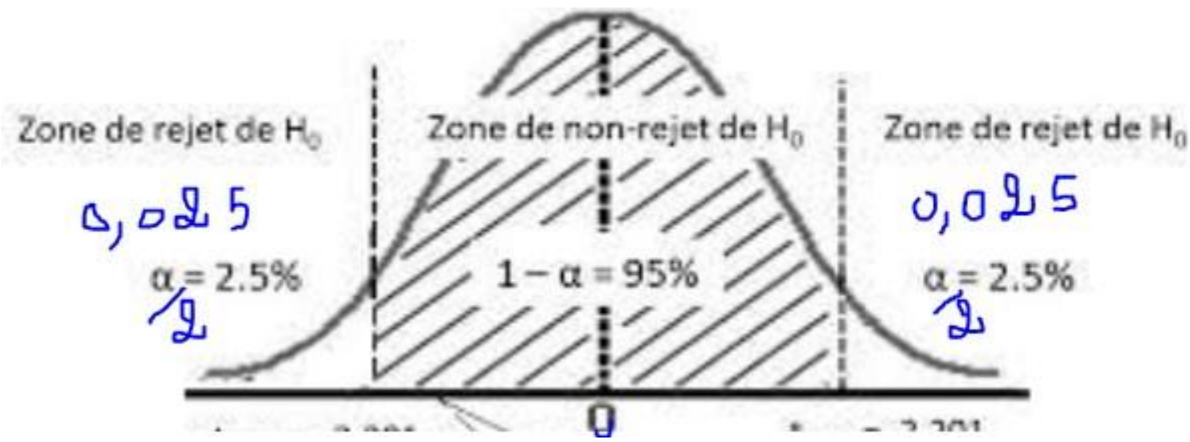
1) Formulation des hypothèses :

◊ Hypothèse nulle H_0

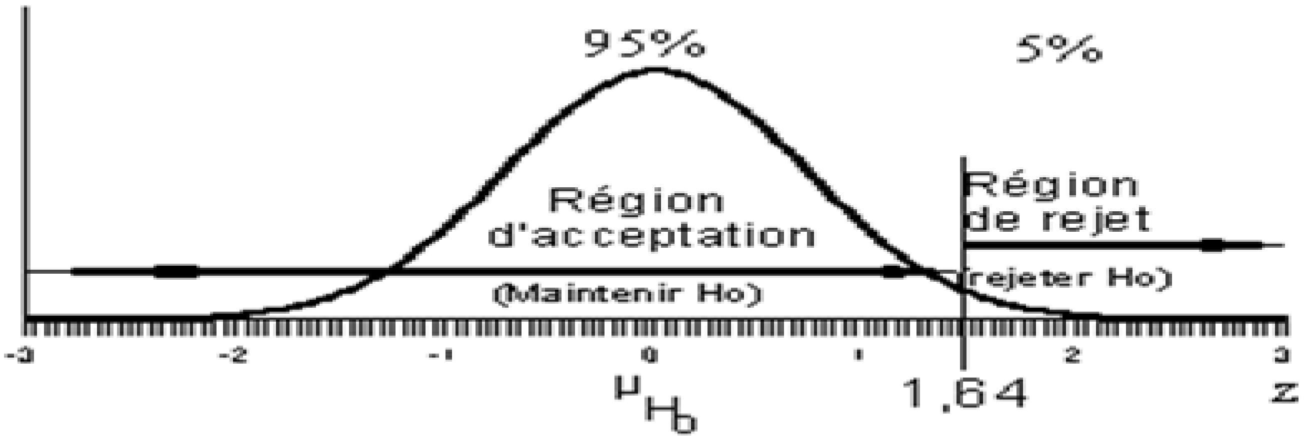
$$\boxed{H_0 : \quad \mu = \mu_0}$$

◊ Hypothèse alternative H_1

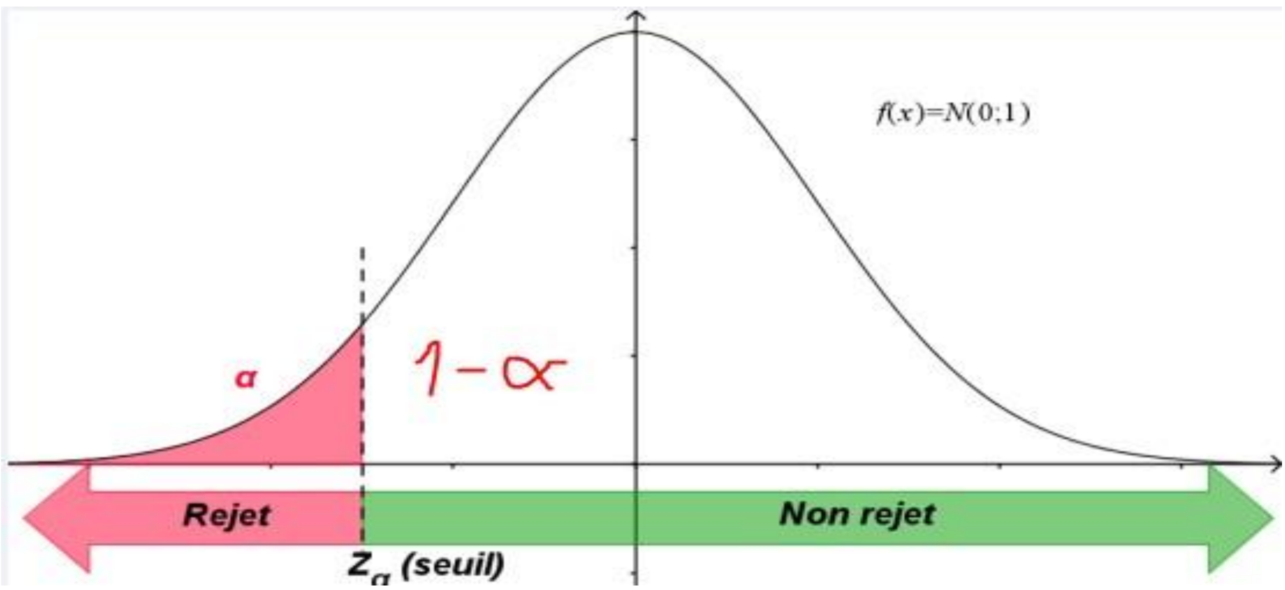
$$\boxed{H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad \text{Test bilatéral}}$$



$H_1 : \mu > \mu_0$ test unilatéral à droite



$H_1 : \mu < \mu_0$ test unilatéral à gauche



2) Détermination du niveau de signification :

Le niveau de signification est donné dans les données et est généralement de 5% ou 1%.

3) Choix du test :

Variance de la population connue : Si la variance est connue, on utilise le test suivant

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Où :

$\bar{X}$: Moyenne de l'échantillon.

μ_0 : Moyenne de la population.

σ : L'écart type.

Variance de la population inconnue : Si la variance est inconnue, on utilise le test de t-student

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{s^2/n}}$$

Avec $s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$.

Remarque : Lorsque les échantillons sont suffisamment grands ($n \geq 30$), la distribution de t-Student converge vers une distribution normale centrée réduite.