الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة العربي بن مهيدي– أم البواقي– كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

المقياس: الأساليب الكمية في الادارة القسم: علوم التسيير

المستوى: أولى ماستر أدارة مالية + أولى ماستر إدارة اعمال

السنة الدراسية: **2023–2024** (السداسي الاول)

حل السلسلة الثانية: بخصوص الفصل الثاني نظرية الالعاب

حل التمرين الاول: نختار أقل قيمة في الاسطر وأكبر قيمة في الاعمدة والرقم المشترك ان كان موجود فأن المباراة بها نقطة سرج أو توان أو مبراة غير مختلطة (أي بها استراتيجية واحدة دائما مهما كانت نتائج الاستر)

		اللاعب Y		
		Y_1	Y_2	Min
اللاعب X	X_1	-2	2	-2
	X_2	4	7	4
	Max	4	7	

- بما ان المباراة بها نقطة توازن فهي مستقرة ونتيجتها تساوي (V=4) وهي قيمة موجبة وتعتبر ربح للاعب X والاستراتيجية المثلى اللاعب X هي X_2 ، أما اللاعب Y فإن استراتيجيته المثلى هي Y_1، (لو كانت النتيجة سالبة فإنها تمثل ربح للاعب Y)

حل التمرين الثاني: نحدد اقل قيم في الأسطر وأكبر قيم في الأعمدة.

		اللاعب Y		أصغر الأرقام في الصفوف
		Y_1	Y_2	
اللاعب X	X_1	-3	3	-3
	X_2	-2	4	-2
	X_3	2	3	2
أكبر الأرقام في الأعمدة		2	4	

إن الرقم المشترك هنا 2 وهذا يعني أن هناك نقطة سرج والمباراة ذات استراتيجية واحدة وخالصة يلتزمها اللاعب طيلة الوقت.

- قيمة المباراة هي 2 لصالح اللاعب X (الرقم موجب)
- الاستراتيجية المثلى للاعب X هي الاستراتيجية X_3 ، أما اللاعب Y فإن استراتيجيته المثلى هي Y_1.

حل التمرين الثالث: نحدد اقل قيم في الأسطر وأكبر قيم في الأعمدة.

		اللاعب Y			
		Y_1	Y_2	Y_3	Min
اللاعب X	X_1	2	8	9	2
	X_2	3	9	11	3
	X_3	7	8	12	7
	Max	7	9	12	

إن الرقم المشترك هنا 7 وهذا يعني أن هناك نقطة سرج والمباراة ذات استراتيجية واحدة وخالصة يلتزمها اللاعب طيلة الوقت.

- قيمة المباراة هي 7 لصالح اللاعب X (الرقم موجب)
- الاستراتيجية المثلى للاعب X هي الاستراتيجية X_3، أما اللاعب Y فإن استراتيجيته المثلى هي Y_1.

حل التمارين الرابع: نحدد اقل قيم في الأسطر وأكبر قيم في الأعمدة.

		اللاعب Y			
		Y_1	Y_2	Y_3	Min
اللاعب X	X_1	1	13	11	1
	X_2	-9	5	-11	5
	X_3	0	-3	13	0
	Max	1	13	13	

إن الرقم المشترك هنا 1 وهذا يعني أن هناك نقطة سرج والمباراة ذات استراتيجية واحدة وخالصة يلتزمها اللاعب طيلة الوقت.

- قيمة المباراة هي 1 لصالح اللاعب X (الرقم موجب)
- الاستراتيجية المثلى للاعب X هي الاستراتيجية X_1، أما اللاعب Y فإن استراتيجيته المثلى هي Y_1.

حل التمارين الخامس: نحدد اقل قيم في الأسطر وأكبر قيم في الأعمدة.

		اللاعب Y					
		Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Min
اللاعب X	X_1	16	4	0	14	-2	-2
	X_2	10	8	6	10	12	6
	X_3	2	6	4	8	14	2
	X_4	8	10	2	2	0	0
	Max	16	10	6	14	14	

إن الرقم المشترك هنا 6 وهذا يعني أن هناك نقطة سرج والمباراة ذات استراتيجية واحدة وخالصة يلتزمها اللاعب طيلة الوقت.

- قيمة المباراة هي 6 لصالح اللاعب X (الرقم موجب)
- الاستراتيجية المثلى للاعب X هي الاستراتيجية X_2، أما اللاعب Y فإن استراتيجيته المثلى هي Y_3.

حل التمرين السدس:

1- إيجاد قيمة المباراة بالطريقة الحسابية، بحيث نقوم بطرح اقل قيمة من أكبر قيمة سواء للأسطر أو الأعمدة ونتحصل على المصفوفة التالية:

		اللاعب Y		**أصغر الأرقام في الصفوف**
		Y_1	**Y_2**	
اللاعب X	**X_1**	**-2**	**4**	**6**
	X_2	**-1**	**-4**	**3**
أكبر الأرقام في الأعمدة		**1**	**8**	

نستبدل مواضع النتائج ونضع فوقها نجمة

		اللاعب Y		**أصغر الأرقام في الصفوف**
		Y_1	**Y_2**	
اللاعب X	**X_1**	**-2**	**4**	***3**
	X_2	**-1**	**-4**	***6**
أكبر الأرقام في الأعمدة		***8**	***1**	

تحديد الجزء من الوقت الذي سيخصص لكل استراتيجية من خلال قسمة كل نتيجة على المجموع:

بالنسبة للاعب y $\begin{cases} \frac{8}{9} \\ \frac{1}{9} \end{cases}$ وبالنسبة للاعب x $\begin{cases} \frac{3}{9} \\ \frac{6}{9} \end{cases}$

- ندون النتائج في الجدول بجانب الاستراتيجيات لتسهيل عملية الحساب

		اللاعب Y	
		$Y_1\left(\frac{8}{9}\right)$	**$Y_2\left(\frac{1}{9}\right)$**
اللاعب X	**$X_1\left(\frac{3}{9}\right)$**	**-2**	**4**
	$X_2\left(\frac{6}{9}\right)$	**-1**	**-4**

حساب قيمة المباراة من خلال ضرب قيمة الوقت المستغرق المتحصل عليه أعلاه في قيم الاستراتيجيات المقابلة

- $\left(\frac{3}{9}\right) \times (-2) \times \left(\frac{8}{9}\right) = -\left(\frac{48}{81}\right)$
- $\left(\frac{8}{9}\right) \times 4 \times \left(\frac{1}{9}\right) = \left(\frac{32}{81}\right)$
- $\left(\frac{6}{9}\right) \times (-1) \times \left(\frac{8}{9}\right) = -\left(\frac{48}{81}\right)$
- $\left(\frac{6}{9}\right) \times (-4) \times \left(\frac{1}{9}\right) = -\left(\frac{24}{81}\right)$

ومنه قيمة المباراة هي مجموع النتائج السابقة $V=\frac{(88)}{81} = -1.086$

التفسير:

وهذا يعني أن الفائز هوX وانه سيخصص$\left(\frac{3}{9}\right)$ من الوقت للاستراتيجية الأولى X_1 و $\left(\frac{6}{9}\right)$ من الوقت للاستراتيجية الثانية X_2

أما اللاعب Y فإنه سيخصص $\left(\frac{8}{9}\right)$ من الوقت للاستراتيجية الأولى Y_1 و $\left(\frac{1}{9}\right)$من الوقت للاستراتيجية الثانية Y_2 .

الحل: بالطريقة الجبرية: بما أن الوقت يقسم إلى قسمين كل جزء منه يخصص لإحدى الاستراتيجيتين فإن مجموع النسبتين = الواحد 1

إذا افترضنا أن الوقت المخصص للعب الاستراتيجية X_1 هو $\boldsymbol{\alpha}$ فإن ما يخصصه للاستراتيجية X_2 هو $\boldsymbol{(1-\alpha)}$

كذلك ما يخصصه اللاعب Y للعب الاستراتيجية Y_1 هو $\boldsymbol{\beta}$ فإن ما يخصصه للاستراتيجية Y_2 هو $\boldsymbol{(1-\beta)}$

$$-2\boldsymbol{\alpha}-(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{4}\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{4}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})\rightarrow\boldsymbol{\alpha}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{9}}\rightarrow(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})=\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{9}}$$

$$-\mathbf{2}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{4}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\beta})=-\boldsymbol{\beta}-\mathbf{4}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\beta})\rightarrow\boldsymbol{\beta}=\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{9}}\rightarrow(\mathbf{1}-\boldsymbol{\beta})=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}$$

بعد الحصول على النتائج ندونها في الجدول التالي:

		اللاعب Y	
		$\left(\frac{3}{9}\right)$ Y_1	$\left(\frac{6}{9}\right)$ Y_2
اللاعب X	$\left(\frac{8}{9}\right)$ X_1	**-2**	**4**
	$\left(\frac{1}{9}\right)$ X_2	**-1**	**-4**

حساب قيمة المباراة من خلال ضرب قيمة الوقت المستغرق المتحصل عليه أعلاه في قيم الاستراتيجيات المقابلة

- $\left(\frac{3}{9}\right)\times(-2)\times\left(\frac{8}{9}\right)=-\left(\frac{48}{81}\right)$
- $\left(\frac{8}{9}\right)\times 4\times\left(\frac{1}{9}\right)=\left(\frac{32}{81}\right)$
- $\left(\frac{6}{9}\right)\times(-1)\times\left(\frac{8}{9}\right)=-\left(\frac{48}{81}\right)$
- $\left(\frac{6}{9}\right)\times(-4)\times\left(\frac{1}{9}\right)=-\left(\frac{24}{81}\right)$

ومنه قيمة المباراة هي مجموع النتائج السابقة $V=\frac{(88)}{81}=-1.086$

التفسير:

وهذا يعني أن الفائز هوX وانه سيخصص$\left(\frac{3}{9}\right)$ من الوقت للاستراتيجية الأولى X_1 و $\left(\frac{6}{9}\right)$ من الوقت للاستراتيجية الثانية X_2

أما اللاعب Y فإنه سيخصص $\left(\frac{8}{9}\right)$ من الوقت للاستراتيجية الأولى Y_1 و $\left(\frac{1}{9}\right)$من الوقت للاستراتيجية الثانية Y_2 .

حل التمرين السابع:

2- **إيجاد قيمة المباراة بالطريقة الحسابية**.، بحيث نقوم بطرح اقل قيمة من أكبر قيمة سواء للأسطر أو الأعمدة ونتحصل على المصفوفة التالية:

		اللاعب Y		**أصغر الأرقام في الصفوف**
		Y_1	Y_2	
اللاعب X	X_1	**6**	**18**	**12**
	X_2	**15**	**12**	**3**
أكبر الأرقام في الأعمدة		**9**	**6**	

نستبدل مواضع النتائج ونضع فوقها نجمة

		اللاعب Y		**أصغر الأرقام في الصفوف**
		Y_1	Y_2	
اللاعب X	X_1	**6**	**18**	***3**
	X_2	**15**	**12**	***12**
أكبر الأرقام في الأعمدة		***6**	***9**	

تحديد الجزء من الوقت الذي سيخصص لكل استراتيجية من خلال قسمة كل نتيجة على المجموع:

بالنسبة للاعب X $\begin{cases} \frac{3}{15} \\ \frac{12}{15} \end{cases}$ وبالنسبة للاعب Y $\begin{cases} \frac{6}{15} \\ \frac{9}{15} \end{cases}$

- ندون النتائج في الجدول بجانب الاستراتيجيات لتسهيل عملية الحساب

		اللاعب Y	
		$\left(\frac{6}{15}\right)$ Y_1	$\left(\frac{9}{15}\right)$ Y_2
اللاعب X	$\left(\frac{3}{15}\right)$ X_1	**6**	**18**
	$\left(\frac{12}{15}\right)$ X_2	**15**	**12**

حساب قيمة المباراة من خلال ضرب قيمة الوقت المستغرق المتحصل عليه أعلاه في قيم الاستراتيجيات المقابلة

- $\left(\frac{3}{15}\right) \times (6) \times \left(\frac{6}{15}\right) = \frac{108}{225}$
- $\left(\frac{3}{15}\right) \times (18) \times \left(\frac{9}{15}\right) = \frac{486}{225}$
- $\left(\frac{12}{15}\right) \times (15) \times \left(\frac{6}{15}\right) = \frac{1080}{225}$
- $\left(\frac{12}{15}\right) \times (12) \times \left(\frac{9}{15}\right) = \frac{1296}{225}$

ومنه قيمة المباراة هي مجموع النتائج السابقة $V=(13.2)$

التفسير:

وهذا يعني أن الفائز هوX وانه سيخصص$\left(\frac{3}{15}\right)$ من الوقت للاستراتيجية الأولى X_1 و $\left(\frac{12}{15}\right)$ من الوقت للاستراتيجية الثانية X_2 .

أما اللاعب X فإنه سيخصص $\left(\frac{6}{15}\right)$من الوقت للاستراتيجية الأولى Y_1 و $\left(\frac{9}{15}\right)$ من الوقت للاستراتيجية الثانية Y_2 .

الحل: بالطريقة الجبرية: بما أن الوقت يقسم إلى قسمين كل جزء منه يخصص لإحدى الاستراتيجيتين فإن مجموع النسبتين = الواحد 1

- **إذا افترضنا أن الوقت المخصص للعب الاستراتيجية** X_1 هو $\boldsymbol{\alpha}$ فإن ما يخصصه للاستراتيجية X_2 هو $(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})$
- **كذلك ما يخصصه اللاعب Y للعب الاستراتيجية** Y_1 هو $\boldsymbol{\beta}$ فإن ما يخصصه للاستراتيجية Y_2 هو $(\mathbf{1}-\boldsymbol{\beta})$

$$\mathbf{6\alpha+15(1-\alpha)=18\alpha+12(1-\alpha)}\Rightarrow \boldsymbol{\alpha}=\left(\frac{3}{15}\right)\wedge(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})=\left(\frac{12}{15}\right)$$

$$\mathbf{6\beta+18(1-\beta)=15\beta+12(1-\beta)}\Rightarrow \boldsymbol{\beta}=\left(\frac{6}{15}\right)\wedge(\mathbf{1}-\boldsymbol{\beta})=\left(\frac{9}{15}\right)$$

- ندون النتائج في الجدول بجانب الاستراتيجيات لتسهيل عملية الحساب

		اللاعب Y	
		$\left(\frac{6}{15}\right)$ $\mathbf{Y_1}$	$\left(\frac{9}{15}\right)$ $\mathbf{Y_2}$
اللاعب X	$\left(\frac{3}{15}\right)$ $\mathbf{X_1}$	**6**	**18**
	$\left(\frac{12}{15}\right)$ $\mathbf{X_2}$	**15**	**12**

حساب قيمة المباراة من خلال ضرب قيمة الوقت المستغرق المتحصل عليه أعلاه في قيم الاستراتيجيات المقابلة

- $\left(\frac{3}{15}\right)\times(6)\times\left(\frac{6}{15}\right)=\frac{108}{225}$
- $\left(\frac{3}{15}\right)\times(18)\times\left(\frac{9}{15}\right)=\frac{486}{225}$
- $\left(\frac{12}{15}\right)\times(15)\times\left(\frac{6}{15}\right)=\frac{1080}{225}$
- $\left(\frac{12}{15}\right)\times(12)\times\left(\frac{9}{15}\right)=\frac{1296}{225}$

ومنه قيمة المباراة هي مجموع النتائج السابقة $V=(13.2)$

التفسير:

وهذا يعني أن الفائز هوX وانه سيخصص$\left(\frac{3}{15}\right)$ من الوقت للاستراتيجية الأولى X_1 و $\left(\frac{12}{15}\right)$ من الوقت للاستراتيجية الثانية X_2 .

أما اللاعب X فإنه سيخصص $\left(\frac{6}{15}\right)$من الوقت للاستراتيجية الأولى Y_1 و $\left(\frac{9}{15}\right)$ من الوقت للاستراتيجية الثانية Y_2 .

حل التمارين الثامن

- لو افترضنا أن اللاعب (X) يخصص جزء للعب الاستراتيجية X_1 يتمثل في α، وبالتالي ما يخصص للاستراتيجية X_2 هو $\alpha_1=(1-\alpha)$
- لو افترضنا أن اللاعب (Y) يخصص جزء للعب الاستراتيجية Y_1 يتمثل في β وما يخصص للاستراتيجية Y_2 هو $\beta_1=(1-\beta)$

$$2\alpha+6(1-\alpha)=x\alpha+4(1-\alpha)\Rightarrow\alpha=\frac{2}{(x)}$$

$$\alpha_1=(1-\alpha)\Rightarrow\alpha_1=\left(1-\frac{2}{(x)}\right)=\frac{(x-2)}{(x)}$$

$$2\beta+x(1-\beta)=6\beta+4(1-\beta)\Rightarrow\beta=\frac{(x-4)}{(x)}$$

$$\beta_1=(1-\beta)\Rightarrow\beta_1=\left(1-\frac{(x-4)}{(x)}\right)=\frac{4}{(x)}$$

- الآن ندون النتائج في الجدول المخصص.

		اللاعب Y	
		$\beta=\frac{(x-4)}{(x)}$	$\beta_1=\frac{4}{(x)}$
اللاعب X	$\alpha=\frac{2}{(x)}$	2	x
	$\alpha_1=\frac{x-2}{(x)}$	6	4

- $$\left(\left[(\beta)\times(1)\times(\alpha)=\left(\frac{(2)}{(x)}\right)\times(2)\times\left(\frac{x-4}{(x)}\right)=\frac{4x-16}{x^2}\right]\right)$$
- $$\left(\left[(\alpha)\times(x)\times(\beta_1)=\left(\frac{2}{(x)}\right)\times(x)\times\left(\frac{4}{(x)}\right)=\frac{8x}{x^2}\right]\right)$$
- $$\left(\left[(\alpha_1)\times(5)\times(\beta)=\left(\frac{(x-2)}{(x)}\right)\times(6)\times\left(\frac{(x-4)}{(x)}\right)=\frac{6x^2-36x+48}{x^2}\right]\right)$$
- $$\left(\left[(\alpha_1)\times(4)\times(\beta_1)=\left(\frac{(x-2)}{(x)}\right)\times(4)\times\left(\frac{4}{(x)}\right)=\frac{16x-32}{x^2}\right]\right)$$

- - بجمع كل النتائج نحصل على قيمة نتيجة المباراة (V):
- أي أن

$$(V)=\frac{4x-16+8x+6x^2-36x+48+16x-32}{x^2}=\frac{6x^2-8x}{x^2}=\frac{22}{5}\Rightarrow 30x-40=22x\Rightarrow x=5$$

ومنه قيمة (x) التي تجعل المباراة غير مستقرة (مختلطة) ولا توجد بها نقطة سرج) وتكون نتيجتها $\left\{V=\frac{22}{5}\right\}$ هي $x=5$

حل التمرين التاسع

1- طريقة (Minimax و Maximin)

- لكي نعرف المباراة مستقرة يجب أن تتوفر على نقطة سرج.

		Y اللاعب			اقل قيمة في الأسطر
		Y_1	Y_2	Y_3	
X اللاعب	X_1	-3	1	6	-3
	X_2	4	0	5	0
	X_3	3	2	3	2
اكبر قيمة في الأعمدة		4	2	6	

بما انه توجد نقطة مشتركة فإن نتيجة المباراة هي 2

إن الرقم المشترك هنا 2 وهذا يعني أن هناك نقطة سرج والمباراة مستقرة وذات استراتيجية واحدة وخالصة يلتزمها اللاعب طيلة الوقت.

- قيمة المباراة هي 2 لصالح اللاعب X (الرقم موجب) (لو كانت النتيجة سالبة فهي لصالح Y)
- الاستراتيجية المثلى للاعب X هي الاستراتيجية X_3، أما اللاعب Y فإن استراتيجيته المثلى هي Y_2.

2- طريقة الهيمنة:

		Y اللاعب		
		Y_1	Y_2	Y_3
X اللاعب	X_1	-3	1	6
	X_2	4	0	5
	X_3	3	2	3

نلاحظ ان قيم العمود الثالث (الاستراتيجية Y_3) ليس في صالح الشركة Y وانها تفضل تبني الاستراتيجية Y_2 و Y_1 والسبب هو ان الأرقام فيه اعلى او تساوي من الأرقام في أي من العمودين الاخرين، لذا فانه سيتم استبعاد هذا العمود او ان العمودين الاخرين يهيمنان عليه، وعليه فان المصفوفة ستكون كمايلي:

		Yاللاعب	
		Y_1	Y_2
X اللاعب	X_1	-3	1
	X_2	4	0
	X_3	3	2

- نلاحظ أن بقية الأسطر لا يمكن اختزالها لأنها لا يوجد فيها سطر اقل من قيم الأسطر الأخرى وبالتالي نقوم حلها بالطريقة الأولى أي وجود نقطة سرج.

		اللاعب Y		اقل قيمة في الأسطر
		Y_1	Y_2	
اللاعب X	X_1	-3	1	-3
	X_2	4	0	0
	X_3	3	2	2
اكبر قيمة في الأعمدة		4	2	

- إن الرقم المشترك هنا 2 وهذا يعني أن هناك نقطة سرج والمباراة مستقرة وذات استراتيجية واحدة وخالصة يلتزمها اللاعب طيلة الوقت.
- قيمة المباراة هي 2 لصالح اللاعب X (الرقم موجب) (لو كانت النتيجة سالبة فهي لصالح Y)
- الاستراتيجية المثلى للاعب X هي الاستراتيجية X_3 ، أما اللاعب Y فإن استراتيجيته المثلى هي Y_2.

حل التمرين العاشر:

أولا نتأكد من وجود نقطة سرج بالطريقة التي سبق وان عرفناها وبما انه لا توجد نقطة سرج فإنه نستنتج أن المباراة ذات استراتيجيات مختلطة، ولكن المباراة فيها ثلاثة استراتيجيات متاحة لكل لاعب فإننا نختصرها باتباع أسلوب الهيمنة، حيث نلاحظ أن الصف الأول هو أصغر من الصفين الثاني والثالث أي انه يستبعد وان الصفين الأخرين يهيمنان عليه وكالاتي:

الشركة X	الشركة Y	عدم القيام بحملة إعلانية Y_1	حملة إعلانية متوسطة Y_2	حملة إعلانية كبيرة Y_3
الشركة X	عدم القيام بحملة إعلانية X_1	30	20	8
	حملة إعلانية متوسطة X_2	50	30	25
	عدم القيام بحملة إعلانية X_3	55	27	30

ونتحصل على

الشركة X	الشركة Y	عدم القيام بحملة إعلانية Y_1	حملة إعلانية متوسطة Y_2	حملة إعلانية كبيرة Y_3
الشركة X	حملة إعلانية متوسطة X_2	50	30	25
	عدم القيام بحملة إعلانية X_3	55	27	30

كذلك نلاحظ ان العمود الأول (الاستراتيجية Y_1) ليس في صالح الشركة Y وانها تفضل تبني الاستراتيجية Y_2 و Y_3 والسبب هو ان الأرقام فيه اعلى من الأرقام في أي من العمودين الاخرين، لذا فانه سيتم استبعاد هذا العمود او ان العمودين الاخرين يهيمنان عليه، وعليه فان المصفوفة ستكون كمايلي:

الشركة Y / الشركة X		عدم القيام بحملة إعلانية Y_1	حملة إعلانية متوسطة Y_2	حملة إعلانية كبيرة Y_3
الشركة X	حملة إعلانية متوسطة X_2	50	30	25
	عدم القيام بحملة إعلانية X_3	55	27	30

ونتحصل على مصفوفة من نوع (2 x 2)

الشركة Y / الشركة X		حملة إعلانية متوسطة Y_2	حملة إعلانية كبيرة Y_3
الشركة X	حملة إعلانية متوسطة X_2	30	25
	عدم القيام بحملة إعلانية X_3	27	30

ويمكن حل المسألة بإحدى الطريقتين السابقتين الحسابية أو الجبرية

حل التمرين الحادي عشر:

يتضح من المصفوفة اعلاه انه لايوجد نقطة توازن ولايمكن حلها باحدى الطرق السابقة بالتالي سيلجئ اللاعب B والذي يمتلك اكثر من ستراتيجيتين إلى طريقة السيطرة وذلك باسقاط الاستراتيجيات التي تحقق للاعب (A) الكسب على الدوام وهي الاستراتيجية الاولى والرابعة وتصبح المصفوفة كما يلي:

		اللاعب B		
		Y_2	Y_3	Y_5
اللاعب A	X_1	2	-3	-15
	X_2	-20	-7	19

المباراة اعلاه لايوجد نقطة توازن ولايمكن اختزالها إلى عبارة من نوع (2*2) وبالتالي لايمكن حلها بالطرق السابقة لذا سوف نلجأ إلى تقسيم المباراة إلى مباراة فرعية من نوع (2*2) حيث يمكن تقسيمها إلى ثلاث مباراة فرعية وكما يلي:

3	
-3	-15
-7	19

2	
2	-15
-20	19

1	
2	-3
-20	-7

وبالتالي يتم حل كل تشكيلة من المباراة على خدة واختيار المباراة الفرعية التي تحقق للاعب B اعلى عوائد أي اعلى قيمة بالإشارة السالبة.

واذا كانت على سبيل المثال كل القيمة الموجبة فانه سيختار المباراة التي تحقق له اقل خسارة ممكنة.

حل التمرين الثاني عشر:

يتضح من المثال أعلاه انه لا توجد نقطة توازولا يمكن حلها بالطرق السابقة لذا يتطلب حلها بطريقة السامبلاكس

عندما يلعب A استراتيجياته المختارة، فإن اللاعب Bسوف يسعى لتقليل خسائره المتوقعة، وبالتالي تقليل قيمة المباراة

الربح المتوقع للاعب B	استراتيجية A المختارة
$4X_1+2X_2+3X_3 \leq V$	**1**
$6X_1+4X_2+7X_3 \leq V$	**2**
$1X_1+10X_2+9X_3 \leq V$	**3**

حيث ان (X_3،X_2،X_1) تساوي نسبة الوقت الذي يقضيه اللاعب (A) للعب كل استراتيجياته المختارة لتعظيم الأرباح ، واللاعب B لتقليل الخسائر، و يكون مجموع وقتها المستغرق هو الواحد الصحيح

أي $X_1+X_2+X_3 = 1$ وهي تمثل دالة الهدف اللاعب A والمعادلات في الجدول أعلاه تمثل قيود دالة الهدف

ومنه النموذج يكتب كما يلي:

$$Max(Z) = X_1+X_2+X_3 = 1$$

$$\begin{cases} 4X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq V \\ 6X_1 + 4X_2 + 7X_3 \leq V \\ 1X_1 + 10X_2 + 9X_3 \leq V \end{cases}$$

بقسمة دالة الهدف على V لكي نتخلص من القيمة المجهولة لأنه لا يمكن حلها بطريقة السمبلاكس

$$\frac{Max(Z)}{V} = \frac{X_1+X_2+X_3}{V} = \frac{1}{V}$$

$$\begin{cases} \dfrac{4X_1}{V} + \dfrac{2X_2}{V} + \dfrac{3X_3}{V} \leq \dfrac{V}{V} \\ \dfrac{6X_1}{V} + \dfrac{4X_2}{V} + \dfrac{7X_3}{V} \leq \dfrac{V}{V} \\ \dfrac{1X_1}{V} + \dfrac{10X_2}{V} + \dfrac{9X_3}{V} \leq \dfrac{V}{V} \end{cases}$$

$$\frac{Max(Z)}{V} = \frac{X_1}{V} + \frac{X_2}{V} + \frac{X_3}{V} = \frac{1}{V}$$

$$\begin{cases} \dfrac{4X_1}{V} + \dfrac{2X_2}{V} + \dfrac{3X_3}{V} \leq 1 \\ \dfrac{6X_1}{V} + \dfrac{4X_2}{V} + \dfrac{7X_3}{V} \leq 1 \\ \dfrac{1X_1}{V} + \dfrac{10X_2}{V} + \dfrac{9X_3}{V} \leq 1 \end{cases}$$

فافتراض ان $X^* = \frac{X}{V}$ بالتعويض نجد:

$\frac{Max(Z)}{V} = X_1^* + X_2^* + X_3^* = \frac{1}{V}$

$$\begin{cases} 4X_1^* + 2X_2^* + 3X_3^* \leq 1 \\ 6X_1^* + 4X_2^* + 7X_3^* \leq 1 \\ X_1^* + 10X_2^* + 9X_3^* \leq 1 \end{cases}$$

وهذا النموذج يمكن حله بطريقة السمبلاكس ونحصل على جدول الحل الأمثل من خلال الجدول الأخير التالي:

	X_1^*	X_2^*	X_3^*	S_1	S_2	S_3	BFS
Z	0	0	$\frac{25}{56}$	0	$\frac{9}{56}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{11}{56}$
S_1	0	0	$-\frac{31}{28}$	1	$-\frac{19}{28}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{11}{28}$
X_1^*	1	0	$\frac{17}{28}$	0	$\frac{17}{28}$	$-\frac{1}{14}$	$\frac{3}{28}$
X_2^*	0	1	$\frac{47}{56}$	0	$\frac{47}{56}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{5}{56}$

ومنه قيمة $Max(Z) = \frac{11}{56}$

وبما ان في المعادلة فرضنا ان $Max(Z) = \frac{1}{V} = \frac{11}{56}$ ومنه قيمة $V = \frac{56}{11} \cong 5$

أما اللاعب B فأنه يأخذ النموذج الثنائي أو المرافق وبالتالي سنحول النموذج الأصلي للنموذج المرافق وفق الشروط المتعرف علها ويمكن اختصارها في:

1- خطوات تحول النموذج الأصلي الى النموذج المرافق

الثنائية: إن لكل نموذج أصلي (primal) لدوال الهدف له نموذج مقابل أو مرفق أو ثنائي (Dual)

ويصاغ النموذج الثاني من خلال النموذج الاصلي والذي في بعض الحالات يسهل عملية الحل، وهناك خمس طرق بسيطة لتحويل النموذج الأصلي إلى النموذج الثنائي:

- اذا كانت دالة الهدف في النموذج الأولي من نوع التعظيم، تصبح في النموذج الثنائي من نوع التقليل والعكس صحيح.
- قيم عمود الثوابت في قيود النموذج الأولي تصبح معاملات لمتغيرات دالة الهدف في النموذج المقابل.
- تصبح قيم معاملات المتغيرات في معادلة دالة الهدف في النموذج الأولي قيما للكميات أو الطرف الأيمن للقيود في النموذج المقابل.
- يتم استبدال مواضع معاملات القيود في النموذج الأولي لتصبح معاملات للقيود في النموذج الثنائي.
- يتم تغيير إشارات المتباينات عكس ما هي عليه في النموذج الأولي، فاذا كانت إشارة القيد في النموذج الأولي من نوع اصغر أو يساوي يتم استبدالها بإشارة من نوع اكبر أو يساوي في النموذج المقابل
- إضافة إشارة عدم السلبية في المتغيرات الجديدة.

- عند تحويل النموذج الأولي إلى الثنائي يجب مراعاة ما يلي:
- يجب أن تكون جميع علامات القيود اكبر من أو يساوي ≤ عندما تكون دالة الهدف تعظيم Max
- يجب أن تكون جميع علامات القيود اقل من أو يساوي ≤عندما تكون دالة الهدف تعظيم Min
- اذا كانت قيود فيها = فان القيد يمكن تجزئته إلى قسمين بمترجحتين يوجد فيها ≤ و ≤ .
- إذا كانت القيود مختلفة يجب ضربها في 1- لتغير اتجاه المتراجحة حسب الهدف سواء كان تعظيم أو تدنية.

النموذج الأصلي

$$Max(Z) = X_1^* + X_2^* + X_3^*$$

$$\begin{cases} 4X_1^* + 2X_2^* + 3X_3^* \leq 1 \\ 6X_1^* + 4X_2^* + 7X_3^* \leq 1 \\ X_1^* + 10X_2^* + 9X_3^* \leq 1 \end{cases}$$

النموذج المرافق

$$Min(W) = Y_1^* + Y_2^* + Y_3^*$$

$$\begin{cases} 4y_1^* + 6y_2^* + y_3^* \geq 1 \\ 2y_1^* + 4y_2^* + 10y_3^* \geq 1 \\ 3y_1^* + 7y_2^* + 9y_3^* \geq 1 \end{cases}$$

ومنه جدول الحل الأخير للنموذج المرافق يمكن نقدمه في الجدول التالي:

	Y_1^*	Y_2^*	Y_3^*	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	BFS
Z	$-\frac{11}{28}$	0	0	$-\frac{3}{28}$	$-\frac{5}{56}$	0	-M	-M	-M	$\frac{11}{56}$
S_3	$\frac{31}{28}$	0	0	$-\frac{17}{28}$	$-\frac{47}{56}$	1	$\frac{17}{28}$	$\frac{47}{56}$	-1	$\frac{25}{56}$
Y_3^*	$-\frac{1}{14}$	0	1	$\frac{1}{14}$	$-\frac{3}{28}$	0	$-\frac{1}{14}$	$\frac{3}{28}$	0	$\frac{1}{28}$
Y_2^*	$\frac{19}{28}$	1	0	$-\frac{5}{28}$	$\frac{1}{56}$	0	$\frac{5}{28}$	$-\frac{1}{56}$	0	$\frac{9}{56}$

ومنه قيمة $Min(W) = \frac{11}{56}$

وبما ان في المعادلة فرضنا ان $Min(W) = \frac{1}{V} = \frac{11}{56}$ ومنه قيمة $V = \frac{56}{11} \cong 5$

ومنه ربح اللاعب A الممثل للنموذج (الاصلي) يعتبر خسارة للنموذج المرافق B

ملاحظة طريقة السمبلاكس غير مقررة عليهم لكن طريقة التحويل من مصفوفة العاب الى نموذج خطي ونموذج مرافق مقررة