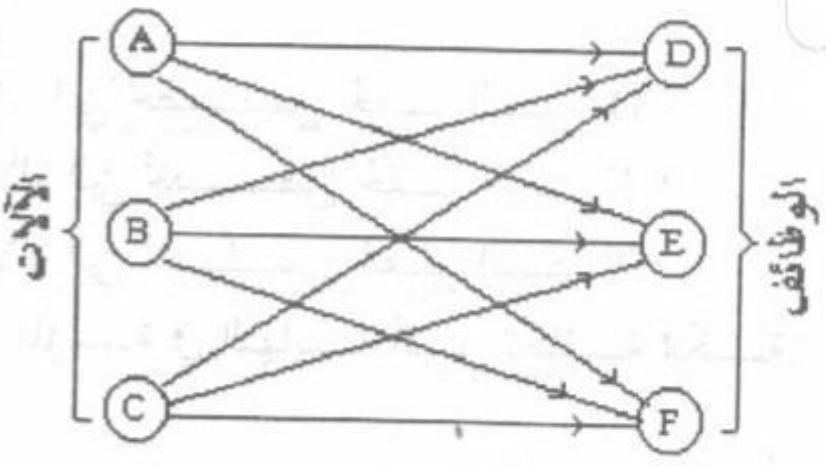
مسائل التخصيص.

تلاقي الكثير من المؤسسات خاصة مؤسسات إنجاز المشاريع مشاكل تخصيص الموارد المادية و البشرية، لإنجاز مختلف الأعمال بكفاءة عالية و مردودية إقتصادية، و مسائل التخصيص تعطي حلولا لذلك.

فإشكالية مسائل التخصيص تتلخص في كيفية توزيع مجموعة من الوظائف على مجموعة من الأشخاص، أو مجموعة من الآلات على مجموعة من المهام، بحيث يؤدي ذلك الى استخدامها بأعلى كفاءة ممكنة، مما يؤدي الى تحمل أقل التكاليف أو جني أعلى الأرباح، شريطة أن يتم تخصيص لكل وظيفة شخص واحد أو آلة واحدة فقط، و هذا يقتضي أن يكون عدد الوظائف مساو لعدد الأشخاص أو عدد الآلات.

و يمكن للشكل التالي أن يوضح ذلك، حيث أن لدينا ثلاث آلات هي A,B,C و ثلاث وظائف هي D,E,F ، بحيث يمكن لكل آلة أن تنجز أي من الوظائف الثلاث إنما بتكاليف قد تكون مختلفة و هو ما تعبر عنه مجموعة الأسهم، حيث تنطلق من كل آلة ثلاثة أسهم و تصل الى كل وظيفة ثلاثة أسهم.



شكل 1

و يمتد إستخدام مسائل التخصيص الى الكثير من المسائل الواقعية الأخرى كتخصيص عدد من الحافلات لعدد من الأحياء السكنية، أو تخصيص عدد من المقاولين لإنجاز عدد من المشاريع...الخ.

أولا : طرح المشكل: يطرح مشكل التخصيص على وجه المثال التالي:

مثال -1: مؤسسة لإنجاز الآبار لديها 3 آلات للحفر هي C, B, A ، كلفت بحفر 3 آبار هي: F, E, D في 3 مناطق مختلفة.

إن تكلفة الحفر تختلف حسب كل آلة و حسب الطبيعة الجيوفيزيائية للتربة التي يحفر فيها كل بئر، و قد بينتها الدراسة الأولية التي قامت بها مصلحة المحاسبة التحليلية بالمؤسسة كما هي موضحة في الجدول التالي:

التكلفة بآلاف الدينارات

الوظائف / الآلات	D	E	F
A	18	6	14
B	12	14	10
C	16	8	10

جدول8-1

و يكون **المطلوب** هو إيجاد أفضل تخصيص للآلات بحيث تتحمل المؤسسة أقل تكلفة ممكنة لحفر الآبار الثلاثة، بمعنى ينبغي الإجابة عن:

- ماهي الآلة التي تخصص لحفر البئر D ؟
- ماهي الآلة التي تخصص لحفر البئر E ؟
- ماهي الآلة التي تخصص لحفر البئر F؟

بحيث تتحمل المؤسسة في النهاية أقل تكلفة ممكنة.

و مسائل **التخصيص لا تهتم فقط بتدنئة التكاليف، إنما أيضا بالبحث عن أفضل تخصيص من شأنه تعظيم الأرباح أو العوائد.**

ثانيا: طرق حل مسائل التخصيص: هناك عدة طرق لحل مثل هذه المسائل، سوف نتطرق لثلاث منها و هي:

- طريقة الحصر الإحتمالي (تسمى أيضا طريقة العد الكامل).
- الطريقة الهنغارية.
- طريقة النقل.

و تستخدم هذه الطرق سواء في **تخفيض تكاليف التخصيص أوفي تعظيم الأرباح أو العوائد إنما بمنطقين متعاكسين.**

1- تخفيض التكاليف: يتم ايجاد الحل بإحدى الطرق التالية:

أ- طريقة الحصر الإحتمالي: في هذه الطريقة نحدد كل إحتمالات التخصيص الممكنة بحيث يتم تخصيص لكل وظيفة شخص واحد أو آلة واحدة، و يكون عدد التخصيصات الممكنة مساو الى مضروب عدد الوظائف، فإذا فرضنا أن عدد الوظائف هو N و هو بنفس حجم عدد الآلات فإن عدد إحتمالات التخصيصات الممكنة هو N! حيث :

$$N!=N(N-1).(N-2).(N-3)....(N-(N-1))$$

ثم نحدد هذه التخصيصات و نحسب تكاليف كل توزيع ثم نأخذ التخصيص الذي يكلف أقل ما يمكن.

مثال -2: أوجد حل مسألة التخصيص الواردة في المثال السابق -1 بطريقة الحصر الإحتمالي.

من المسألة نجد أن عدد الوظائف يتساوى مع عدد الآلات ويساوي 3، لذلك فإن الإحتمالات الممكنة هي: $3\times2\times1=6$.

وهذه الإحتمالات هي:

1- (A,D), (B,E), (C,F).
2- (A,D), (B,F), (C,E).
3- (B,D), (A,E), (C,F).
4- (B,D), (A,F), (C,E).
5- (C,D), (A,E), (B,F).
6- (C,D), (A,F), (B,E).

أي أن الإحتمال الأول مثلا هو أن نخصص الآلة A للوظيفة D، و نخصص الآلة B للوظيفة E و الآلة C للوظيفة F.
و على نفس المنوال تفسر بقية الإحتمالات.
لاحظ أننا تفادينا إعطاء أكثر من وظيفة لكل آلة.
بعد تحديد الإحتمالات الممكنة نقوم بحساب تكلفة كل إحتمال يمكن إختياره و ذلك كما يلي:

رقم الإحتمال	الإختيارات	تكاليف كل إختيار/ 10^3 دج
1	(A,D), (B,E), (C,F).	18+14+10=42
2	(A,D), (B,F), (C,E).	18+10+8=36
3	(B,D), (A,E), (C,F).	12+6+10=28
4	(B,D), (A,F), (C,E).	12+14+8=34
5	(C,D), (A,E), (B,F).	16+6+10=32
6	(C,D), (A,F), (B,E).	16+14+14=44

جدول -2

من تكاليف الاختيارات نأخذ أقل تكلفة و يكون الاختيار الأمثل هو الاختيار المقابل لتلك التكلفة، و في مثالنا أقل تكلفة هي 28 ألف دينار و بالتالي فإن الاختيار الثالث هو الأحسن وبذلك يكون التخصيص على النحو التالي:

- الآلة B تنجز البئر D بتكلفة تقدر بـ:12000دج.
- الآلة A تنجز البئر E بتكلفة تقدر بـ:6000 دج.
- الآلة C تنجز البئر F بتكلفة تقدر بـ: 10000دج.

و كما هو واضح في العمود الثالث من جدول الإختيارات السابق، فإن التكلفة الإجمالية الدنيا التي تتحملها المؤسسة عبارة عن مجموع تكاليف كل تخصيص، أي:

$$Z=12000+6000+10000=28000$$

و يكون هذا هو أحسن تخصيص ممكن.

ب- الطريقة المنغارية: سميت بهذه الطريقة نسبة الى الرياضي المجري د. كوهن KUHN ، و لإيجاد أفضل تخصيص بهذه الطريقة يتم إتباع المنهجية التالية:

بعد تعيين مصفوفة التكاليف و وضعها في جدول نتبع خطوات المراحل التالية:

المرحلة الأولى: ايجاد الأصفار: حيث نوجد ما يسمى **بمصفوفة تكلفة الفرصة** و ذلك كما يلي:

- نأخذ أقل تكلفة في كل صف ونطرحها من تكاليف ذلك الصف، فيتحول الرقم المقابل لأقل تكلفة الى الصفر، ونحصل على جدول جديد، مصفوفته تسمى **بمصفوفة المراجعة الأولية.**

- من الجدول الجديد نأخذ أقل رقم من كل عمود ونطرحه من أرقام ذلك العمود، فيتحول الرقم المقابل لأقل رقم في العمود الى الصفر، و نحصل على جدول جديد، مصفوفته تسمى **بمصفوفة تكلفة الفرصة الكلية.**

المرحلة الثانية: البحث عن حل أمثل: من الجدول المحصل عليه من المرحلة السابقة نبحث عن حل بحيث تكون فيه التكاليف الكلية معدومة، حيث نقوم بتأطير الأعمدة و الصفوف التي تحتوي على أصفار بأقل عدد ممكن من الإطارات الأفقية أو العمودية أو هي معا، فإذا كان عدد الإطارات المحصل عليها سواء الأفقية أو العمودية **مساويا** لعدد

الصفوف أو الأعمدة، فإننا نكون قد تحصلنا على الحل الأمثل، و عليه نقوم بعملية التخصيص و ذلك بأن نأخذ الأصفار التي تقع على إطارات الصفوف و الأعمدة لأن هذه الأصفار تمثل أقل التكاليف، حيث نقوم بعملية التخصيص على أساسها بإعطاء وظيفة واحدة لكل آلة أو وظيفة واحدة لكل شخص. إذا كان هذا ممكنا نكون قد توصلنا الى الحل الأمثل وإلا ننتقل الى المرحلة الثالثة.

المرحلة الثالثة: إذا كان عدد الأطر التي تغطي الأصفار أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة، فإنه لا يمكن القيام بكل التخصيصات، و لأجل ذلك نقوم بإختيار أقل قيمة من القيم غير المؤطرة و نطرحها من كل القيم غير المؤطرة و نضيفها الى نقاط التقاطع للأطر. (لاحظ أن مكان هذه القيمة يصبح صفرا).

المرحلة الرابعة: نعود الى المرحلة الثانية و هذا حتى يصبح عدد الإطارات المحصل عليها مساويا لعدد الوظائف و حينها نقوم بعملية التخصيص.

ملاحظة: يمكن أن نحصل على عدد من الحلول بنفس التكاليف الدنيا.

مثال -3: قم بتخصيص الآلات C, B, A للقيام بالوظائف 1، 2، 3 إذا علمت أن تكاليف قيام كل آلة بكل وظيفة محددة في الجدول التالي:

تكاليف التخصيص بآلاف الدينارات

الوظائف / الآلات	1	2	3
A	13	7	14
B	9	7	7
C	5	10	12

جدول -3

نقوم باتباع الخوارزمية خطوة خطـــوة و علـــى الوجـــه التـــالي:

- أقل قيمة في الصـــــف الأول هـــي:7
- أقل قيمة في الصف الثـــــاني هـــي:7
- أقل قيمة في الصـــف الثـــالث هـــي:5

بطرح كل قيمـــة مـــن هـــذه القيـــم مـــن الصـــف الـــذي تنتمـــي اليـــه نحصل على الجـــدول التـــالي:

الوظائف / الآلات	1	2	3
A	6	0	7
B	2	0	0
C	0	5	7

جدول -4

من الجدول الجديـــــد:

- أقل قيمة في العمـــــود الأول هـــي:0
- أقل قيمة في العمود الثـــــاني هـــي:0
- أقل قيمة في العمـــود الثـــالث هـــي:0

وعليه لا يحدث أي تغيـــير علـــى مســـتوى الأعمـــدة.

و يمكن تأطير الأصفار كمـــــا يلـــي:

الوظائف / الآلات	1	2	3
A	6	0	7
B	2	0	0
C	0	5	7

جدول -5

بما أن أقل عدد مـــــن الإطـــارات المحصـــل عليـــها يســـاوي 3 و يســـاوي عـــدد الآلات و عـــدد الوظـــائف، لذلـــك فـــإن هـــذا الجـــدول هـــــو الجدول الذي يمكن التخصيـــــص علـــى أساســـه، بإعطـــاء آلـــة واحـــدة لكل وظيفة، و عليه فإن التخصيـــص الأمثـــل يكـــون كمـــا يلـــي:

- **في الصف الأول** هناك صفر وحيد (A,2)، و عليه نخصص الآلة A للوظيفة2 بتكلفة 7. و نشطب كل أصفار العمود الثاني، فلا يمكن تخصيص الآلة B للوظيفة 2 ، لأن هذه الوظيفة خصصت لها الآلة A.

- **في الصف الثاني** هناك صفر واحد غير مشطب (B,3) على أساسه نخصص الآلة B للوظيفة3 و بتكلفة 7.

- **في الصف الثالث** هناك صفر واحد (C,1) على أساسه نخصص الآلة C للوظيفة الأولى و بتكلفة 5.

و نكون بذلك قد خصصنا لكل وظيفة آلة واحدة فقط، و عليه تتحمل المؤسسة أقل تكلفة أي :

$$Z=7000+7000+5000=19000$$

أي أن أقل تكلفة للتخصيص هي 19000 دينار.

مثال8-4: بالطريقة الهنغارية أوجد حل للمثال8-1

جدول تكاليف التخصيص للمثال المشار اليه هو:

جدول التكاليف بآلاف الدينارات

وظائف / آلات	D	E	F
A	18	6	14
B	12	14	10
C	16	8	10

جدول8-6

يتم اتباع الخوارزمية على النحو التالي:

- أقل قيمة في الصف الأول هي:6
- أقل قيمة في الصف الثاني هي:10
- أقل قيمة في الصف الثالث هي:8

بطرح كل قيمة من هذه القيم من الصف الذي تنتمي اليه نحصل على الجدول التالي:

	D	E	F
A	12	0	8
B	2	4	0
C	8	0	2

جدول8-7

من الجدول الجديـــــد:

- أقل قيمة في العمـــــود الأول هـــي:2
- أقل قيمة في العمود الثـــــاني هـــي:0
- أقل قيمة في العمـــود الثـــالث هـــي:0

و عليه فإن الجدول الثـــــاني هـــو:

	D	E	F
A	10	0	8
B	0	4	0
C	6	0	2

جدول8-8

و عليه يمكن تأطير الأصفار كما يلي:

وظائف / آلات	D	E	F
A	10	0	8
B	0	4	0
C	6	0	2

جدول8-9

بما أن أقل عدد من الإطارات المحصل عليها يساوي 2 و هو لا يساوي عـــــدد الآلات و عدد الوظائف، لذلك فإن هذا الجدول لا يتيح إمكانية التخصيص.

لذلك نختار أقل رقم من بين الأرقام خـــارج الأطـــارين و هـــو 2 ونطرحـــه من كل الأرقام خارج هذين الإطارين و نضيفه الى الرقـــم الـــذي يتقاطعـــا عنده و هو 4، وبذلك نحصل على الجدول الجديـــد التـــالي:

	D	E	F
A	8	0	6
B	0	6	0
C	4	0	0

جدول -10

و عليه فإن التأطير الجديد هو:

وظائف / آلات	D	E	F
A	8	0	6
B	0	6	0
C	4	0	0

جدول -11

و يلاحظ أن عدد الإطارات أصبحت مساوية لعدد الآلات وعدد الوظائف لذلك فإن هذا الجدول يتيح إمكانية التخصيص الأمثلي، و منه نعطي التخصيص التالي:

- **من الصف الأول** نأخذ (A,E) و نخصص الآلة A للوظيفة E بتكلفة تقدر بـ 6000 دج (نشطب الأصفار الموجودة في نفس السطر أو العمود).- **من الصف الثاني** نأخذ (B,D) ونخصص الآلة B للوظيفة D بتكلفة تقدر بـ 12000 دج (نشطب الأصفار الموجودة في نفس السطر أو العمود)، يلاحظ أنه لا يمكن أخذ (B,F) لأنه في هذه الحالة سوف لن نجد ما نخصصه للآلة C.

- **من الصف الثالث** نأخذ (C,F) و نخصص الآلة C للوظيفة F بتكلفة تقدر بـ 10000 دج.

و بذلك تكون أدنى تكلفة ممكنة لهذا التخصيص هي:

$$Z=6000+12000+10000=\mathbf{28000}$$

و هي نفس التكلفة الدنيا المحصل عليها باستعمال طريقة الحصر الاحتمالي.

ج- **طريقة النقل:** يمكن إستخدام طريقة مسائل النقل في إيجاد أحسن تخصيص، و ذلك ببناء جدول للنقل يحتوي على التكاليف و التي هي تكاليف التخصيص، غير أن كميات العرض و كميات الطلب لكل سطر و عمود يجب أن نضعها مساوية للواحد، و يكون بذلك مجموع العرض مساويا لمجموع الطلب و مساويا لعدد المهام، ثم نوجد الحل الأساسي الأول بطريقة التكلفة الدنيا (مستحسن)، أو أية طريقة أخرى تماما كما تم العمل في مسائل النقل، غير أنه ينبغي في هذه الحالة الحرص على عدم الوقوع في حالة التفكك لكون الكثير من الأسطر و الأعمدة تتشبع في نفس الوقت، و في هذه الحالة نحرص على تشبيع إما السطر أو العمود، و نبقي قيمة صغيرة ε لنتعامل معها و كأنها عدد و نهملها عند الوصول الى الحل الأمثل.

مثال -5: بطريقة النقل – التكلفة الدنيا- أوجد حل لبرنامج التخصيص الوارد في المثال -1.

جدول تكاليف التخصيص المشار اليه هو:

	D	E	F
A	18	6	14
B	12	14	10
C	16	8	10

جدول -12

لإيجاد الحل بطريقة مسائل النقل نقوم بتشكيل جدول النقل أولا، حيث نجعل كميات العرض و الطلب على مستوى كل سطر و عمود مساوية للواحد، و نضع التكاليف في الزوايا العلوية اليمنى لكل خلية، تماما كما فعلنا في مسائل النقل، وبذلك نحصل على جدول النقل التالي:

	D	E	F	a_i
A	18	6	14	1
B	12	14	10	1
C	16	8	10	1
b_j	1	1	1	3

جدول -13

بعد تكوين جدول النقل نقوم بإيجاد الحل الأساسي الأول بطريقة التكلفة الدنيا فنحصل على الجدول التالي:

	D	E	F	ai
A	18 ε	6 1	14 /	1
B	12 ε_1	14 /	10 1	1
C	16 1	8 /	10 /	1
b_i	1	1	1	3

جدول -14

يظهر في الجدول أعلاه الحل الأساسي الأول بطريقة التكلفة الدنيا ، و يلاحظ أنه حرصا على عدم تفكك الحل أي ضرورة تحقق شرط m+n-1 من الخلايا الداخلة في الحل و لأجل ذلك تمت الاستعانة بـ ε تماما كما تم شرح ذلك في الفصل الخاص بمسائل النقل- حالة التفكك.

و يتم بعد هذا إختبار الحل إذا كان أمثلا أم لازال قابلا للتحسين إما بأسلوب التخطي أو أسلوب التوزيع المعدل، وسنختار هنا الأسلوب الأول، حيث نجد التكاليف الحدية للخلايا غير الداخلة في الحل كما يلي:

$\sigma_{AF}=14-10+12-18=-2$
$\sigma_{BE}=14-12+18-6=14$
$\sigma_{CE}=8-6+18-16=4$
$\sigma_{CF}=10-10+12-16=-4$

بما أن ليس كل التكاليف الحدية غير سالبة لذلك فإن هذا الحل هو حل غير أمثل، و الخلية التي تدخل الى الحل هي CF لأن $\sigma_{CF}=-4$ أي أن إدخال هذه الخلية للحل سوف يؤدي الى إنخفاض التكاليف الكلية بمقدار 4 وحدات نقدية لكل وحدة كمية، و عليه فبإجراء التحويلات على مسار هذه الخلية نحصل على جدول الحل الثاني و هو:

	D	E	F	ai
A	18 (ε)	6 (1)	14	1
B	12 (1)	14	10 (ε1)	1
C	16	8	10 (1)	1
bj	1	1	1	3

جدول -15

لإختبار هذا الحل نبحث عن التكاليف الحدية فنجد:

$\sigma_{AF}=14-10+12-18=-2$
$\sigma_{BE}=14-12+18-6=14$
$\sigma_{CD}=16-12+10-10=4$
$\sigma_{CE}=8-10+10-12+18-6=8$

نلاحظ أن الحل لازال قابلا للتحسين، حيث يتطلب إدخال الخلية AF للحل لتنخفض التكاليف بـ 2 وحدة نقدية لكل وحدة كمية، حيث تصبح كل التكاليف الحدية موجبة، ويكون الحل حلا أمثلا، بحذف الأحرف المساعدة نحصل على جدول الحل الأمثل للتخصيص بطريقة مسائل النقل و هو على النحو التالي:

	D	E	F
A	18	6 ①	14
B	12 ①	14	10
C	16	8	10 ①

جدول8-16

و يعني هذا أن أمثل تخصيص هو التالي:

- الآلة A تخصص للعمل E بتكلفة 6000 دج.
- الآلة B تخصص للعمل D بتكلفة 12000 دج.
- الآلة C تخصص للعمل F بتكلفة 10000دج.

و هذا بتكلفة تخصيص إجمالية دنيا تقدر بـ: 28000دج، وهي نفس التكلفة المحصل عليها باستعمال الطريقتين الأخريتين.