نظرية الألعاب (المباريات)

مباراة: تشير إلى مواقف التنافس أو الصراع بين الخصوم ذوي الأهداف المتعارضة. وكل لاعب يمتلك مجموعة من الاستراتيجيات المتاحة التي تكون معروفة لدى الخصم لكن أي منهما لا يعرف بالضبط الاستراتيجية التي سوف يستخدمها اللاعب المنافس تجاه الآخر.

الخطة (أو الاستراتيجية) Strategy: هي مجموعة من البرامج التي يتم من خلالها تحقيق أهداف جهة معينة في تعظيم أرباحها أو تدني خسائرها.

مفهوم نظرية الألعاب: يتلخص المفهوم بوجود لعبة محددة أو مباراة لها هدف نهائي يسعى من أجله كل لاعب ومن خلال مراحل خاصة يتم اختيارها حسب قوانين اللعب وأسلوب اللعبة.

اللاعب: هو وحدة مستقلة لاتخاذ القرار حيث يمكن أن يكون فرد أو جماعة تتمثل في مؤسسة.

الخطوة: هي النقطة التي يتوجب فيها على اللاعب اتخاذ قرار لاختيار البديل وهناك نوعين من الخطوة

خطوة شخصية: اختيار مدروس وواعي لأحد البدائل المتاحة أمام اللاعب (المعلومات كاملة المطروح)

خطوة عشوائية: اختيار غير واعي (تخضع للاحتمالات (معلومات غير كاملة) الدومينو

الاستراتيجيات نوعان:

استراتيجية بسيطة (صرفة): يمارسها اللاعب طوال الوقت بنفس طريقة اللعب طوال الوقت.
(نفس المعيار القراري).

استراتيجية مختلطة أو (مركبة): هي المعيار القراري الذي يحدد التصرف الذي يجب أن يسلكه اللاعب بالاعتماد على مجموعة من الاحتمالات أي التوزيع الاحتمالي الذي يخصص احتمالات محددة لاختيار كل من الاستراتيجية البسيطة.

لعبة - ذات شخصين ومجموع صفر.

هي لعبة ...

* تصنيف المباريات *

حسب الحظ والمهارة
- مباراة الحظ.
- مباراة المهارة
- مباراة الحظ والمهارة

حسب الحصيلة أو النتيجة
- مباراة صفرية الحصيلة.
- مباراة غير صفرية الحصيلة.

حسب عدد المشاركين
- مباراة ثنائية.
- مباراة متعددة الأطراف

حسب عدد الاستراتيجيات
- لعبة محددة.
- لعبة مستمرة.

لعبة ذات شخصين ومجموع صفري

هي لعبة تتطلب طرفين نزاع. وان مجموع ما يخسره أحد الطرفين يساوي مجموع ما يربحه الطرف الثاني.

ويصنف هذا النوع حسب عدد الاستراتيجيات التي تمتلكها اللاعب.

مثلا إذا كان اللاعب الأول يمتلك استراتيجيتان واللاعب الثاني ثلاث استراتيجيات نقول ان اللعبة تتم وفق الشكل $\underrightarrow{(2\times3)}$

إذا كان اللاعب الأول يمتلك 5 استراتيجيات واللاعب الثاني يملك 4 استراتيجيات نقول اللعبة تتم وفق الشكل (5×4)

تعميم

اللاعب الأول يتصرف ب m استراتيجية، والثاني ب n استراتيجية.

إذا إختار اللاعب الأول الاستراتيجية I $(I=1,2---m)$

" " الثاني " J $(J=1,2---n)$

عندئذ ربح اللاعب الأول وبالتالي خسارة اللاعب الثاني يساوي a_{ij}

تدعى المصفوفة $[a_{ij}]$ مصفوفة المدفوعات أو الأرباح أو العائد.

وهي تأخذ الشكل التالي:

الاستراتيجية I \ J اللاعب الثاني B	1	2	----	J	---	n
اللاعب الأول A — 1	a_{11}	a_{12}	---			a_{1n}
2	a_{21}	a_{22}	---	...		a_{2n}
I	a_{i1}	a_{i2}		a_{ij}		a_{in}
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}		a_{mn}

لنعتبر أن اللاعب الأول A هو اللاعب الناجح أو الرابح وأن اللاعب الثاني B هو الخاسر
وأن المصفوفة $[a_{ij}]$ تعبر عن ربح اللاعب A عندما اذا كانت $a_{ij} > 0$
وتعبر عن خسارته اذا كانت أصغر من الصفر أي $a_{ij} < 0$
بينما بالنسبة للاعب الثاني فإذا كانت $a_{ij} > 0$ تعبر عن خسارته
$a_{ij} < 0$ تعبر عن ربحه

أي اذا استخدم اللاعب A الاستراتيجية i واستخدم اللاعب B الاستراتيجية j عندئذ
نقول أن اللاعب B سيدفع الى اللاعب A ما قيمته a_{ij} اذا كانت (بشرط) $a_{ij} > 0$
بينما يدفع اللاعب A الى اللاعب B ما قيمته a_{ij} اذا كانت (بشرط) $a_{ij} < 0$

مثال لنأخذ اللعبة التالية بين شخصين ومجموع صفري المعطاة بالمصفوفة التالية:

		اللاعب B		
	الاستراتيجية	1	2	3
اللاعب A	1	18	2	0
	2	16	3	10
	3	5	4	5
	4	16	3	2

ملاحظة: نقول عن لعبة أنها عادلة إذا كانت قيمة اللعبة مساوية الصفر ونقول
عندئذ ان اللعبة تحقق مبدأ تكافؤ الفرص بالنسبة للاعبين.
ونقول ان اللعبة لصالح A إذا كانت قيمتها موجبة
" " " لصالح B " " سالبة

مثال 02:

نفترض أن هناك مشروعين A و B يتنافسان في سوق منتجات معين حيث يعرض كل منهما ثلاث منتجات في السوق، حيث تعتبر منتجات كل من المشروعين بدائل كاملة لمنتجات الآخر، نفترض أن المشروع الأول A تتجه لدراسة السوق والتعرف على أذواق المستهلكين، وجد أنه يستطيع تقديم منتج رابع متطور يمكن أن يؤدي إلى زيادة في نصيبه من السوق بمقدار 10% من الحجم الكلي للسوق. إذا لم يتخذ المشروع الثاني B تصرف مضاد، أما إذا قام بتصرف مضاد (تقديم منتج جديد) فإن الزيادة في نصيب المشروع الأول A سوف تقتصر على 4%، أما إذا قدم المشروع الثاني B منتج جديد بينما لم يقدم المشروع الأول A بتقديم منتجه فإن المشروع الأول يخسر 6% من نصيبه الحالي في السوق.

المطلوب:

- ما هي الاستراتيجية المفضلة والتي يجب على المشروع الأول اتباعها في ظل هذه الظروف؟

- ما هي استراتيجية المشروع الأول A المثلى لمقابلة هوا المشروع الثاني B حتى تتحصل إدارته بالرشد الاقتصادي فقط.

الحل

- يمكن تلخيص بيانات المثال كالتالي:

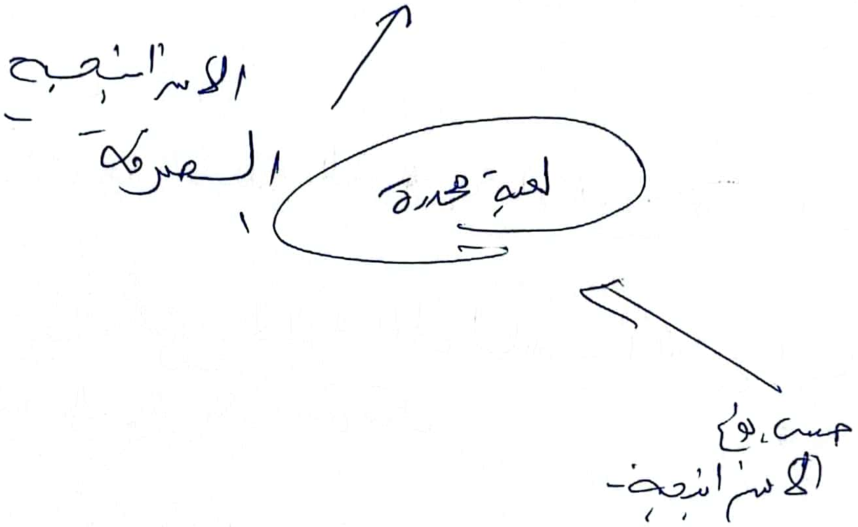
الاستراتيجية		المشروع B: تقدم 1	لا يتقدم 2
المشروع A	1 يقدم	4%	10%
	2 لا يقدم	-6%	0% تكافؤ الفرص

← أفضل استراتيجية للمشروع الأول A هي الاستراتيجية الأولى أي يقدم المنتج الرابع لأنه في كل الأحوال سيحصل على زيادة أقصاها 10% وأدناها 4% كنصيب في السوق.

أما الاستراتيجية الثانية فأقصى ما تقدمه هو 0% بينما أدنى ما يمكن أن يتحصل عليه هو -6%

ولكن المشروع الثاني B ليس أقل كفاءة، فإذا انعدم الطلب فإن أقل ما سيحصل هو 4% بينما قد يحصل على زيادة قدرها 16% من وضعيته الحالي. هذا إذا اختار الاستراتيجية I
أما إذا فضل الاستراتيجية الثانية فإن خسارته تكون في حدود 10% بينما انخفاض الحالة 5% ومنه فإن احتماله على زيادة الطلب أفضل من أن لا يتقدم ويخسر 10%.

ومنه فإن قراره (المشروع الثاني) متعلق بقرار أو استراتيجية المشروع A نسبية 10% كاحتمال بينما قرار (المشروع الأول A) الاستراتيجية الأولى أكيد وبصفة مطلقة.



خوارزمية حل الألعاب ذات الشخصين ومجموع صفري.

هناك طرق كثيرة وأساليب متعددة لحل هذا النوع من الألعاب.

وسنختصر على التالي:

المرحلة الأولى: إيجاد الاستراتيجية البسيطة ونقاط التعادل

توجد ألعاب يستطيع فيها كل لاعب أن يختار استراتيجية بسيطة تضمن له عائد معيناً بغض النظر عن سلوك الخصم.

إذا فرضنا أن اللاعب A اختار الاستراتيجية i فإنه يضمن حصوله على الأقل على $\min_j$ وبما أنه حر في اختيار الاستراتيجية، فإنه سيختار الاستراتيجية التي تضمن له أن يحصل على الأقل على.

$$\max_i \min_j a_{ij} \quad ----(1)$$

وبالمثل فإن اللاعب B (الخصم الذكي نفس اللاعب A) يتوقع باختياره الاستراتيجية أن يحصل على الأقل على.

$$\max_j \min_i (a_{ij}) \quad ----(2)$$ أكبر القيم الصغرى

(عندما ربح فهو يبحث على الأقل واحد منهما.)

نقول أن اللاعب الثاني يضمن أن يحصل على الأقل على

استراتيجية $\longrightarrow$ $\min_j \max_i (a_{ij})$ أصغر القيم العظمى

معادلة ساهية.

(عندما خسارة يحاول الحصول على أدنى الخسائر)

- وهنا نتوصل مما سبق أن:

أن اللاعب A يضمن أن يحصل على الأقل على $\max_i \min_j (a_{ij})$ أي أنه اعتمد على معيار أكبر القيم الصغرى في اختيار الاستراتيجية البسيطة.

- اللاعب B يستطيع منع اللاعب A من الحصول على أكثر من $\min_j \max_i (a_{ij})$ أي أنه إعتمد معيار أصغر القيم العظمى في اختيار الاستراتيجية البسيطة.

وبشكل عام نلاحظ أن

$$\max_i \min_j (a_{ij}) \leq \min_j \max_i (a_{ij})$$

إذاً ـــــه لا يمكن ان تكون أمام الحالة المعاكسة

$$\max_i \min_j (a_{ij}) > \min_j \max_i (a_{ij})$$

لأن هذا يعني أن اللاعب A يستطيع أن يجعل ربحه على الأقل $\max \min a_{ij}$
ويستطيع اللاعب B جعل ربح A أقل تماماً من $\min_j \max_i (a_{ij})$

قانون أدنى الأقصيات و أقصى الأدنيات وقيمة المباراة

إذا لدينا بالنسبة لمجموعة الاستراتيجيات البسيطة المعايارين التاليين :

$$\left.\begin{aligned} \min\max[a_{ij}] &= \min_j \max_i (a_{ij}) \\ \max\min[a_{ij}] &= \max_i \min_j (a_{ij}) \end{aligned}\right\}$$

فإذا تحقق الشرط التالي :

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = V$$

V : نتيجة المباراة.

عندئذ نقول أن المصفوفة $A=[a_{ij}]$ نقطة استقرار، بمعنى آخر أن اللاعب الأول A يمكن ان يختار استراتيجية i_0 تمكنه من أن يحصل على الأقل على V وان اللاعب B يمكن أن يختار استراتيجية j_0 تضمن له أن اللاعب الأول A سوف لن يحصل على أكثر من V

وبذلك نقول أن الزوج من الاستراتيجيات (i_0, j_0) تشكل نقطة توازن للعبة. ونقول أن اللعبة التي تحتوي نقطة توازن بأنها لعبة مستقرة ومحددة بدقة والاستراتيجيات المقابلة لهذه النقطة هي خطط الأقل خسارة لكلا اللاعبين.

خلاصة:

1- الشرط اللازم والكافي لكي تكون للعبة نقطة توازن هو وجود عنصر في مصفوفة العائد يمثل في نفس الوقت أصغر قيمة في السطر وأكبر قيمة في العمود.

مثال: لتكن لدينا مصفوفة العائد التالية:

الاستراتيجيات		اللاعب B 1	2	3
اللاعب A	1	-1	6	-2
	2	2	4	6
	3	-2	-6	12

الحل

الاستراتيجيات		اللاعب B 1	2	3	min
اللاعب A	1	-1	6	-2	-2
	2	2	4	6	2
	3	-2	-6	12	-6
max(aij)		2	6	12	

$\max\min a_{ij} = 2$

$\min\max(a_{ij}) = 2$

إن من مصلحة اللاعب A اختيار الاستراتيجية 2

" " B " " الاستراتيجية 1

A B

$\min\max a_{ij} = V \Rightarrow \boxed{V = 2}$ ومنه نقطة التوازن

اللعبة مستقرة ومحددة

- المرحلة الثانية:

إذا كانت مصفوفة لا تحتوي نقطة توازن

$$\max_i \min_j a_{ij} \neq \min_j \max_i (a_{ij})$$

عندئذ فإن كل لاعب سيلجأ إلى إختيار مزيجاً من الاستراتيجيات وبنسب محددة أي أن كل لاعب سيستخدم ما يسمى **بالاستراتيجية المركبة** وهي التوزيع الاحتمالي الذي يبين الاحتمالات عدد لكل استراتيجية بسيطة وقيمة اللعبة تكون محصورة في المجال:

$$\max_i \min_j (a_{ij}) \leq V \leq \min_j \max_i (a_{ij})$$

وهنا نميز حالتين:

1) إذا كانت المصفوفة مؤلفة من $(m \times n)$ ⟸ المرحلة الرابعة

2) " " مصفوفة اللعبة من الشكل (2×2) ⟸ المرحلة الثالثة.

المرحلة الثالثة: المصفوفة من الشكل $(2*2)$

الاستراتيجيات	اللاعب B: H 1	(1-H) 2
اللاعب A: P 1	a_{11}	a_{12}
(1-P) 2	a_{21}	a_{22}

إذا كان اللاعب A يريد ان يزيد من ربحه إلى أعظم قيمة ممكنة سيختار الاستراتيجية الاولى بإحتمال P أو الثانية بإحتمال $(1-P)$ $(P+(1-P)=1)$

عندئذ فإن الاستراتيجية المركبة للاعب A هي $(P,(1-P))$

أما اللاعب B فيريد أن ينقص من خسارته سيختار إما الاستراتيجية الاولى بإحتمال H أو الثانية بإحتمال $1-H$ $(H+(1-H))$

* وبالتالي فإن العائد المتوقع للاعب A عندما يلعب اللاعب B بالاستراتيجية الاولى فقط هو:

$$U_1 = P a_{11} + (1-P) a_{21}$$

* وبالتالي فإن العائد المتوقع للاعب A عندما يلعب اللاعب B بالاستراتيجية الثانية

$$U_2 = P a_{12} + (1-P) a_{22}$$

أما إذا لعب اللاعب B الاستراتيجية البسيطة الأولى باحتمال H والثانية باحتمال $(1-H)$ عندئذ فإن العائد المتوقع للاعب A سيكون

$$V = H\,U_1 + (1-H)\,U_2$$

وهي كمية محصورة بين U_1 و U_2 (وذلك لأن $H+(1-H)=1$) ($H, 1-H \geq 0$)

ولحساب وتحديد كلا من P و $1-P$ يجب أن تتساوى العلاقتين U_1 و U_2

أي

$$P\,a_{11} + (1-P)\,a_{21} = P\,a_{12} + (1-P)\,a_{22}$$

وبما أن $1 = [P + (1-P)]$ ومنه

إحتمال ان يلعب اللاعب A الاستراتجية الأولى

$$P = \frac{a_{22} \cancel{+} a_{21}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})}$$

احتمال ان يلعب اللاعب A الاستراتجية الثانية.

$$1-P = \frac{a_{11} - a_{12}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})}$$

وقيمة اللعبة تحسب من تعويض P، $1-P$ في إحدى العلاقتين U_1 . U_2

$$V^* = \frac{a_{22}\,a_{11} - a_{12}\,a_{21}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})}$$

وبنفس الطريقة نجد أن مسالك اللاعب B ، الذي يريد أن يخفض خسارته إلى أقل قيمة ممكنة، يتعين عليه استخدام الاستراتيجية المركبة $(H, 1-H)$

$$H = \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$1-H = \frac{a_{11} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

وقيمة اللعبة ستكون

$$V^* = \frac{(a_{11}\, a_{22}) - (a_{12}\, a_{21})}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

وهي نفس النتيجة السابقة.

خلاصة

عندما نكون أمام لعبة ذات شخصين ومجموع صفري من الشكل (2×2) لا تحتوي نقطة توازن أو استقرار، عندئذ سيختار كل لاعب مزيجا من الاستراتيجيات بنسب محددة $P, (1-P)$ و $H, (1-H)$ وقيمة اللعبة نحددها V^*

مثال : لتكن لدينا اللعبة التالية

اللاعب A \ اللاعب B	1	2	min
1	8	-5	-5
2	2	6	2
max	8	6	

$\max_i \min_j a_{ij} = -5$

$\min \max a_{ij} = 6$

نلاحظ أن اللعبة لا تحتوي على نقاط توازن بل تتراوح بين $6 \geq V^* \geq 2$

عندئذ فإن اللاعب A سيلعب الاستراتيجية الأولى باحتمال P والثانية باحتمال 1-P

$$P = \frac{6-2}{(8+6)-(-5+2)} \Rightarrow P = \frac{4}{17}$$

$$1-P = \frac{13}{17}$$

وفي هذه الحالة سيضمن اللاعب A عائدا متوقعا يساوي قيمة اللعبة

$$V = \frac{(6 \cdot 8) - (-5)2}{17} = \qquad V = \frac{58}{17} = 3,41$$

$$U_1 = P a_{11} + (1-P) a_{21} \Rightarrow U_1 = \frac{4}{17} \cdot 8 + \frac{13}{17} \cdot 2 \Rightarrow U_1 = \underline{3,40}$$

$$U_2 = \frac{4}{17} \cdot -5 + \frac{13}{17} \cdot 6 = \underline{3,88} \quad ; \quad 180 +$$

$+ 4,188$

$0,65 \cdot 3,4$
$0,35 \cdot 3,88 \Rightarrow$

$$\boxed{V = \frac{11}{17} \cdot 3,40 + \frac{6}{17} \cdot 3,68 = 3,41}$$

أما اللاعب B فإنه يلعب الاستراتيجية الأولى باحتمال $H = \frac{11}{17}$ والثانية $1-H = \frac{6}{17}$

وقيمة اللعبة $V = 3,41$

مصفوفة اللعبة من الشكل (m×m)

المرحلة الرابعة: أي أن لكل لاعب أكثر من استراتيجيتين. عندئذ نتبع الخطوات التالية:

خطوة رقم 01: حذف التراكيب المحكومة من قبل التراكيب الأخرى إن أمكن بالنسبة للاعب A ~~الرابح~~ لاعب الأرباح. إذا وجدت مصفوفة اللعبة أن جميع عناصر أحد الأسطر وليكن K أصغر أو تساوي العناصر المقابلة لها في سطر آخر وليكن L أي أن

$$a_{kj} \leq a_{Lj}$$

عندئذ اللاعب A لن يختار الاستراتيجية K بأي حال من الأحوال لأن استراتيجية L ستكون دائما أفضل من K مهما كانت اختيارات الخصم B عندئذ يمكنه حذف السطر K لأنه يعتبر محكوم من قبل السطر L حذف الأسوء من السطر

ونفس الشيء بالنسبة للاعب B إذا كانت استراتيجية S أفضل من الاستراتيجية r مهما كانت الخيارات $a_{is} \geq a_{ir}$ نحذف الأفضل من العمود.

خطوة رقم 02: إذا استطعنا الوصول إلى مصفوفة من الشكل (2×2) بعد حذف التراكيب المحكومة. عندئذ يمكننا ايجاد قيمة اللعبة كما سبق.

— * إذا لم تصبح اللعبة من الشكل (2×2) عندئذ نلجأ إلى إيجاد حل اللعبة باستخدام احدى خوارزميات البرمجة الخطية.

مثال: ليكن لدينا اللعبة التالية:

الاستراتيجيات	اللاعب B 1	2	3	4	5	6	min	
اللاعب A 1	1	-2	2	1	2	-2	-2	
2	1	-1	1	0	-1	-3	-3	max min = -1
3	3	2	-1	3	3	1	-1	
×4	3	0	2	0	5	1	-2	
max	3	2	2	3	5	1		

min max = 5

اسقاط الإستراتيجيات التي تحقق للاعب A الكسب دوما

ومنه نصبح أمام الجدول التالي.

الاستراتيجيات بعد ذلك	اللاعب B ~~2~~	3	~~4~~	~~6~~	min	
اللاعب A 1	-2	2	1	-2	-2	max min -1
~~2~~	1	1	0	-3	-3	
3	2	-1	3	1	-1	
max	2	2	3	1		

min max 3

$H = \frac{1}{2}$ $\quad 1-H = \frac{1}{2}$

الاستراتيجيات	اللاعب B 3	6	min	
اللاعب A 1	2	-2	-2	max min -1
3	-1	1	-1	
max	2	1		

min max = 1

$P = \frac{1}{3}$

$1-P = \frac{2}{3}$

$V^* = 0$

بالعودة للجدول الأصلي نكتب أن

B:

استراتيجية	
1	0
2	6
3	$\frac{1}{2}$
4	0
5	0
6	$\frac{1}{2}$

$V^* = 0$

A:

الاستراتيجية	
(1)	$P_1 = 1/3$
2	P_2 0
3	P_3 2/3
4	P_4 0

$V^0 = 0$