نموذج أوبرت سولو :

* أتى هذا النموذج كمحاولة تفسير النمو الاقتصادي في الدول الرأسمالية ، حيث قام باختبار الفرضية التي لعتقد بها معظم الاقتصاديين أن تراكم رأس المال هو السبب الرئيسي في زيادة الانتاجية .

* اعتمدت دراسة سولو على جمع التغيرات السنوية في الناتج الاجمالي في و.م.أ مابين عامي 1909 - 1949 ، ثم حلل نمو الانتاج إلى مكونين منفصلين :

- الأول مرتبط بزيادة رأس المال المتوظف
- الثاني يمثل الجزء الذي لايعزى لرأس المال

أظهرت نتائج سولو أن 12,5 % فقط من تغير الانتاجية في المدى الطويل تعزى إلى رأس المال المتوظف ، أما الباقي من نمو الانتاجية والذي يفسر النمو على المدى الطويل سماه سولو باسم " التغير التقني "

وعليه فان الزيادة في النمو الاقتصادي ترجع إلى ثلاثة عوامل :

- زيادة كمية ونوعية العمل ؛
- الزيادة في رأس المال عن طريق التحفيز ؛
- الابتكارات التكنولوجية ؛

فرضيات نموذج سولو:

- الاقتصاد مغلق وتشوده المنافسة في جميع أسواقه، وينتج منتجا مركبا واحدا.
- دالة الانتاج من نوع كوب دوغلاس: $Y = AK^{\alpha}L^{B}$ / $1 = \alpha + B$

تتميز هذه الدالة بالخصائص التالية:

- ثبات غلة الحجم: أي في حالة تغير عوامل الانتاج في آن واحد بمقدار فان الناتج يتغير بنفس المقدار
- الدالة مستمرة بمعدل متناقص (المشتقة الأولى > 0، المشتقة الثانية < 0)
- تمكن الاحلال بين عناصر الانتاج (L, K)
- تناقص المعدل الحدي للاحلال ووجود مرونة في الأسعار والأجور، وأن عوائد العمل وأس المال تقدر على أساس الانتاجية الحدية لهما.

- الاستهلاك يأخذ شكل دالة كينز: $C = C' + c(1-t)Y = sY$
- الحكومة متغير خارجي المنشأ.
- نسبة مساهمة السكان في التشغيل ثابتة حيث اذا كان معدل نمو السكان هو n فان عرض العمل ينمو كذلك بـ n وذلك لأن:

$$\frac{d \log L}{dt} = \frac{dL}{dt} = n$$

* يشرح نموذج سولو مساهمات المصادر المختلفة لنمو الانتاج من خلال المعادلة التالية:

$$\frac{dY}{Y} = \alpha \frac{dK}{K} + (1-\alpha) \frac{dL}{L} + \frac{dA}{A}$$

* نظرا لصعوبة قياس التقدم التكنولوجي يمكن الاستدلال بمساهمة التقدم التكنولوجي في النمو الاقتصادي من خلال النمو المتبقي في الناتج بعد استبعاد مساهمة العمل ورأس المال في نمو الناتج كما يلي:

$$\frac{dA}{A} = \frac{dY}{Y} - \left[\alpha \frac{dK}{K} + (1-\alpha) \frac{dL}{L}\right]$$

وبالتالي يتضح من المعادلة أن الوصول إلى المساهمة النسبية للتقدم التكنولوجي في الناتج من خلال ايجاد باقي طرح معدل نمو المخرجات من معدل نمو المدخلات ولذلك يطلق عليها "بواقي سولو"

ويتضح أيضا أن التقدم التكنولوجي هو متغير خارجي يتحدد من خلال عناصر أخرى مثل البحث والتطوير والتعليم، التدريب ....

* شرح سولو نظريته وبين أهمية التقدم التكنولوجي في زيادة الناتج (النمو الاقتصادي) من خلال عدة مراحل نذكرها كالتالي:

1- النموذج القاعدي لسولو والقاعدة الذهبية:

1.1- النموذج القاعدي لسولو:

في ضوء الفرضيات السابقة فان النموذج القاعدي لسولو يتكون هايلي:

* الإنتاج الفردي (حصة العامل من الإنتاج) من الشكل:

$$q = \frac{Y}{L} = \frac{A K^{\alpha} L^{B}}{L} = \frac{A K^{\alpha}}{L^{1-B}} = \frac{A K^{\alpha}}{L^{\alpha}} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}$$

$$1-B=\alpha \iff \alpha+B=1$$

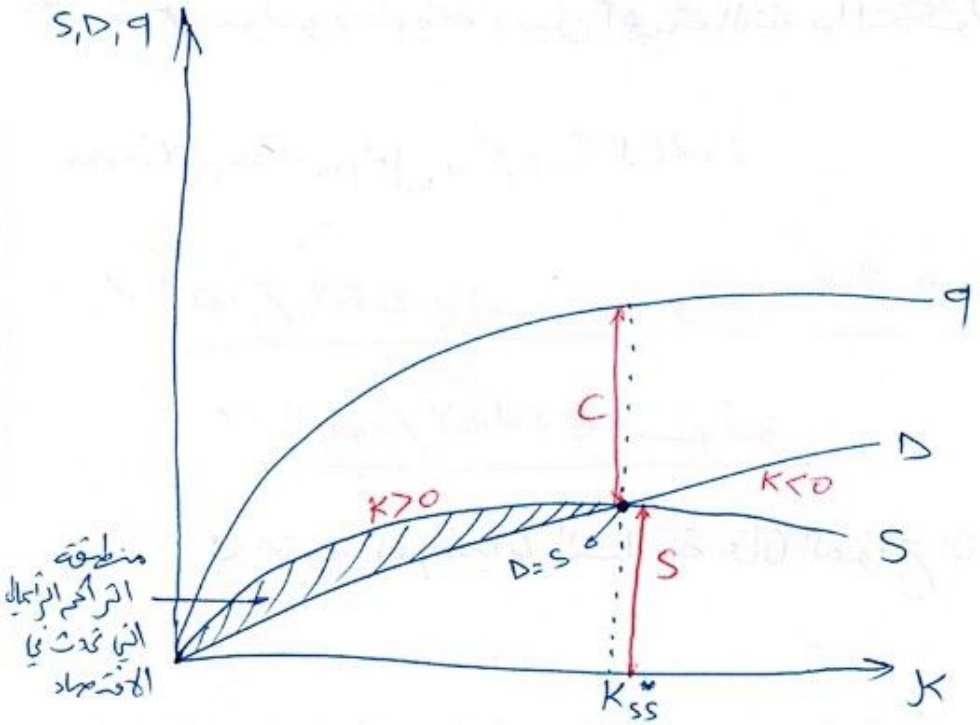
لتكن $k = \frac{K}{L}$ $\Leftarrow$ $q = A k^{\alpha}$ / K: حصة العامل من رأس المال

* معدل الادخار ومعدل الاهتلاك: لنفترض بأن الأفراد الاقتصادية تتعرض إلى اهتلاك في رأسمالها بمعدل مقداره δ وأنها تدخر من الإنتاج بمقدار s

حيث أن مقدار الاهتلاك $D = \delta K$ وأن مقدار الادخار $S = sq$

السؤال المهم: متى يصل الاقتصاد إلى أعظم إنتاج ممكن، إذا أخذنا بعين الاعتبار أنها تتعرض إلى اهتلاك معدله δ، وتدخر بمعدل s؟

تكمن الإجابة في معرفة النقطة التي يتساوى عندها مقدار الاهتلاك مع مقدار الادخار $sq = \delta k$، وهو ما أطلق عليه سولو اسم الحالة الثابتة Steady State



q: دالة الإنتاج

D: دالة الاهتلاك

S: دالة الادخار

K^*_{ss}: تراكم رأس المال عند الحالة الثابتة

حسابات :

لدينا : دالة الانتاج لكل عامل : $y = \frac{Y}{L} = Ak^{\alpha}$ / $k = \frac{K}{L}$

تكون الحركة عند الحالة الثابتة (المستقرة) يكون $\Delta k = 0 \Rightarrow sy - \delta k = 0$

مايعني أن : $\Delta k = sAk^{\alpha} - \delta k = 0$

$$sAk^{\alpha} = \delta k \Rightarrow \frac{sA}{\delta} = \frac{k}{k^{\alpha}} \Rightarrow \frac{sA}{\delta} = k^{1-\alpha}$$

$$k^{1-\alpha} = \frac{sA}{\delta} \Rightarrow k = \left(\frac{sA}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \Rightarrow \boxed{k^{*}_{ss} = \left(\frac{sA}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

رأس المال عند الحالة الثابتة (المستقرة)

تمرين :

نفترض أن : $A = 10$ ، $\alpha = B = 0,5$ ، $s = 20\% = 0,2$ ، $\delta = 5\% = 0,05$

- أوجد رأس المال عند الحالة الثابتة (المستقرة) ؟
- كمية الانتاج عند الحالة الثابتة ؟
- الاستثمار عند الحالة الثابتة والادخار ؟
- الاستهلاك عند الحالة الثابتة ؟
- مثل بيانيا ؟

الحل :

- عند الحالة الثابتة (المستقرة) : $k^{*}_{ss} = \left(\frac{sA}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

$$k^{*}_{ss} = \left(\frac{0,2 \cdot (10)}{0,05}\right)^{\frac{1}{1-0,5}} \Rightarrow \boxed{k^{*}_{ss} = 1600}$$

- كمية الانتاج عند الحالة الثابتة : $y = Ak^{\alpha}_{ss} \Leftarrow y = 10(1600)^{0,5}$

$\boxed{y = 400}$

5 ن

الادخار عند الحالة الثابتة: $S = sq \Rightarrow S = 0{,}2\,(400) = 80$

الاستهلاك عند الحالة الثابتة: $D = sK_{ss}^{*} \Rightarrow D = 0{,}05\,(1600) = 80$

أو

في الحالة الثابتة $D = S \Rightarrow \boxed{S = 80}$

الاستهلاك عند الحالة الثابتة:

$$C = q - sq = 400 - 80 \Rightarrow \boxed{C = 320}$$

* . القاعدة الذهبية:

تعرف القاعدة الذهبية بأنها مخزون رأس المال الذي يجعل استهلاك الفرد أعظم ما يمكن

وتشتق هذه القاعدة كما يلي:

$$C = q - sq = AK^{\alpha} - sK$$

نشتق الاستهلاك (C) بالنسبة إلى رأس المال K ونساويه للصفر، نحصل على:

$$\frac{dC}{dK} = \alpha A K^{\alpha-1} - s = 0 \Rightarrow K^{\alpha-1} = \frac{s}{\alpha A}$$

$$\Rightarrow K^{1-\alpha} = \frac{\alpha A}{s} \Rightarrow \boxed{K_g^{*} = \left(\frac{\alpha A}{s}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

K_g^{*}: تراكم رأس المال عند القاعدة الذهبية التي تجعل استهلاك الفرد أعظم ما يمكن

(أهمية رأس المال التي تعظم حصة الفرد من الاستهلاك)

تابع للتمرين السابق:

. أوجد قيمة تراكم رأس المال عند القاعدة الذهبية؟

. أوجد معدل الادخار اللازم عند القاعدة الذهبية؟

$$K_g^* = \left(\frac{\alpha A}{s}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \Rightarrow K_g^* = \left(\frac{0,5\,(10)}{0,05}\right)^{\frac{1}{1-0,5}}$$

$$\boxed{K_g^* = 10.000}$$

معناه اذا أردنا تعظيم حصة الفرد من الاستهلاك يجب أن يكون

$$\boxed{K_g = 10000}$$

لكن هذا المخزون يتطلب زيادة معدل الادخار حتما يأتي :

عند نقطة القاعدة الذهبية يتوقف التراكم الرأسمالي أي :

$$\Delta k_g = s_g q_g - s k_g = 0$$

s_g : معدل الادخار عند القاعدة الذهبية .

q_g : كمية الانتاج عند القاعدة الذهبية .

* حساب كمية الانتاج عند القاعدة الذهبية :

$$q_g = A K_g^{\alpha} = 10(10000)^{0,5} = 1000$$

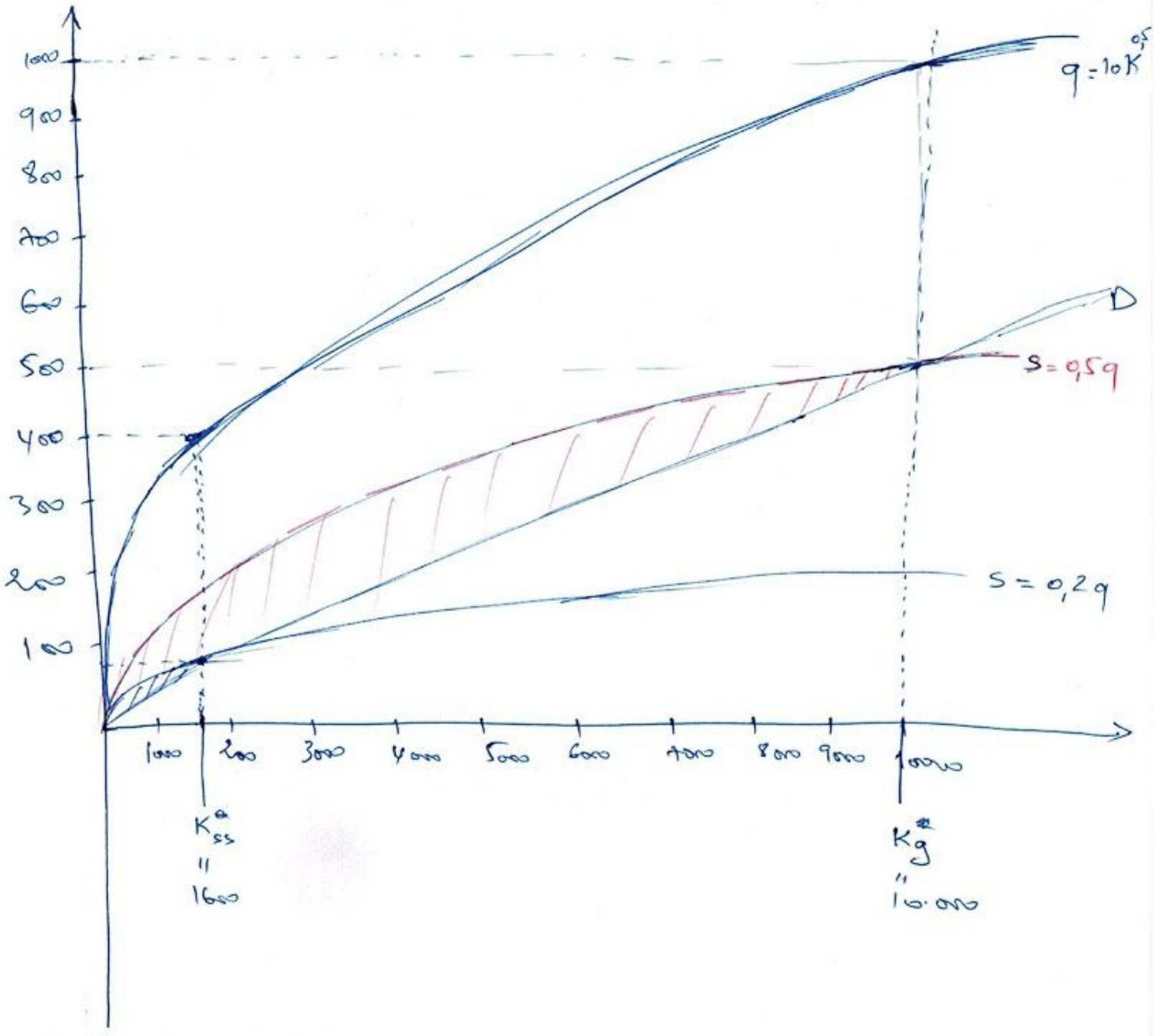
$$\boxed{q_g = 1000}$$

* حساب الادخار عند القاعدة الذهبية :

$$s_g = \frac{s k_g}{q_g} = \frac{0,05\,(10.000)}{1000} \Rightarrow s_g = \frac{500}{1000} = 0,5$$

$$\boxed{s_g = 0,5 = 50\%}$$

أي أنه من أجل أن تعظم حصة الفرد من الاستهلاك يجب أن نزيد رأس المال من 1600 إلى 10.000 ما يتطلب زيادة معدل الادخار إلى 50 %



نلاحظ أن قيام المستهلكين بزيادة معدل الادخار (من 20% ← 50%) انطلاقا من حالة التوازن سيؤدي إلى زيادة معدل الاستثمار في الاقتصاد مما سيؤدي إلى رفع معدلات الزيادة في الانتاج ($q = 400 \rightarrow q = 10.000$) وبالتالي زيادة معدل النمو الاقتصادي

8 ص