Chapitre 5 : Torsion

5.1- Définition

5.2- Essai de torsion simple

5.2.1- Principe

5.2.2- Résultats

5.2.3- Etude des déformations

5.2.4- Etude des contraintes

5.2.5- Conditions de résistance

Exemple

5.1 Définition

Une poutre est sollicitée à une torsion simple si elle est soumise à deux couples de moments directement opposés.

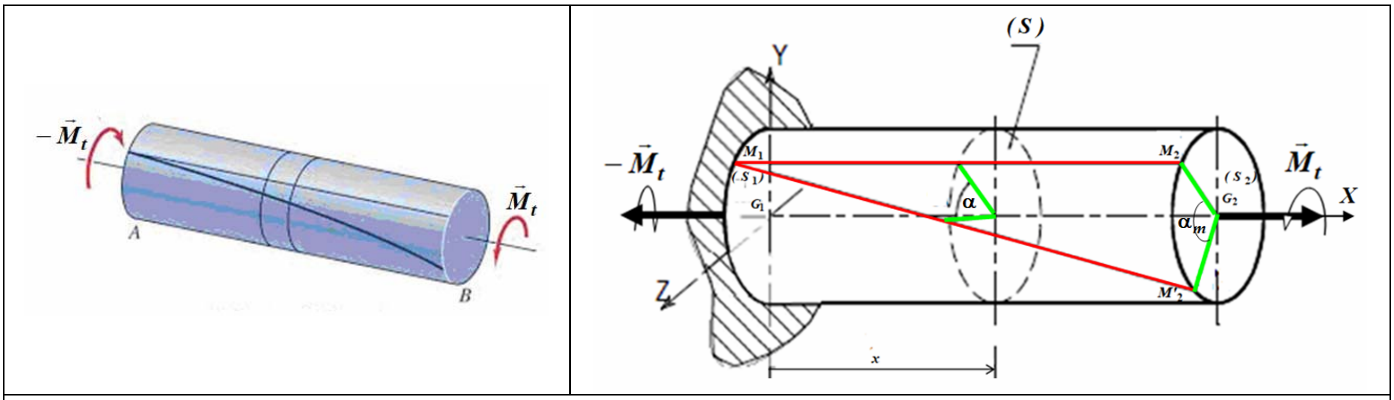

Figure 5.1 : Poutre soumise à une torsion simple

La poutre est supposée à section circulaire constante et de poids négligé. Le torseur efforts de cohésion à la section droite *(S)* de centre de surface *G* est défini par :

$$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G \qquad (5.1)$$

5.2. Essai de torsion simple

5.2.1 Principe

L'éprouvette cylindrique est encastrée à son extrémité (S_1) de centre de gravité G_1. On applique à l'extrémité droite sur la section (S_2) de centre de gravité G_2 une action mécanique modélisée par un torseur couple (Figure 5.1):

$$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M}_{G_2} \end{Bmatrix}_{G_2} \qquad (5.2)$$

En faisant croitre $\vec{M}_{G_2} = M_{G_2}.\vec{i}$ et on mesure pour chaque valeur de M_{G_2} la déformations de la poutre assimilée à la rotation de l'angle α

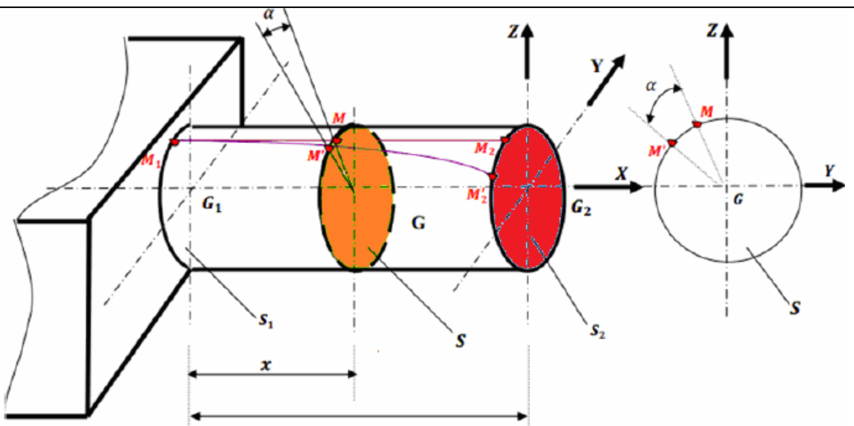

Figure 5.2 : Illustration de l'essai de torsion simple.

5.2.2 Résultats

Le déplacement d'une section droite (S) est uniquement une rotation d'un angle α autour de son axe, et cette rotation est proportionnelle à sa distance x par rapport à (S_1).

On obtient une courbe illustrée à la figure 5.3 semblable à celle de l'essai de traction :

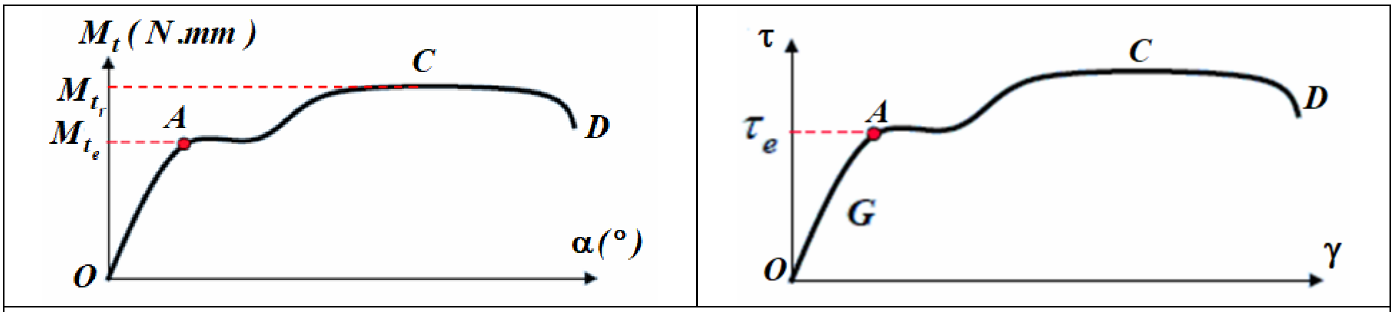

Figure 5.3 : Courbes représentatives de $M_t = f(\alpha)$ ***et*** $\tau = f(\gamma)$

- Dans la zone OA : la contrainte τ est proportionnelle à la déviation γ et la relation $\tau = f(\gamma)$ est linéaire (zone élastique) ou (zone des déformations temporaires) d'où :

$$\tau = G.\gamma \tag{5.1}$$

avec τ : Contrainte de cisaillement ou contrainte de glissement

G : Module d'élasticité transversale ou module de ***Coulomb***

γ : Déviation

- Dans la zone AD (zone plastique) la rotation α est permanente

5.2.3 Etude des déformations

L'essai montre que toute section plane est normale à l'axe du cylindre reste plane et normale à l'axe et que la distance relative entre deux sections reste sensiblement constante. Toutes les fibres se déforment suivant une hélice, sauf la ligne moyenne qui reste droite.

On constate que le rapport :

$$\theta = \frac{\alpha}{x} \tag{5.2}$$

Ce rapport reste toujours constant. Ce rapport est appelé angle unitaire de torsion $[\boldsymbol{rad/mm}]$.

α = Angle de rotation de la section S en rad.

x = Distance séparant ***(S)*** à la section de référence (S_0) en ***mm*** .

5.2.4 Etude des contraintes

On considère un petit élément de longueur Δx d'une fibre : Après déformation, le point M_2 (Figure 5.1) situé à une distance L du point M_1 vient en M'_2 , la génératrice M_1M_2 subit alors une déviation γ comparable à celle observée dans l'étude du cisaillement simple. la distance relative entre deux sections reste constante au cours de la déformation, donc l'allongement $\Delta x = 0$, alors on peut écrire que la déformation longitudinale $\varepsilon_x = 0$, on admet donc que la composante normale nulle.

La loi de Hooke pour les contraintes tangentielles s'exprime donc par : $\tau = \boldsymbol{G}.\gamma$ où $\boldsymbol{G}$ est le module d'élasticité transversale ou module de **Coulomb**.

Comme l'angle γ est petit , l'arc $\boldsymbol{M_1 M'_2} = \alpha\rho = \gamma\, \boldsymbol{x}$ d'où on aura :

$$\gamma = \frac{\alpha\rho}{\boldsymbol{x}} = \theta.\rho \qquad \textbf{\textit{(5.3)}}$$

Et par conséquent la contrainte tangentielle devient :

$$\tau = \boldsymbol{G}\theta\rho \qquad \textbf{\textit{(5.4)}}$$

avec en ***MPa***

- τ : Contrainte tangentielle de torsion
- ρ : Distance du point $\boldsymbol{M}$ à la ligne neutre (fibre neutre) en ***mm***
- θ : Angle unitaire de torsion en ***rad / mm***
- G : Module d'élasticité transversale ou Module de **Coulomb** en ***MPa***

❍ ***Remarque*** : La contrainte tangentielle de torsion τ est maximale pour les points $\boldsymbol{M}$ périphériques de la surface du solide tels que $\rho = \boldsymbol{R}$ (Rayon)

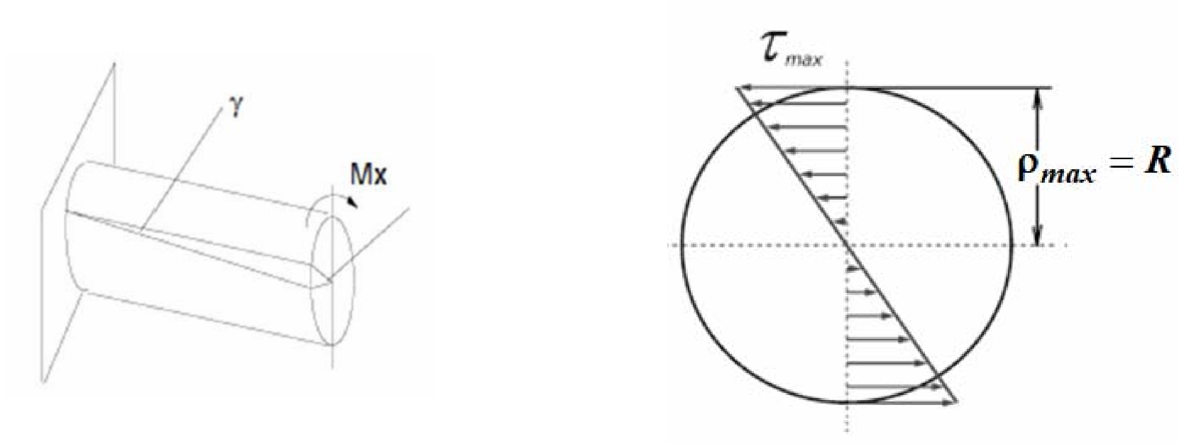

Figure 5.4 : Répartition de la contrainte tangentielle de torsion Au niveau de la section droite d'une poutre cylindrique

En un point $\boldsymbol{M}$ de la section, la distance $\boldsymbol{GM} = \rho$, la contrainte de torsion est $\tau_M = \boldsymbol{G}.\theta.\rho$ et par conséquent la force tangentielle $\boldsymbol{dF}$ agissante sur l'élément $\boldsymbol{dS}$ de la section $\boldsymbol{S}$ à cette distance est $\boldsymbol{dF} = \tau_M.\boldsymbol{dS}$ et le moment de torsion qui est égal au produit vectoriel de la distance par la force est donné par :

$$M_t = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{dF} = \int_S \rho.\tau_M dS = \int_S \rho.G.\theta.\rho.dS = G.\theta.\int_S \rho^2 dS = G.\theta.I_p \qquad \textbf{\textit{(5.5)}}$$

Avec $\boldsymbol{I_p} = \int_s \rho^2 \boldsymbol{ds}$ le moment quadratique polaire de la section $\boldsymbol{S}$ par rapport à son centre de gravité $\boldsymbol{G}$.

$\boldsymbol{I_p}$ dépend de la forme et des dimensions de la section.

❍ ***Conséquence***

La relation entre le moment et la déformation (équation de déformation) est :

$$M_t = G.\theta.I_p \qquad (5.6)$$

Il en découle que :

$$\tau_M = \frac{M_t}{I_p}\rho \qquad (5.7)$$

Où :

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{\frac{I_P}{\rho_{max}}} = \frac{M_t}{\frac{2I_P}{d}} = \frac{M_t}{W_t} \qquad (5.7)$$

Avec $W_t = \frac{2I_p}{d}$: Module de torsion

5.2.5 Conditions de résistance

Les conditions de résistances sont liées aux valeurs limites des propriétés mécaniques du matériau et du service que doit assurer la barre en torsion.

❍ Contrainte de torsion admissible

La contrainte de torsion admissible [τ_t] est le rapport de la limite d'élasticité en torsion τ_e par le coefficient de sécurité s :

$$[\tau_t] = \frac{\tau_e}{s}$$

La condition de résistance en termes de contraintes :

$$\tau_t \leq [\tau_t]$$

❍ Angle de torsion admissible

D'une manière similaire, le calcul des dimensions des arbres de transmission ou barres de torsion se fait plus par une condition de déformation qu'une condition de résistance en contrainte. En effet pour assurer une transmission rigide et éviter les vibrations, l'angle de torsion unitaire θ ne doit pas dépasser pendant le service, une valeur limite admissible $[\theta]$. D'où la condition de rigidité d'une pièce en en torsion :

$$\theta \leq [\theta]$$

❍ Cas général

Soit une barre en torsion composée de *n* matériaux (G_i), n diamètres (d_i) et n longueurs (L_i) variables et soumise à des moments de torsion M_{t_i} .

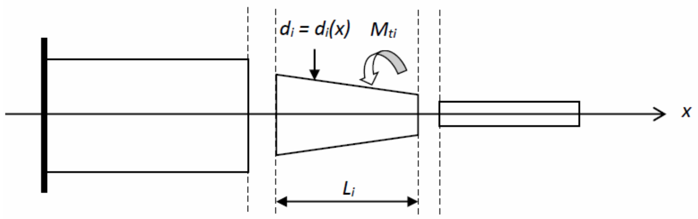

Figure 5.5 : Cas général de l'angle de torsion unitaire θ d'une poutre non homogène en torsion

$$\theta = \sum_{i}^{n} \int_0^{L_i} \frac{M_{t_i}}{G_i I_{p_i}} dx \qquad (5.8)$$

❍ Les grandeurs sous l'intégrale peuvent être constantes ou dépendant de x.

❍ Dans certains de dimensionnement des barres en torsion, il est nécessaire de satisfaire les deux conditions simultanément :

$$\begin{cases} \tau_t \leq [\tau_t] \\ \theta \leq [\theta] \end{cases}$$

Exemple : Calcul du diamètre $\boldsymbol{d}$ d'une barre cylindrique en torsion de longueur $\boldsymbol{L}$ soumise à un moment de torsion $\boldsymbol{M_t}$.

Réponse

$$W_t = \frac{I_p}{\frac{d}{2}} = \frac{\frac{\pi d^4}{32}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{16} \quad => \quad \tau_t = \frac{M_t}{\frac{\pi d^3}{16}} \leq [\tau_t]$$

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \quad => \quad \theta = \frac{M_t L}{G I_p} = \frac{32 M_t L}{G \pi d^4} \leq [\theta]$$

Donc :

$$\begin{cases} d_\tau \geq \sqrt[3]{\dfrac{16 M_t}{\pi [\tau_t]}} \\ d_\theta \geq \sqrt[4]{\dfrac{32 M_t L}{\pi G [\theta]}} \end{cases}$$

La plus grande des deux valeurs du diamètre satisfait les deux conditions de résistance.

$$d = Max\{d_\tau, d_\theta\}$$