Chapitre 5

Méthode Numérique pour la résolution de la cinématique des Mécanismes Plans

Les exemples et techniques présentés jusqu'à présent sont quelque peu irréalistes et limités. Seuls les mécanismes à quatre barres ont été analysés. L'analyse a été directe et suffisamment compacte pour être abordée par calcul manuel.

Pour des problèmes pratiques complexes, les solutions directes exactes sont soit impossibles, soit incroyablement longues. Il est plus simple de procéder par une méthode d'approximations successives. L'une des plus courantes est basée sur le schéma de Newton-Raphson pour trouver des approximations des zéros d'une fonction.

Le processus analytique de la cinématique des mécanisme plans à coulisse et manivelle révèle les remarques suivantes :

- Un mécanisme avec une seule boucle cinématique donne une équation de boucle vectorielle.
- Une équation de boucle vectorielle peut être représentée comme deux équations algébriques de position.
- Les équations de position sont non linéaires dans les coordonnées (angles et distances). Elles sont difficiles et longues à résoudre manuellement. Les méthodes numériques, telles que Newton-Raphson, sont recommandés pour résoudre des équations algébriques non linéaires.
- La dérivée temporelle des équations de position donne des équations de vitesse, ses équations de vitesse sont linéaires dans les vitesses.
- La dérivée temporelle des équations de vitesse donne des équations d'accélération linéaires.
- La matrice des coefficients des vitesses dans les équations de vitesse et la matrice des coefficients des accélérations dans les équations d’accélération sont identiques. Cette caractéristique peut être utilisée pour simplifier le processus de résolution de ces équations.

Bref aperçu sur la méthode de Newton - Raphson

La méthode de Newton-Raphson est une méthode numérique de résolution d'équations algébriques non linéaires. La méthode est basée sur la linéarisation d'une ou plusieurs équations non linéaires à l'aide de séries de Taylor, puis sur la résolution itérative de la ou des équations linéaires approchées.

Considérons l'équation non linéaire $f(x) = 0$ qui contient un x inconnu. L'équation linéarisée approchée s'écrit :

$$f(x) + \frac{df(x)}{dx}\Delta x \approx 0.$$

Cette équation peut être résolue pour Δx, ce qui donne un terme de correction approximative comme suite :

$$\Delta x = -f(x)\left(\frac{df(x)}{dx}\right)^{-1} \qquad (1)$$

Le schéma numérique général du processus itératif s'écrit :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Le processus nécessite une estimation initiale de la solution x0. Cette valeur est utilisée dans (1) pour calculer Δx . Ensuite, la valeur calculée pour Δx est utilisée pour mettre à jour x par :

$$x + \Delta x \rightarrow x \qquad (2)$$

Le processus est répété jusqu'à ce qu'une solution soit trouvée ; c'est-à-dire jusqu'à ce que f (x) = 0 .
Remarque : Dans les procédures itératives telles que N-R, le processus s'arrete à $f(x) \leq \varepsilon$, où ε est une précision donnée.

Cas d’un problème de deux équations à deux inconnues

Considérons les deux équations non linéaires en x et y suivantes :

$$f_1(x,y)=0$$
$$f_2(x,y)=0$$

Les équations linéarisées approchées s’écrivent sous la forme

$$f_1(x,y)+\frac{\partial f_1}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f_1}{\partial y}\Delta y\approx 0$$
$$f_2(x,y)+\frac{\partial f_2}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f_2}{\partial y}\Delta y\approx 0$$

La formule itérative de Newton-Raphson s'exprime par :

$$\begin{Bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{Bmatrix}=-\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y}\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}f_1(x,y)\\ f_2(x,y)\end{Bmatrix} \qquad (3)$$

Le processus nécessite une estimation initiale des inconnues x et y. Ces valeurs sont utilisées dans (3) pour calculer Δx et Δy . Ensuite, les valeurs calculées sont utilisées pour mettre à jour la solution approchée :

$$x+\Delta x\rightarrow x$$
$$y+\Delta y\rightarrow y$$

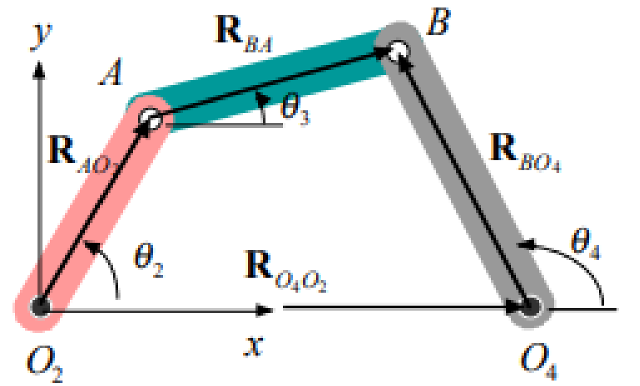
Le processus est répété jusqu'à ce qu'une solution soit trouvée. Plutôt que de vérifier si chaque fonction remplit la condition $f\leq\varepsilon$, on peut considérer $\sqrt{f_1^2+f_2^2}\leq\varepsilon$ pour terminer le processus.

Mécanismes 4 barres articulées

The vector loop equation for this four-bar is constructed as

$$\mathbf{R}_{AO_2} + \mathbf{R}_{BA} - \mathbf{R}_{BO_4} - \mathbf{R}_{O_4O_2} = \mathbf{0}$$

$$R_{O_4O_2} = L_1,\ R_{AO_2} = L_2,\ R_{BA} = L_3,\ R_{BO_4} = L_4$$



Let us consider the following constant lengths: $L_1 = 5$, $L_2 = 2$, $L_3 = 6$, $L_4 = 4$. For $\theta_2 = 120^\circ$, $\omega_2 = 1.0$ rad/sec, CCW, and $\alpha_2 = -1.0$ rad/sec^2, determine the other two angles, angular velocities, and angular accelerations.

Position equations

$$R_{AO_2}\cos\theta_2 + R_{BA}\cos\theta_3 - R_{BO_4}\cos\theta_4 - R_{O_4O_2}\cos\theta_1 = 0$$

$$R_{AO_2}\sin\theta_2 + R_{BA}\sin\theta_3 - R_{BO_4}\sin\theta_4 - R_{O_4O_2}\sin\theta_1 = 0$$

Since $\theta_1 = 0$ and the link lengths are known constants, the equations are simplified to:

$$L_2\cos\theta_2 + L_3\cos\theta_3 - L_4\cos\theta_4 - L_1 = 0$$

$$L_2\sin\theta_2 + L_3\sin\theta_3 - L_4\sin\theta_4 = 0$$

Velocity equations

The time derivative of the position equations yields:

$$-L_2\sin\theta_2\omega_2 - L_3\sin\theta_3\omega_3 + L_4\sin\theta_4\omega_4 = 0$$

$$L_2\cos\theta_2\omega_2 + L_3\cos\theta_3\omega_3 - L_4\cos\theta_4\omega_4 = 0$$

Assuming the angular velocity of the crank, ω_2, is known, we re-arrange and express these equations in matrix form as

$$\begin{bmatrix} -L_3\sin\theta_3 & L_4\sin\theta_4 \\ L_3\cos\theta_3 & -L_4\cos\theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_3 \\ \omega_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_2\sin\theta_2\omega_2 \\ -L_2\cos\theta_2\omega_2 \end{Bmatrix}$$

Acceleration equations

The time derivative of the velocity equations yields the acceleration equations:

$$-L_{BA}\sin\theta_3\alpha_3 - L_{BA}\cos\theta_3\omega_3^2 + L_{BO_4}\sin\theta_4\alpha_4 + L_{BO_4}\cos\theta_4\omega_4^2 = L_{AO_2}\sin\theta_2\alpha_2 + L_{AO_2}\cos\theta_2\omega_2^2$$

$$L_{BA}\cos\theta_3\alpha_3 - L_{BA}\sin\theta_3\omega_3^2 - L_{BO_4}\cos\theta_4\alpha_4 + L_{BO_4}\sin\theta_4\omega_4^2 = -L_{AO_2}\cos\theta_2\alpha_2 + L_{AO_2}\sin\theta_2\omega_2^2$$

Assuming that α_2 is known, we re-arrange the equations as

$$\begin{bmatrix} -L_{BA}\sin\theta_3 & L_{BO_4}\sin\theta_4 \\ L_{BA}\cos\theta_3 & -L_{BO_4}\cos\theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_{AO_2}(\sin\theta_2\alpha_2 + \cos\theta_2\omega_2^2) + L_{BA}\cos\theta_3\omega_3^2 - L_{BO_4}\cos\theta_4\omega_4^2 \\ -L_{AO_2}(\cos\theta_2\alpha_2 - \sin\theta_2\omega_2^2) + L_{BA}\sin\theta_3\omega_3^2 - L_{BO_4}\sin\theta_4\omega_4^2 \end{Bmatrix}$$

Kinematic analysis

Let us consider the following constant lengths: $L_1 = 5$, $L_2 = 2$, $L_3 = 6$, $L_4 = 4$. For $\theta_2 = 120^\circ$, $\omega_2 = 1.0$ rad/sec, CCW, and $\alpha_2 = -1.0$ rad/sec^2, determine the other two angles, angular velocities, and angular accelerations.

Position analysis

For $\theta_2 = 120^\circ$ we solve the position equations for θ_3 and θ_4. Substituting the known lengths and the input angle in (fb.p.2), we get

$$2\cos(120^o) + 6\cos\theta_3 - 4\cos\theta_4 - 5 = 0$$

$$2\sin(120^o) + 6\sin\theta_3 - 4\sin\theta_4 = 0$$

We have two nonlinear equations in two unknowns. We will consider a numerical method (Newton-Raphson) for solving these equations, as will be seen next. At this point let us consider the solution to be

$$\theta_3 = 0.3834 = 21.98^\circ$$

$$\theta_4 = 1.6799 = 96.24^\circ$$

Velocity analysis

With known values for the angles and the given input velocity, the velocity equation of (fb.v.2) becomes:

$$\begin{bmatrix} -2.2442 & 3.9762 \\ 5.5645 & 0.4355 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_3 \\ \omega_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.7321 \\ 1.0000 \end{Bmatrix}$$

The solution to these linear equations yields: $\omega_3 = 0.1395$, $\omega_4 = 0.5143$ rad/sec. Both velocities are positive, which means both are CCW.

Acceleration analysis

For known values for the angles and velocities, and the given input acceleration, the acceleration equations become:

$$\begin{bmatrix} -2.2442 & 3.9762 \\ 5.5645 & 0.4355 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.7390 \\ -0.2761 \end{Bmatrix}$$

The solution yields: $\alpha_3 = 0.0041$, $\alpha_4 = -0.6865$ rad/sec^2. One acceleration is positive; i.e., CCW, and one is negative; i.e., CW.

We apply the Newton-Raphson process to solve the position equations for a four-bar mechanism. The position equations from Example 1 are expressed as:

$$
\begin{aligned}
f_1 &= 2\cos(120^o) + 6\cos\theta_3 - 4\cos\theta_4 - 5 \\
f_2 &= 2\sin(120^o) + 6\sin\theta_3 - 4\sin\theta_4
\end{aligned}
\qquad \text{(a)}
$$

Then N-R formula for these equations becomes:

$$
\begin{Bmatrix}\Delta\theta_3 \\ \Delta\theta_4\end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial\theta_3} & \dfrac{\partial f_1}{\partial\theta_4} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial\theta_3} & \dfrac{\partial f_2}{\partial\theta_4} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} -6\sin\theta_3 & 4\sin\theta_4 \\ 6\cos\theta_3 & -4\cos\theta_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \qquad \text{(b)}
$$

From a rough sketch of the mechanism for the given input angle, we estimate the values for the two unknowns to be:

$$\theta_3 \approx 30^o = 0.5236 \text{ rad}, \ \theta_4 \approx 90^o = 1.5708 \text{ rad}$$

We start the Newton-Raphson process by evaluating the two functions in (a):

$$f_1 = 2\cos(120^o) + 6\cos(30^o) - 4\cos(90^o) - 5 = -0.8038$$

$$f_2 = 2\sin(120^o) + 6\sin(30^o) - 4\sin(90^o) = 0.7321$$

These values show that our estimates are far from zeros. We evaluate (b):

$$
\begin{Bmatrix}\Delta\theta_3 \\ \Delta\theta_4\end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} -3.0000 & 4.0000 \\ 5.1962 & 0.0000 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -0.8038 \\ 0.7321 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.1409 \\ 0.0953 \end{Bmatrix}
$$

Note that the corrections for the two angles are in radians not in degrees (this is always true). Therefore the estimated values of the two angles are corrected as

$$\theta_3 \approx 0.5236 - 0.1409 = 0.3827 \ \text{ and } \ \theta_4 \approx 1.5708 + 0.0953 = 1.6661$$

The two equations in (a) are re-evaluated:

$$f_1 = -0.0535 \ , \ f_2 = -0.0092$$

Since these values are not zeros, the process is continued. After two more iterations the process yields:

$$\theta_3 = 0.3834 = 21.98^\circ \ , \ \theta_4 = 1.6799 = 96.24^\circ$$

With these values, f_1 and f_2 are small enough to be considered zeros.

The Newton-Raphson process can be extended to *n* equations in *n* unknowns. The formulas are similar to those for two equations. It should be obvious that the N-R process is not suitable for hand calculation. The method is suitable for implementation in a computer program.